УДК 551.24:528.2/3

*А. А. ТАДЕЕВ*

# О КАРТОГРАФИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕФОРМАЦИИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При изучении современных движений земной поверхности одно из центральных мест должны занимать принципы инвариантности. Действительно, основной интерес представляют такие геометрические или физические свойства объектов, которые не зависят от выбора системы координат, т. е. величины и различные соотношения, имеющие геометрический или физический смысл, должны быть инвариантны относительно системы координат, и, в частности, — относительно переноса их начала [1].

В настоящее время уделяется большое внимание физической (механической) интерпретации инвариантных характеристик деформации, определяемых с целью изучения современных движений земной поверхности, и, напротив, умалчивается их геометрический смысл. Цель данной работы — дать указанным характеристикам геометрическое, картографическое истолкование.

Рассмотрим некоторую поверхность $S_1$. На ней выделим замкнутую односвязную область $\Delta\subset S_1$, целиком располагающуюся в области регулярности поверхности $S_1$, а также выберем произвольные криволинейные координаты $x, y$. Пусть вследствие тех или иных причин произошла деформация и нарушилось прежнее взаимное расположение точек $M(x, y)\in\Delta$ поверхности $S_1$. В таком случае можно утверждать, что область $\Delta\subset S_1$ каким-то образом отобразилась на область $D$ некоторой поверхности $S_2$. Предположим, что область $D$ находится в области регулярности поверхности $S_2$. Положение точек $N\in D$ второй поверхности задается теперь криволинейными координатами $x'$, $y'$ (точки $N(x', y')$ суть точки $M(x, y)$, изменившие свое взаимоположение в результате деформации). Пусть некоторые функции

$$x' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y) \tag{1}$$

устанавливают определенное соответствие между точками $M(x, y)\in S_1$ и точками $N(x', y')\in S_2$.

Описанное соответствие между точками $M\in\Delta$ первой поверхности $S_1$ и точками $N\in D$ второй поверхности $S_2$, осуществляемое функциями (1), называется в математической картографии отображением (или изображением, проекцией) области $\Delta\subset S_1$ первой поверхности на область $D\subset S_2$ второй поверхности. Исследование отображения (1), заданного функциями, его реализующими, составляет так называемую прямую задачу теории отображения поверхностей [2]. Следуя дальше [2], ограничим класс функций, реализующих изучаемые отображения, наложив на них ряд требований. Будем считать, что заданные в области $\Delta$ функции (1):

А) однозначные;

Б) непрерывные вместе со своими частными производными;

В) имеют во всех точках области $\Delta$ якобиан $h = \dfrac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \neq 0$.

Согласно современным представлениям о деформации двумерной среды [1, 3], перемещение каждой конкретной точки в пределах однородной области деформации можно задать в виде линейных функций координат. Функции (1) — уравнения отображения области $\Delta \subset S_1$ на область $D \subset S_2$ — будут иметь тогда следующий вид:

$$x' = f_1(x, y) = x + u(x, y) = x + e_{11}x + e_{12}y + c,$$

$$y' = f_2(x, y) = y + v(x, y) = y + e_{21}x + e_{22}y + d, \tag{1a}$$

где $e_{ij}$ — компоненты тензора деформации; $c$, $d$ — свободные члены (значения $e_{ij}$, $c$, $d$ определяются по известной методике [1] или [3] при количестве точек (пунктов) $k > 3$). Функции (1a) удовлетворяют в некоторой заданной области $\Delta \subset S_1$ условиям А)—В).

Зададим отображаемые поверхности их метрическими формами: на поверхности $S_1$ — до деформации

$$ds^2 = \lambda_1^2(x, y)[dx^2 + dy^2]; \tag{2}$$

на деформированной поверхности $S_2$

$$d\sigma^2 = \lambda_2^2(x', y')[dx'^2 + dy'^2]. \tag{3}$$

Вид функций $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x', y')$ характеризует взаимоотображаемые поверхности; в нашем случае это плоскости, для которых $\lambda_i(x, y) \equiv 1$, поэтому все дальнейшие выкладки несколько упрощаются.

Взяв полные дифференциалы функций (1a)

$$dx' = \frac{dx'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy = (1 + e_{11})\,dx + e_{12}\,dy,$$

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy = e_{21}\,dx + (1 + e_{22})\,dy \tag{4}$$

и пользуясь общепринятыми обозначениями [2]

$$e = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 = (1 + e_{11})^2 + e_{21}^2,$$

$$f = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} = (1 + e_{11})\,e_{12} + (1 + e_{22})\,e_{21},$$

$$g = \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 = e_{12}^2 + (1 + e_{22})^2, \tag{5}$$

получим

$$d\sigma^2 = edx^2 + 2fdxdy + gdy^2. \tag{6}$$

Теперь можно легко получить частный масштаб $\mu = \frac{d\sigma}{ds}$ (коэффициент искажения) отображения (1а) в азимуте $\alpha$

$$\mu^2 = e\cos^2\alpha + f\sin 2\alpha + g\sin^2\alpha. \tag{7}$$

Используя приведенные выше соотношения, а также руководствуясь [2], получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2f}{e-g}; \ (8) \qquad a^2 = \frac{1}{2}\left(e + g + \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}\right); \tag{9}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}\left(e + g - \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}\right); \tag{10}$$

$$m = \sqrt{e}; \ (11) \quad n = \sqrt{g}; \ (12) \quad \operatorname{tg}\psi = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right); \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\chi = \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right); \ (14) \ \operatorname{tg}\omega = h/f; \ (15) \ \operatorname{tg}\varepsilon = -f/h; \ (16) \ p = h, \tag{17}$$

где $h^2 = eg - f^2$; $\alpha_0$ — главное направление искажения (деформации); $a$, $b$ — экстремальные (максимальный и минимальный соответственно) масштабы; $m$, $n$ — масштабы по направлениям изображений на плоскости $S_2$ координатных линий плоскости $S_1$, т. е. $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$; $\psi$, $\chi$ — азимуты на $S_2$ изображений этих линий; $\omega$ — угол между изображениями на $S_2$ координатных линий плоскости $S_1$; $\varepsilon$ — угол, являющийся на $S_2$ искажением прямого угла между координатными линиями плоскости $S_1$; $p$ — масштаб площади (см. рис. 1 из [2]).

Величины, выражаемые формулами (8)—(17), являются инвариантными характеристиками отображения, данного уравнениями (1а). Легко заметить, что из приведенных выше характеристик можно выбрать несколько независимых друг от друга величин, через которые выразились бы все остальные; причем выбор может быть осуществлен неоднозначно. За такую группу независимых характеристик обычно принимают одну из следующих [2]:

$$\{a, b, \alpha_0, \psi\}; \ \{m, n, \psi, \chi\}; \ \{m, n, \psi, \omega\}; \ \{m, n, \psi, \varepsilon\}.$$

Используя независимые характеристики любой из выделенных групп, можно дать отображению геометрическую интерпретацию — построить эллипс искажений (индикатриссу отображения М. Тиссо). С введением эллипса искажений как геометрической характеристики отображения основные вопросы теории отображения поверхностей (в том числе отображения, данного уравнениями

(1а)) приобретают естественную постановку и получают весьма наглядное решение [2].

Рассмотрим более подробно характеристики, например, первой группы. С учетом (5) имеем

$$a^2 = 1 + e_{11} + e_{22} + \frac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{12}^2 + e_{21}^2) + \frac{1}{2}\Big[4(e_{11} - e_{22})^2 + 4(e_{12} + e_{21})^2 + 4(e_{11} - e_{22})(e_{11}^2 - e_{22}^2 + e_{21}^2 - e_{12}^2) + (e_{11}^2 - e_{22}^2 + e_{21}^2 - e_{12}^2)^2 + 8(e_{12} + e_{21})(e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22}) + 4(e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22})^2\Big]^{1/2}. \quad (18)$$

С ограничением точности до первых порядков малости (малыми первого порядка мы полагаем смещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ (см. формулу (1а), а значит, и компоненты тензора деформации $e_{ij}$)

$$a = [1 + e_{11} + e_{22} + \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2}]^{1/2}. \quad (19)$$

Разлагая (19) в ряд по биному Ньютона, получаем

$$a = 1 + \frac{e_{11} + e_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2}. \quad (20)$$

Аналогично

$$b = 1 + \frac{e_{11} + e_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2}. \quad (21)$$

Далее из формул

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\frac{e_{12} + e_{21} + e_{11}e_{12} + e_{21}e_{22}}{2(e_{11} - e_{22}) + e_{11}^2 - e_{22}^2 + e_{21}^2 - e_{12}^2}; \quad (22)$$

$$p = 1 + e_{11} + e_{22} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} \quad (23)$$

имеем с той же точностью

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{e_{12} + e_{21}}{e_{11} - e_{22}}; \quad (24) \qquad p = 1 + e_{11} + e_{22}. \quad (25)$$

И наконец

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{e_{21}}{1 + e_{11}} \to 0, \quad (26)$$

что очевидно, поскольку на отображаемых плоскостях приняты прямоугольные координаты и к тому же функции, реализующие отображение, являются линейными.

С другой стороны, известно [1, 3], что

$$\frac{e_{11} + e_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2} = \mathrm{E}_1; \quad (27)$$

$$\frac{e_{11} + e_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2} = \mathrm{E}_2; \quad (28)$$

$$\frac{e_{12} + e_{21}}{e_{11} - e_{22}} = \operatorname{tg} 2\varphi; \quad (29) \qquad e_{11} + e_{22} = \theta. \quad (30)$$

где $E_1$ и $E_2$ — соответственно максимальное и минимальное растяжения (сжатия); $\varphi$ — направление действия максимального растяжения $E_1$ (главная ось деформации); $\theta$ — дилатация.

Формулы (27)—(30) — это инвариантные характеристики в теории деформации двумерной среды и являются основными при определении горизонтальных деформаций земной поверхности по геодезическим данным.

Сравнивая теперь выражения (20), (21), (24), (25) с (27), (28), (29) ,(30), имеем

$$E_1 = a - 1; \quad (31) \qquad E_2 = b - 1; \quad (32) \qquad \theta = p - 1; \quad (33) \qquad \varphi = \alpha_0, \quad (34)$$

т. е. с ограничением точности до первых порядков малости максимальные растяжение $E_1$ и сжатие $E_2$ при деформации равны относительным искажениям (масштабам) длин по соответствующим им главным направлениям отображения—деформации; дилатация $\theta$ — это относительное искажение площади; а главная ось деформации совпадает с направлением максимального искажения $\alpha_0$ отображения.

Возможны различные методы определения инвариантных характеристик деформации земной поверхности. Основной из них, получивший в настоящее время широкое применение, — физический; он основан на теории деформации сплошных сред. Второй, изложенный выше, имеет в своей основе теорию отображения поверхностей (назовем его картографическим). Оба метода приводят, в конечном итоге, к идентичным результатам — они взаимосвязаны. Совместное же их использование дает возможность установить как физический (механический), так и геометрический (картографический) смысл характеристик. Причем с точки зрения вычислителя картографический метод оказывается более точным — он позволяет определять значения характеристик деформации с точностью до высших порядков.

**Список литературы:** 1. *Есиков Н. П.* Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности. — Новосибирск: Наука, 1979. — 173 с. 2. *Мещеряков Г. А.* Теоретические основы математической картографии. — М.: Недра, 1968. — 160 с. 3. *Тадеев А. А., Киричук В. В.* Об определении характеристик деформаций по данным о горизонтальных движениях земной коры. — К., 1984. — 11 с. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1171 Ук — 84 Деп.

Статья поступила в редколлегию 14. 01. 85