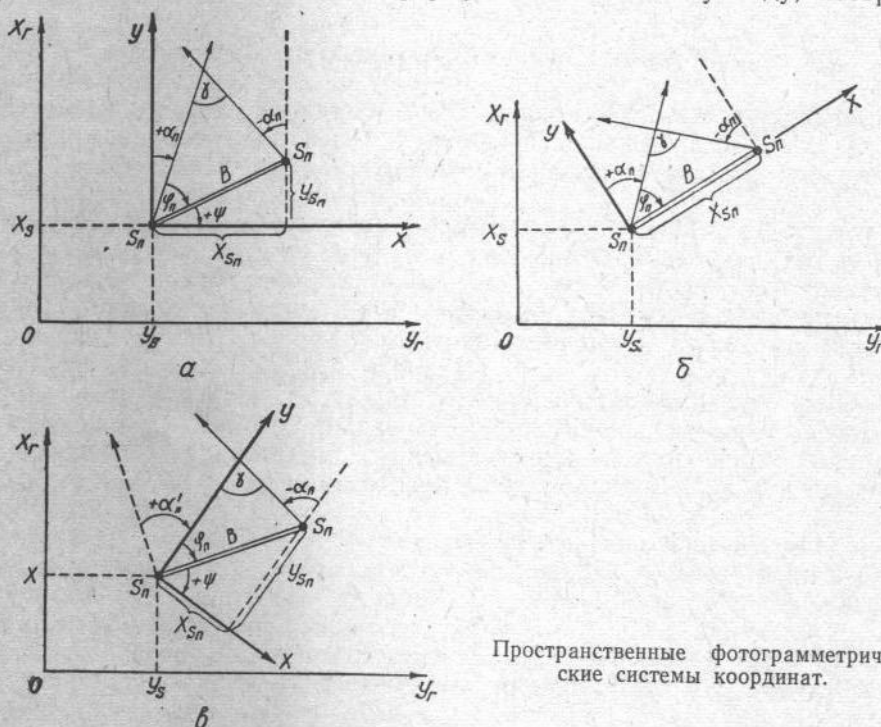


УДК 528.7

В. М. СЕРДЮКОВ

ПРИВЕДЕНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ФОТОТЕОДОЛИТНОЙ СЪЕМКИ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Рассмотрим новые выводы основных формул фототеодолитной съемки для различных случаев съемки и систем координат. Эти выводы основаны на приведении всех формул к обобщенному виду, который



соответствует уравнениям для нормального случая съемки. Для краткости возьмем равенства только для горизонтального положения оптических осей.

При выводах формул для угловых элементов ориентирования используется правило знаков, установленное А. Н. Лобановым [2]. За положительные направления углов приняты (если наблюдать против положительных направлений координатных осей, перпендикулярных к плоскости вращения): для угла α — вращение по ходу часовой стрелки, для угла ω — вращение против хода часовой стрелки, для угла χ — вращение по ходу часовой стрелки.

Выводы уравнений приводятся для трех систем пространственных фотограмметрических координат, которые отличаются выбранным положительным направлением оси Y .

За положительные для оси Y приняты направления: а) параллельное оси X_r геодезической системы (рис., а); б) перпендикулярное базису (рис., б), в) оптической оси левого снимка (рис., в).

Кроме этих направлений, могут быть взяты и другие (например, направление, параллельное оси Y_r , геодезической системы), однако все формулы для определения пространственных координат при других выбранных положительных направлениях оси Y фотограмметрической системы могут быть получены путем замены в соответствующих выражениях первых трех систем X на Y или X на $-Y$ и наоборот. Таким образом, представляют интерес только формулы для первых трех выбранных направлений для положительной оси Y фотограмметрической системы координат.

Вид уравнений связи координат точек снимка и объекта, а также формул перевычисления фотограмметрических координат в геодезические будет зависеть от взятого направления оси Y пространственной фотограмметрической системы координат.

Равенства для определения пространственных фотограмметрических координат точек объекта по измерениям пары снимков для любого случая можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B_t \frac{f}{p_t}; \\ X &= B_t \frac{x_t}{p_t}; \\ Z &= B_t \frac{z_t}{p_t}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

По измерениям одиночного снимка координаты точек объекта будут определяться в общем случае по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X &= Y \frac{x_t}{f}; \\ Z &= Y \frac{z_t}{f}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Трансформированные значения координат находят так:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= f \frac{a_1 x + a_2 f + a_3 z}{b_1 x + b_2 f + b_3 z}; \\ z_t &= f \frac{c_1 x + c_2 f + c_3 z}{b_1 x + b_2 f + b_3 z}; \\ p_t &= x_{n_t} - x_{n_t}'; \\ B_t &= B \left(\cos \psi - \frac{x_{n_t}}{f} \sin \psi \right), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где a, b, c — направляющие косинусы.

$\psi = 90^\circ - (\alpha_n + \varphi_n)$ — угол поворота оси X пространственной фотограмметрической системы координат относительно базиса.

Направляющие косинусы определяются по равенствам [2]:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos \alpha \cos \kappa - \sin \alpha \sin \omega \sin \kappa; \\ a_2 &= \sin \alpha \cos \omega; \\ a_3 &= -\cos \alpha \sin \kappa - \sin \alpha \sin \omega \cos \kappa; \\ b_1 &= -\sin \alpha \cos \kappa - \cos \alpha \sin \omega \sin \kappa; \\ b_2 &= \cos \alpha \cos \omega; \\ b_3 &= \sin \alpha \sin \kappa - \cos \alpha \sin \omega \cos \kappa; \\ c_1 &= \cos \omega \sin \kappa; \\ c_2 &= \sin \omega; \\ c_3 &= \cos \omega \cos \kappa, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где углы α , ω , κ измеряются относительно принятой системы пространственных фотограмметрических координат.

Во всех приведенных ниже формулах соблюдается условие $\omega_{\perp} = \omega_{\parallel} = 0$ и $\kappa_{\perp} = \kappa_{\parallel} = 0$.

а. Формулы для вычисления пространственных фотограмметрических координат точек объекта при направлении оси Y фотограмметрической системы координат параллельно оси X_r геодезической системы координат

При $\alpha_{\perp} \neq \alpha_{\parallel} \neq 0$ получим выражения для конвергентной съемки Трансформированные значения базиса и координат точек снимка в этом случае будут вычисляться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_{\perp t} &= f \frac{f \sin \alpha_{\perp} + x_{\perp} \cos \alpha_{\perp}}{f \cos \alpha_{\perp} - x_{\perp} \sin \alpha_{\perp}}; \\ x_{\parallel t} &= f \frac{f \sin \alpha_{\parallel} + x_{\parallel} \cos \alpha_{\parallel}}{f \cos \alpha_{\parallel} - x_{\parallel} \sin \alpha_{\parallel}}; \\ z_{\perp t} &= f \frac{z_{\perp}}{f \cos \alpha_{\perp} - x_{\perp} \sin \alpha_{\perp}}; \\ B_t &= B \left[\sin (\alpha_{\perp} + \varphi_{\perp}) - \frac{x_{\perp t}}{f} \cos (\alpha_{\perp} + \varphi_{\perp}) \right] = \\ &= B \frac{f \sin (\varphi_{\perp} + \gamma) - x_{\perp} \cos (\varphi_{\perp} + \gamma)}{f \cos \alpha_{\perp} - x_{\perp} \sin \alpha_{\perp}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Поставив найденные значения $x_{\perp t}$, $x_{\parallel t}$, $z_{\perp t}$, B_t в (1), после некоторых преобразований будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{[f \sin (\varphi_{\perp} + \gamma) - x_{\perp} \cos (\varphi_{\perp} + \gamma)] (f \cos \alpha_{\perp} - x_{\perp} \sin \alpha_{\perp})}{(f^2 + x_{\perp} x_{\parallel}) \sin \gamma + fp \cos \gamma}; \\ X &= B \frac{[f \sin (\varphi_{\perp} + \gamma) - x_{\perp} \cos (\varphi_{\perp} + \gamma)] (f \sin \alpha_{\perp} + x_{\perp} \cos \alpha_{\perp})}{(f^2 + x_{\perp} x_{\parallel}) \sin \gamma + fp \cos \gamma}; \\ Z &= B \frac{[f \sin (\varphi_{\perp} + \gamma) - x_{\perp} \cos (\varphi_{\perp} + \gamma)] z_{\perp}}{(f^2 + x_{\perp} x_{\parallel}) \sin \gamma + fp \cos \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При $\alpha_n = \alpha_n = \alpha$ получим уравнения для равномерно-отклоненного случая съемки:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{(f \sin \varphi_n - x_n \cos \varphi_n)(f \cos \alpha - x_n \sin \alpha)}{fp}; \\ X &= B \frac{(f \sin \varphi_n - x_n \cos \varphi_n)(f \sin \alpha + x_n \cos \alpha)}{fp}; \\ Z &= B \frac{(f \sin \varphi_n - x_n \cos \varphi_n) z_n}{fp}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для нормального случая съемки следует положить $\varphi_n = 90^\circ$, тогда формулы запишутся:

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{B}{p} (f \cos \alpha - x_n \sin \alpha) = B \frac{f}{p} \left(\cos \alpha - \frac{x_n}{f} \sin \alpha \right); \\ X &= \frac{B}{p} (f \sin \alpha + x_n \cos \alpha) = B \frac{x_n}{p} \left(\cos \alpha + \frac{x_n}{f} \sin \alpha \right); \\ Z &= B \frac{z_n}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Полученные выражения идентичны формулам, приведенным А. Н. Лобановым в [2], что показывает правильность записи этих выражений в обобщенном виде (1, 2).

Для совмещенного случая съемки, когда оптические оси фотокамер совмещены с линией базиса, а, следовательно, и между собой, $\varphi_n = 0$, $\gamma = 0$, будем иметь равенств:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{-x_n (f \cos \alpha - x_n \sin \alpha)}{fp}; \\ X &= B \frac{-x_n (f \sin \alpha + x_n \cos \alpha)}{fp}; \\ Z &= B \frac{-x_n z_n}{fp} = B \cdot \frac{-x_n z_n}{fp}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Переход от фотограмметрической системы координат к геодезической производится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Y_r &= Y_{rs} + X; \\ X_r &= X_{rs} + Y; \\ Z_r &= Z_{rs} + Z + (k+r)*, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где Y_{rs} , X_{rs} , Z_{rs} — координаты левого центра проекций в геодезической системе.

Приведенные выражения удобно использовать, когда необходимо пространственные координаты объекта вычислять в геодезической системе, поскольку в этом случае перевычисление координат из фотограмметрической системы в геодезическую производится наиболее просто.

* Поправку $(k+r)$ при съемке с близких расстояний можно опустить. В дальнейшем в формулах она не приводится.

б. Формулы для вычисления пространственных фотограмметрических координат при направлении оси Y фотограмметрической системы, перпендикулярно к базису фотографирования

При $\alpha_n \neq \alpha_n \neq 0$ выражения для трансформированных значений базиса и координат точек снимков будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{n_t} &= f \frac{f \sin \alpha_n + x_n \cos \alpha_n}{f \cos \alpha_n - x_n \sin \alpha_n}; \\ x_{n_t} &= f \frac{f \sin \alpha_n + x_n \cos \alpha_n}{f \cos \alpha_n - x_n \sin \alpha_n}; \\ z_{n_t} &= f \frac{z_n}{f \cos \alpha_n - x_n \sin \alpha_n}; \\ B_t &= B. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив найденные значения в (1), после преобразований найдем формулы для конвергентной съемки с горизонтальными осями:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{[f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)](f \cos \alpha_n - x_n \sin \alpha_n)}{(f^2 + x_n x_n) \sin \gamma + fp \cos \gamma}; \\ X &= B \frac{[f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)](f \sin \alpha_n + x_n \cos \alpha_n)}{(f^2 + x_n x_n) \sin \gamma + fp \cos \gamma}; \\ Z &= B \frac{[f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)] z_n}{(f^2 + x_n x_n) \sin \gamma + fp \cos \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Формулы (12) получились идентичными формулами (6) для направления оси Y параллельной оси X_n . Разница будет только в начале отсчета для угла α_n . Таким образом, все уравнения для данного выбора направления оси Y могут быть получены из формул предыдущего случая.

Выражения для равномерно отклоненного случая будут также аналогичны соответствующим предыдущим формулам (7).

Для нормального случая съемки равенства будут иметь вид: ($\alpha_n = \alpha_n = 0$, $\varphi_n = 90^\circ$)

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{f}{p}; \\ X &= B \frac{x_n}{p}; \\ Z &= B \frac{z_n}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для совмещенного случая ($\varphi_n = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha_n = 90^\circ$):

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{x_n x_n}{fp}; \\ X &= B \frac{-x_n}{p}; \\ Z &= B \frac{-x_n z_n}{fp}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Переход от фотограмметрической системы координат к геодезической выполняется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Y_r &= Y_{rs} + Y \sin A_0 + X \cos A_0; \\ X_r &= X_{rs} + Y \cos A_0 - X \sin A_0; \\ Z_r &= Z_{rs} + Z, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где A_0 — дирекционный угол оси Y фотограмметрической системы координат. Здесь это дирекционный угол проектирующего луча, перпендикулярного к базису.

Полученные выражения (11—14) удобно использовать, когда пространственные координаты объекта необходимо получить в базисной системе координат; в этом случае за ось X принимается направление линии базиса.

в. Формулы для вычисления пространственных фотограмметрических координат при направлении оси Y фотограмметрической системы вдоль горизонтального проложения оптической оси левой фотостанции

При $\alpha_n = 0$, $\alpha_n \neq 0$ формулы для трансформированных значений базиса и координат точек снимков будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{n_t} &= x_n; \\ x_{n_r} &= f \frac{f \sin \alpha_n + x_n \cos \alpha_n}{f \cos \alpha_n - x_n \sin \alpha_n}; \\ z_{n_t} &= z_n; \\ B_t &= B \left(\cos \psi - \frac{x_{n_t}}{f} \sin \psi \right) = B \left(\sin \varphi_n - \frac{x_{n_t}}{f} \cos \varphi_n \right) = \\ &= B \frac{f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)}{f \cos \alpha_n - x_n \sin \alpha_n}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Подставляя найденные значения в (1), получаем равенства для конвергентного случая съемки с горизонтальными осями:

$$\left. \begin{aligned} Y &= Bf \frac{f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)}{(f^2 + x_n x_n) \sin \gamma + fp \cos \gamma}; \\ X &= Bx_n \frac{f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)}{(f^2 + x_n x_n) \sin \gamma + fp \cos \gamma}; \\ Z &= Bz_n \frac{f \sin (\varphi_n + \gamma) - x_n \cos (\varphi_n + \gamma)}{(f^2 + x_n x_n) \sin \gamma + fp \cos \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для равномерно отклоненного случая съемки

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{f}{p} \left(\sin \varphi_n - \frac{x_n}{f} \cos \varphi_n \right); \\ X &= B \frac{x_n}{p} \left(\sin \varphi_n - \frac{x_n}{f} \cos \varphi_n \right); \\ Z &= B \frac{z_n}{p} \left(\sin \varphi_n - \frac{x_n}{f} \cos \varphi_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Формулы (17), (18) получились идентичными соответствующим формулам [2].

Поскольку в данном случае $\varphi_n = 90^\circ - \psi = 90^\circ - \alpha_n'$ (рис., в), то выражения (17), (18) могут быть представлены и в другой записи:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{f}{p} \left(\cos \alpha_n' - \frac{x_n}{f} \sin \alpha_n' \right) = B \frac{f}{p} \left(\cos \psi - \frac{x_n}{f} \sin \psi \right); \\ X &= B \frac{x_n}{p} \left(\cos \alpha_n' - \frac{x_n}{f} \sin \alpha_n' \right) = B \frac{x_n}{p} \left(\cos \psi - \frac{x_n}{f} \sin \psi \right); \\ Z &= B \frac{z_n}{p} \left(\cos \alpha_n' - \frac{x_n}{f} \sin \alpha_n' \right) = B \frac{z_n}{p} \left(\cos \psi - \frac{x_n}{f} \sin \psi \right), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где α_n' — угол скоса, ψ — угол поворота базиса относительно оси X фотограмметрической системы координат.

При нормальном случае съемки очевидно будем иметь формулы (14).

Для совмещенного случая съемки ($\varphi_n = 0$, $\gamma = 0$, $\psi = 90^\circ$) найдем:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{-x_n}{p}; \\ X &= B \frac{-x_n x_n}{fp}; \\ Z &= B \frac{-x_n z_n}{fp} = B \frac{-x_n z_n}{fp}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Формулы (20) можно представить к виду, удобному для запоминания:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{f}{p} \left(\frac{-x_n}{f} \right) = B \frac{f}{p} k; \\ X &= B \frac{x_n}{p} \left(\frac{-x_n}{f} \right) = B \frac{x_n}{p} k; \\ Z &= B \frac{z_n}{p} \left(\frac{-x_n}{f} \right) = B \frac{z_n}{p} k, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\text{где } k = \frac{-x_n}{f}.$$

Для измерений снимки целесообразно привести к одному масштабу, что идентично съемке фотокамерами с разными фокусными расстояниями.

В случае, когда $f_n \neq f_n$, равенства (20) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} Y &= B \frac{-f_n x_n}{x_n f_n - x_n f_n} = B \frac{f_n}{p'}; \\ X &= B \frac{-x_n x_n}{x_n f_n - x_n f_n} = B \frac{x_n}{p'}; \\ Z &= B \frac{-z_n x_n}{x_n f_n - x_n f_n} = B \frac{z_n}{p'}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$p' = \frac{x_n f_n - x_n f_n}{-x_n}.$$

Формулы для съемки с наклоненными осями и для общего случая съемки нами приведены в [3]. Следует заметить, что в уравнениях для вычисления координаты Z при общем случае съемки в книге Н. А. Блохина [1] в числителе пропущен сомножитель $(f \sin \omega_a + z_1 \cos \omega_a)$.

Переход от фотограмметрической системы координат к геодезической будет выполняться по формулам (15), где дирекционный угол A_0 следует отнести к оптической оси левой фотостанции.

Выражениями (16—22) удобно пользоваться, когда съемка производится при одном положении оптической оси левой фотостанции и когда пространственная система координат может быть произвольной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохин Н. А. Стерефотограмметрическая наземная съемка. М., ОНТИ, 1937.
2. Лобанов А. Н. Фототопография. Наземная стерефотограмметрическая съемка. М., «Недра», 1968.
3. Сердюков В. М. Фотограмметрия в инженерно-строительном деле. М., «Недра», 1970.

Работа поступила в редколлегию 19 февраля 1972 года.
Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Киевского инженерно-строительного института.