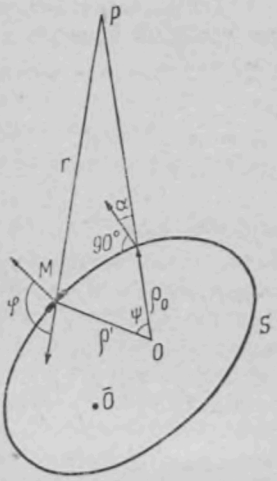
# ДИСКУССИИ И РЕЦЕНЗИИ

*Н. К. МИГАЛЬ*

## ОТЗЫВ О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ, ПРЕДЛОЖЕННОМ В. В. БРОВАРОМ

В опубликованных в Известиях высшей школы статьях [1, 2] и ряде других, опубликованных там же, В. В. Бровар предлагает новый метод решения краевой задачи Дирихле. Заметим, что этой проблемой занимались такие выдающиеся математики, как Лаплас, Гаусс, Ляме, Фредгольм, Пуанкаре и многие другие ученые с мировым именем. Ими найдено решение задачи в замкнутой форме только для сферы; чтобы решить проблему для эллипсоида, Ляме создал специальные функции, которые носят его имя; найдено одно классическое интегральное уравнение, решающее проблему для любой регулярной поверхности. Кстати сказать, появление интегральных уравнений связано с решением проблемы Дирихле. Все это говорит о том, что даже незначительные новые достижения в этой области заслуживают самого пристального внимания.




Для ясности дальнейшего изложения остановимся на формулировке проблемы Дирихле. Задача заключается в следующем.

Пусть в каждой точке замкнутой регулярной поверхности $S$ дано значение некоторой функции $F(M)$, зависящей только от положения точки $M$ на поверхности. Найти такую гармоническую вне $S$ и регулярную на бесконечности функцию $V$, которая принимала бы на поверхности заданное значение $F(M)$.

Ни в условии задачи, ни в ее решении нет какой бы то ни было системы координат. Другими словами, условие и решение проблемы инвариантны по отношению к системе координат.

Продемонстрируем это на двух классических примерах.

Доказано, что по заданным значениям $F(M)$ можно найти такую плотность простого слоя $\mu(M)$, тоже зависящую только от положения точки на поверхности, с помощью которой решение проблемы дается в виде потенциала простого слоя

$$V(P) = \int_S \frac{\mu(M)}{r}\, dS. \tag{1}$$

Как видим, решение инвариантно, так как $r$ и $\mu(M)$ суть инвариантны.

Другой пример. Решение проблемы ищем в виде потенциала двойного слоя

$$V(P) = \int_S \frac{\nu \cos \varphi}{r^2}\, dS. \tag{2}$$

Здесь $\varphi$ — угол между направлением, идущим из точки $P$ на точку $M$, и нормалью к поверхности в точке $M$. Следовательно, $\varphi$ есть инвариант. Неизвестная плотность $\nu$ определяется из интегрального уравнения, получаемого путем предельного перехода к поверхности $S$:

$$F(M) = -2\pi\nu + \int_S \frac{\nu \cos\varphi}{r^2}\, dS. \tag{3}$$

Оно инвариантно. Стало быть, таковым является и решение (2).

При практическом решении проблемы всегда приходится применять ту или иную систему координат, но при этом следует позаботиться о сохранении инвариантности задачи. Пусть мы выбрали полярную систему координат с началом в точке $O$ (см. рис.) и выразили $F(M)$ в виде $\varphi(\rho', \theta', \lambda')$. Этим самым мы задали $F(M)$ с помощью полярных координат $\rho'$, $\theta'$, $\lambda'$. Если после этого мы пожелаем выбрать другое начало $\overline{O}$ и другую ориентировку полярной системы координат, то, не нарушая инвариантности задачи, нужно выразить $F(M)$ такой функцией $\psi(\overline{\rho}, \overline{\theta}, \overline{\lambda})$, которая принимала бы на каждой площадке $dS$ такое же значение, как и функция $\varphi(\rho', \theta', \lambda')$ Точно также в любой фиксированной внешней точке должно быть

$$V(P) = V(\rho', \theta', \lambda') = V(\overline{\rho}, \overline{\theta}, \overline{\lambda}).$$

Теперь посмотрим, что получается у В. В. Бровара. Он предлагает искать решение проблемы Дирихле в форме любой из ниже приведенных четырех функций и их комбинаций.

$$\begin{aligned} K &= \int_S \mu E\, dS, \\ M &= \int_S \nu \frac{dE}{dn}\, dS, \\ v &= \int_S \mu \left(\frac{1}{r} + kE\right) dS, \\ w &= \int_S \nu \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r} + kE\right) dS, \end{aligned} \tag{4}$$

где $k$ — величина постоянная. При этом $v$ и $w$ автор называет обобщенными потенциалами простого и двойного слоя.

Если до сих пор мы искали решение проблемы в виде потенциала простого слоя или же потенциала двойного слоя, то теперь с привлечением функций (4) и их комбинаций возможности решения задачи сильно расширяются. Однако возникают серьезные сомнения, приведут ли функции $K$, $M$, $v$ и $w$ и их комбинации к правильному решению проблемы. Дело в том, что называемая автором фундаментальная гармоническая функция

$$E = \frac{r}{\rho^2} + \frac{\rho' \cos\psi}{\rho^2} \ln \frac{r + \rho - \rho' \cos\psi}{2\rho} \tag{5}$$

есть функция полярных координат, существенно зависящая от выбора начала и ориентировки этой системы координат. Поэтому функции $K$, $M$, $v$ и $w$ в отличие от потенциалов простого и двойного слоев не инвариантны. И, следовательно, в каждой произвольно выбранной системе координат будем иметь отличные решения задачи Дирихле.

В статье В. В. Бровара [2] мы находим еще один способ решения краевой задачи Дирихле. Он представляет собой гармоническую и регулярную на бесконечности функцию $V(P)$ в виде

$$V=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\mu}{r}\,dS+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\mu}{r}\,dS\right], \tag{6}$$

что можно записать так

$$V(P)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \mu\frac{\rho'^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \tag{7}$$

Понятно, что каждое из слагаемых формулы (6) гармонично вне $S$ и регулярно на бесконечности.

Путем предельного перехода к поверхности $S$ формула (6) дает интегральное уравнение для определения плотности простого слоя

$$F(M)=-\mu\rho_0\cos\alpha+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \mu\frac{\rho'^2-\rho_0^2}{r^3}\,dS. \tag{8}$$

В. В. Бровар считает, что формулы (7) и (8) решают проблему Дирихле для любой поверхности и при любой заданной функции $F(M)$. Но и здесь он нарушает инвариантность задачи. Это приводит к тому, что решение проблемы Дирихле, представленное формулами (7) и (8), не является общим.

В самом деле, пусть, приняв за начало координат точку $O$, в результате решения интегрального уравнения (8) мы получили для плотности простого слоя некоторое выражение $\mu(\rho', \theta', \lambda')$, зависящее от полярных координат $\rho$, $\theta'$, $\lambda'$ текущей точки поверхности; при другом начале $\overline{O}$ получили бы другое выражение $\overline{\mu}(\overline{\rho}, \overline{\theta}, \overline{\lambda})$ для той же плотности. Конечно, оба выражения не будут зависеть от радиуса-вектора внешней точки $P$.

При сопоставлении $\mu$ и $\overline{\mu}$ можно ожидать два случая: на каждой площадке $ds$ функции $\mu$ и $\overline{\mu}$ дают разные числовые значения и, второй случай, когда они дают одинаковые значения. В первом случае плотность простого слоя не инвариантна по отношению к системе координат, а во втором случае инвариантность соблюдается. Пусть мы имеем дело с неинвариантной плотностью, тогда для достижения инвариантности функции $V(P)$ произведение $\mu(\rho'^2-\rho^2)$, фигурирующее в формуле (7), должно превратиться в инвариант. Но этого не может произойти, так как $\mu$ не зависит от $\rho$ Если же мы имеем дело с плотностью, инвариантной по отношению к системе координат, то для достижения инвариантности $V(P)$ можно положить в формуле (7) $\rho'^2-\rho^2=c$, где $c$ — некоторая постоянная. В этом случае наша поверхность $S$ превращается в сферу, а формула (7) — в интеграл Пуассона.

Из сказанного ясно, что наблюдаемое распространение метода В. В. Бровара на теорию фигуры Земли является поспешным. Что касается дискуссии, открытой на эту тему на страницах сборника «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», выпуск 3, то она касается заслуживающих внимания частных вопросов о добросовестности отдельных научных работников и приоритете и вовсе не затрагивает вопроса по-существу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бровар. Фундаментальные гармонические функции с особенностью на отрезке и решение внешних краевых задач. Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3, 1964.

2. В. В. Бровар. О решении краевой задачи Молоденского. Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, 1963.

Рецензия поступила
16 ноября 1965 г.