

Случайные погрешности контроля прямолинейности геометрической оси корпуса вращающейся печи описанными лазерным устройством и ФПУ таковы:

$$\delta_1 = 0,1 \dots 0,3 \text{ мм}; \delta_2 = 0; \delta_3 = 0,2 \dots 0,7 \text{ мм};$$

$$\delta_4 = 0,05 \text{ мм}; \delta_5 = 0,1 \dots 0,3 \text{ мм}.$$

Погрешность δ_2 за перефокусировку зрительной трубы исключена, а δ_1 значительно уменьшена. Суммарная погрешность контроля прямолинейности геометрической оси корпуса вращающейся печи, определенная согласно (1), при фиксации опорной прямой оптическими приборами составляет $0,95 \dots 1,72$ мм, а при фиксации опорной прямой оптическими лазерными приборами с ФПУ — $0,77 \dots 1,24$ мм. Последние значения m_2 удовлетворяют требованиям точности установки корпуса [7].

Список литературы: 1. Афанасьев В. А., Усов В. Г. Оптические приборы и методы контроля прямолинейности в инженерной геодезии. — М.: Недра, 1973. — 152 с. 2. Зидаринский А. В. Автоматизация высокоточных инженерно-геодезических измерений. — М.: Недра, 1976. — 247 с. 3. Кузюк И. В., Митковский Ю. Н., Шевченко Т. Г. Современные методы контроля установки оборудования. — Львов: Выща шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1982. — 143 с. 4. Лукьянов Б. Ф. Расчет точности инженерно-геодезических работ. — М.: Недра, 1981. — 285 с. 5. Михалев Д. Ш., Рунев Н. В., Голубцов А. И. Геодезические измерения при изучении деформаций крупных инженерных сооружений. — М.: Недра, 1977. — 152 с. 6. Островский А. И., Шевченко Т. Г., Грешнев В. Г. Контроль геометрической оси корпуса вращающейся печи с помощью лазерного луча. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1979, вып. 29, с. 76—81. 7. Система плано-предупредительного ремонта оборудования неметаллических водопроводов. — М.: Стройиздат, 1980. — 452 с. 8. Шевченко Т. Г., Хронол С. Г. Применение лазерного указателя направления УНЛЗ-У5 для створных измерений. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1984, вып. 39, с. 98—101.

Статья поступила в редакционно 09. 02. 85

УДК 551.24:528.2/3

А. А. ТАДЕЕВ

О КАРТОГРАФИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕФОРМАЦИИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При изучении современных движений земной поверхности одно из центральных мест должны занимать принципы инвариантности. Действительно, основной интерес представляют такие геометрические или физические свойства объектов, которые не зависят от выбора системы координат, т. е. величинны и различные соотношения, имеющие геометрический или физический смысл, должны быть инвариантны относительно системы координат, и, в частности, — относительно переноса их начала [1].

В настоящее время уделяется большое внимание физической (механической) интерпретации инвариантных характеристик деформации, определяемых с целью изучения современных движений земной поверхности, и, напротив, умалчивается их геометрический смысл. Цель данной работы — дать указанным характеристикам геометрическое, картографическое истолкование.

Рассмотрим некоторую поверхность S_1 . На ней выделим замкнутую односвязную область $\Delta \subset S_1$, целиком расположенную в области регулярности поверхности S_1 , а также выберем произвольные криволинейные координаты x, y . Пусть вследствие тех или иных причин произошла деформация и нарушилось прежнее взаимное расположение точек $M(x, y) \in \Delta$ поверхности S_1 . В таком случае можно утверждать, что область $\Delta \subset S_1$, каким-то образом отобразилась на область D некоторой поверхности S_2 . Предположим, что область D находится в области регулярности поверхности S_2 . Положение точек $N \in D$ второй поверхности задается теперь криволинейными координатами x', y' (точки $N(x', y')$ суть точки $M(x, y)$, изменившие свое взаимное положение в результате деформации). Пусть некоторые функции

$$x' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y) \quad (1)$$

устанавливают определенное соответствие между точками $M(x, y) \in S_1$ и точками $N(x', y') \in S_2$.

Описанное соответствие между точками $M \in \Delta$ первой поверхности S_1 и точками $N \in D$ второй поверхности S_2 , осуществляемое функциями (1), называется в математической картографии отображением (или изображением, проекцией) области $\Delta \subset S_1$ первой поверхности на область $D \subset S_2$ второй поверхности. Исследование отображения (1), заданного функциями, его реализующими, составляет так называемую задачу теории отображения

поверхностей [2]. Следуя дальше [2], ограничим класс функций, реализующих изучаемые отображения, наложив на них ряд требований. Будем считать, что заданные в области Δ функции (1):

А) однозначные;

Б) непрерывные вместе со своими частными производными;

В) имеют во всех точках области Δ якобиан $h = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0$.

Согласно современным представлениям о деформации двумерной среды [1, 3], перемещение каждой конкретной точки в пределах однородной области деформации можно задать в виде линейных функций координат. Функции (1) — уравнения отображения области $\Delta \subset S_1$ на область $D \subset S_2$ — будут иметь тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y) = x + u(x, y) = x + e_{11}x + e_{12}y + c, \\ y' &= f_2(x, y) = y + v(x, y) = y + e_{21}x + e_{22}y + d, \end{aligned} \quad (1a)$$

где e_{ij} — компоненты тензора деформации; c, d — свободные члены (значения e_{ij}, c, d определяются по известной методике [1] или [3] при количестве точек (пунктов) $k > 3$). Функции (1a) удовлетворяют в некоторой заданной области $\Delta \subset S_1$ условиям А) — В).

Зададим отображаемые поверхности их метрическими формами: на поверхности S_1 — до деформации

$$ds^2 = \lambda_1^2(x, y)[dx^2 + dy^2]; \quad (2)$$

на деформированной поверхности S_2

$$d\sigma^2 = \lambda_2^2(x', y')[dx'^2 + dy'^2]. \quad (3)$$

Вид функций $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x', y')$ характеризует взаимотоображаемые поверхности; в нашем случае это плоскости, для которых $\lambda_i(x, y) \equiv 1$, поэтому все дальнейшие выкладки несколько упрощаются.

Взяв полные дифференциалы функций (1a)

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx'}{dx} dx + \frac{dy'}{dy} dy = (1 + e_{11}) dx + e_{12} dy, \\ dy' &= \frac{dy'}{dx} dx + \frac{dy'}{dy} dy = e_{21} dx + (1 + e_{22}) dy \end{aligned} \quad (4)$$

и пользуясь общепринятыми обозначениями [2]

$$\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 = (1 + e_{11})^2 + e_{21}^2, \\ f &= \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = (1 + e_{11})e_{12} + (1 + e_{22})e_{21}, \end{aligned}$$

$$g = \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 = e_{12}^2 + (1 + e_{22})^2, \quad (5)$$

$$d\sigma^2 = edx^2 + 2fdxdy + gdy^2. \quad (6)$$

Теперь можно легко получить частный масштаб $\mu = \frac{d\sigma}{ds}$ (коэффициент искажения) отображения (1a) в азимуте α

$$\mu^2 = e \cos^2 \alpha + f \sin 2\alpha + g \sin^2 \alpha. \quad (7)$$

Используя приведенные выше соотношения, а также руководствуясь [2], получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2f}{e - g}; \quad (8) \quad a^2 = \frac{1}{2}(e + g + \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}); \quad (9)$$

$$b^2 = \frac{1}{2}(e + g - \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}); \quad (10)$$

$$m = \sqrt{e}; \quad (11) \quad n = \sqrt{g}; \quad (12) \quad \operatorname{tg} \psi = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right); \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right); \quad (14) \quad \operatorname{tg} \omega = h/f; \quad (15) \quad \operatorname{tg} \epsilon = -f/h; \quad (16) \quad p = h, \quad (17)$$

где $h^2 = eg - f^2$; α_0 — главное направление искажения (деформации); a, b — экстремальные (максимальный и минимальный соответственно) масштабы; m, n — масштабы по направлениям изобращений на плоскости S_2 координатных линий плоскости S_1 , т. е. $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$; ψ, χ — азимуты на S_2 изображений этих линий; ω — угол между изображениями на S_2 координатных линий плоскости S_1 ; ϵ — угол, выходящий на S_2 искажением прямого угла между координатными линиями плоскости S_1 ; p — масштаб площади (см. рис. 1 из [2]).

Величины, выражаемые формулами (8) — (17), являются инвариантными характеристиками отображения, данного уравнениями (1a). Легко заметить, что из приведенных выше характеристик можно выбрать несколько независимых друг от друга величин, через которые выразились бы все остальные; причем выбор может быть осуществлен неоднозначно. За такую группу независимых характеристик обычно принимают одну из следующих [2]:

$$\{a, b, \alpha_0, \psi\}; \{m, n, \psi, \chi\}; \{m, n, \psi, \omega\}; \{m, n, \psi, \epsilon\}.$$

Используя независимые характеристики любой из выделенных групп, можно дать отображению геометрическую интерпретацию — построить эллипс искажений (индикатрису отображения М. Тиссо). С введением эллипса искажений как геометрической характеристики отображения основные вопросы теории отображения поверхностей (в том числе отображения, данного уравнениями

(1а) приобретают естественную постановку и получают весьма наглядное решение [2].

Рассмотрим более подробно характеристики, например, первой группы. С учетом (5) имеем

$$a^2 = 1 + e_{11} + e_{22} + \frac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{21}^2) + \frac{1}{2}[4(e_{11} - e_{22})^2 + 4(e_{12} + e_{21})^2 + 4(e_{11} - e_{22})(e_{11}^2 - e_{22}^2 + e_{21}^2 - e_{12}^2) + (e_{11}^2 - e_{22}^2 + e_{21}^2 - e_{12}^2)^2 + 8(e_{12} + e_{21})(e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22}) + 4(e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22})^2]^{1/2}. \quad (18)$$

С ограничением точности до первых порядков малости (малыми первого порядка мы полагаем смещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ (см. формулу (1а), а значит, и компоненты тензора деформации e_{ij})

$$a = [1 + e_{11} + e_{22} + \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2}]^{1/2}. \quad (19)$$

Разлагая (19) в ряд по биному Ньютона, получаем

$$a = 1 + \frac{e_{11} + e_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2}. \quad (20)$$

Аналогично

$$b = 1 + \frac{e_{11} + e_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2}. \quad (21)$$

Далее из формул

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2 \frac{e_{12} + e_{21} + e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22}}{2(e_{11} - e_{22}) + e_{11}^2 - e_{22}^2 + e_{21}^2 - e_{12}^2}; \quad (22)$$

$$p = 1 + e_{11} + e_{22} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} \quad (23)$$

имеем с той же точностью

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{e_{12} + e_{21}}{e_{11} - e_{22}}; \quad (24) \quad p = 1 + e_{11} + e_{22}. \quad (25)$$

И наконец

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{e_{21}}{1 + e_{11}} \rightarrow 0, \quad (26)$$

что очевидно, поскольку на отображаемых плоскостях приняты прямоугольные координаты и к тому же функции, реализующие отображение, являются линейными.

С другой стороны, известно [1, 3], что

$$\frac{e_{11} + e_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2} = E_1; \quad (27)$$

$$\frac{e_{11} + e_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2} = E_2; \quad (28)$$

$$\frac{e_{12} + e_{21}}{2} = \operatorname{tg} 2\varphi; \quad (29) \quad e_{11} + e_{22} = \theta. \quad (30)$$

где E_1 и E_2 — соответственно максимальное и минимальное растяжения (сжатия); φ — направление действия максимального растяжения E_1 (главная ось деформации); θ — дилатация.

Формулы (27)–(30) — это инвариантные характеристики в теории деформации двумерной среды и являются основными при определении горизонтальных деформаций земной поверхности по геодезическим данным.

Сравнивая теперь выражения (20), (21), (24), (25) с (27), (28), (29), (30), имеем

$$E_1 = a - 1; \quad (31) \quad E_2 = b - 1; \quad (32) \quad \theta = p - 1; \quad (33) \quad \varphi = \alpha_0. \quad (34)$$

т. е. с ограничением точности до первых порядков малости максимальные растяжения E_1 и сжатие E_2 при деформации равны относительно искажениям (масштабам) длин по соответствующим им главным направлениям отображения — деформации; дилатация θ — это относительное искажение площади; а главная ось деформации совпадает с направлением максимального искажения α_0 отображения.

Возможны различные методы определения инвариантных характеристик деформации земной поверхности. Основной из них, получивший в настоящее время широкое применение, — физический; он основан на теории деформации сплошных сред. Второй, изложенный выше, имеет в своей основе теорию отображения плоскостей (назовем его картографическим). Оба метода приводят, в конечном итоге, к идентичным результатам — они взаимосвязаны. Совместное же их использование дает возможность установить как физический (механический), так и геометрический (картографический) смысл характеристик. При этом с точки зрения вычислителя картографический метод оказывается более точным — он позволяет определять значения характеристик деформации с точностью до высших порядков.

Список литературы: 1. Есиков Н. П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности. — Новосибирск: Наука, 1979. — 173 с. 2. Мещеряков Г. А. Геофизические основы математической картографии. — М.: Недра, 1968. — 160 с. 3. Тадева А. А., Киричук В. В. Об определении характеристик деформаций по данным о горизонтальных движениях земной коры. — К., 1984. — 11 с. — Рукопись деп. в УкрНИИДТИ, № 1171 Ук — 84 Деп.

Статья поступила в редколлегию 14.01.85