УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ, Ю. Н. КОРНИЦКИЙ

ПРОДОЛЬНЫЙ И ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГИ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Точность положения пунктов линейно-угловой триангуляции обычно характеризуется величинами продольных и поперечных сдвигов. Поэтому в данной работе приведен вывод формул для подсчета обратных весов функций длины и направления диагонали ряда, состоящего из центральных систем или из двух рядов равносторонних треугольников и уравненного за условия фигур, сторон, горизонта и дирекционных углов.

Если такой ряд проложен между сторонами с исходными дирекционными углами (рисунок), то при уравнивании его по методу условных измерений возникает $4N+2$ условных уравнений фигур, $8N+4$ — синусных условных уравнений двух видов, N — условных уравнений горизонта и условное уравнение дирекционных углов (N — число центральных систем в ряду).

Виды условных уравнений фигур, сторон и горизонта приведены в работах [2, 3], а условное уравнение дирекционных углов будет

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1)(-1)^{i}+w_{\alpha}=0. \tag{1}$$

Весовые функции продольного и поперечного сдвига k-го пункта ряда запишем следующим образом:

$$dF_{t_k}=\frac{S}{2}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)+\frac{S\sqrt{3}}{2}\left[(2)+(8)+(14)+\cdots+(3k-1)\right],$$

$$k=1,3,5,\ldots;$$

$$dF_{u_k}=\frac{S\sqrt{3}}{2}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)(-1)^{i}+$$

$$+\frac{S}{2}\left[k(2)-(k-1)(5)+(k-2)(8)-\cdots\right], \tag{2}$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; $(3i-1)$, (b_i) — вероятнейшие поправки к углам и сторонам; n — число треугольников в верхнем ряду; w — свободные члены условных уравнений; S — длина стороны треугольника.

При решении нормальных уравнений погрешности угловых измерений в радианах и относительные линейные считались равноточными.

Для решения нормальных уравнений применяем двухгрупповой метод. В первую группу относим условные уравнения фигур,

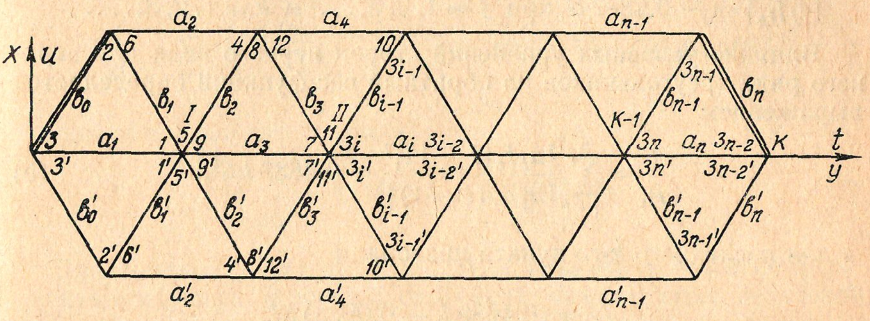

Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразование коэффициентов второй группы производим так, как показано в работе [2]. Преобразованные коэффициенты второй группы условных уравнений сторон обозначим через a_i, b_i, уравнений горизонта — через c_j $(j=1, 2, 3, \ldots, N)$, уравнения дирекционных углов — через d, а коэффициенты весовых функций — через f_t, f_u.

Для определения веса уравненных величин используем формулу обратного веса

$$\frac{1}{P_f}=[ff]-\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+\frac{1}{P_4}+\frac{1}{P_5}+\frac{1}{P_6}\right), \qquad (3)$$

где $[ff]$ — квадратичный коэффициент соответствующей функции; $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{P_2}$, $\frac{1}{P_3}$ и т. д. — значения обратных весов, вносимых условными уравнениями второй группы в обратные веса функций.

Из решения нормальных уравнений были найдены квадратичные коэффициенты эквивалентной системы для условных уравнений сторон и горизонта [2]. Квадратичный коэффициент условного уравнения дирекционных углов определится из выражения $[dd(4n+N)]=0{,}2837N+0{,}5688$.

Продольный сдвиг. Квадратичный коэффициент для весовой функции длины диагонали имеет значение

$$[f_{t_k} f_{t_k}]=kS^2. \qquad (4)$$

Условные уравнения второй группы с весовой функцией продольного сдвига дают следующие коэффициенты нормальных уравнений:

$[a_i f_t] = 0{,}5\,S$ для четных i при $1 \leqslant i \leqslant k$;

$[a_i f_t] = S$ для нечетных i;

$[b_i f_t] = 0{,}5\,S$ для $i = 2, 4, 6,\ldots$ и соответственно $k = 1, 2, 3,\ldots$

$[d f_{t_k}] = -0{,}5775\,kS$; $[c_j f_{t_k}] = -0{,}5775\,S$ при $1 < j < k$.

$[c_j f_{t_k}] = -0{,}2887\,S$ при $j = 1, 2, 3,\ldots$ и $k = 1, 2, 3,\ldots$.

Влияние условных уравнений сторон первого вида для верхнего ряда треугольников на обратный вес функции определяется выражением

$$\frac{1}{P_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i f_t (i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]} = 0{,}4688\,kS^2, \tag{5}$$

а для последнего k-го пункта диагонали

$$\frac{1}{P_1} = (0{,}4688\,k - 0{,}0938)\,S^2.$$

Учитывая (для нечетных i), что $[a_i' f_t (n+i-1)] = -0{,}375S$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, получаем суммарное влияние первого вида синусных уравнений для нижнего ряда треугольников на обратный вес функции продольного сдвига

$$\frac{1}{P_2} = \sum_{i}^{n} \frac{[a_i' f_t (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0{,}0614\,kS^2. \tag{6}$$

Неквадратичные коэффициенты условных уравнений сторон второго вида для верхнего ряда треугольников и весовой функции представим следующими выражениями:

$$[b_1 f_{t_k} 2n] = -0{,}3943\,S;\ [b_2 f_1 (2n+1)] = 0{,}1199\,S;\ [b_2 f_{t_k} (2n+1)] = $$
$$= 0{,}0563\,S \text{ для } k \geqslant 2;\ [b_3 f_{t_1} (2n+2)] = 0{,}0359\,S;$$
$$[b_3 f_{t_k} (2n+2)] = -0{,}3775\,S \text{ для } k \geqslant 2.$$

Далее, для четных i при $i = 4, 6, 8, \ldots$ и $k = 1, 2, 3, \ldots$

$[b_i f_{t_k} (2n+i-1)] = 0{,}0125\,S$;

при $i = 4, 6, 8,\ldots$ и $k = 2, 3, 4,\ldots$ $[b_i f_{t_k} (2n+i-1)] = 0{,}1135\,S$;

при $i = 4, 6, 8,\ldots$ и $k \geqslant 3, 4, 5,\ldots$ $[b_i f_{t_k} (2n+i-1)] = 0{,}05\,S$;

для нечетных i

при $i = 5, 7, 9,\ldots$ и $k = 1, 2, 3,\ldots$ $[b_i f_{t_k} (2n+i-1)] = 0{,}0038\,S$;

при $i = 5, 7, 9, \ldots$ и $k \geqslant 3, 4, 5, \ldots$ $[b_i f_{t_k}(2n+i-1)] = -0{,}379\,S$;

при $i = n$ для $k = N$ $[b_n f_{t_k}(3n-1)] = 0{,}034\,S$;

и для $k = N+1$ $[b_n f_{t_k}(3n-1)] = -0{,}5665\,S$.

Остальные коэффициенты данного вида близки к нулю и практически не влияют на обратный вес. Исходя из этого, суммарное влияние этих уравнений после некоторых преобразований запишем в виде

$$\frac{1}{P_3} = \sum_1^n \frac{[b_i f_t (2n+i-1)]^2}{[b_i b_i (2n+i-1)]} = (0{,}1045\,k + 0{,}0094)\,S^2,$$

а для последнего пункта ряда

$$\frac{1}{P_3} = (0{,}1045\,k + 0{,}0804)\,S^2. \qquad (7)$$

Для нижнего ряда треугольников неквадратичные коэффициенты синусных условных уравнений второго вида и весовой функции можно принять:

$[b_1' f_{t_1} \cdot 3n] = 0{,}2848\,S$; $[b_1' f_{t_k} \cdot 3n] = 0{,}298\,S$ при $k \geqslant 2$;

$[b_2' f_{t_1}(3n+1)] = 0{,}0904\,S$; $[b_2' f_{t_k}(3n+1)] = -0{,}115\,S$ при $k \geqslant 2$;

для нечетных i

$[b_i' f_{t_k}(3n+i-1)] = 0{,}033\,S$ при $i = 3, 5, 7, \ldots$ и $k = 1, 2, 3, \ldots$;

$[b_i' f_{t_k}(3n+i-1)] = 0{,}257\,S$ при $i = 3, 5, 7, \ldots$ и $k \geqslant 2, 3, 4, \ldots$;

для четных i

$[b_i' f_{t_k}(3n+i-1)] = 0{,}085\,S$ при $i = 4, 6, 8, \ldots$ и $k = 2, 3, 4, \ldots$;

$[b_i' f_{t_k}(3n+i-1)] = -0{,}1135\,S$ при $i = 4, 6, 8, \ldots$ и $k = 3, 4, 5, \ldots$;

$[b_i' f_{t_k}(3n+i-1)] = -0{,}121\,S$ при $i = 4, 6, 8, \ldots$ и $k \geqslant 4, 5, 6, \ldots$;

и при $i = n$ для $k = N+1$ $[b_n' f_{t_k}(4n-1)] = 0{,}2612\,S$.

Остальные коэффициенты близки к нулю. Выражение для синусных уравнений второго вида и весовой функции после ряда преобразований приводим к виду

$$\frac{1}{P_4} = \sum_1^n \frac{[b_i' f_t (3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i' (3n+i-1)]} = (0{,}0596\,k + 0{,}0033)\,S^2. \qquad (8)$$

Для уравнений горизонта и весовой функции продольного сдвига:

$[c_1 f_{t_1} \cdot 4n] = -0{,}2383\,S$; $[c_1 f_{t_2} \cdot 4n] = -0{,}5154\,S$:

$[c_1 f_{t_k} \cdot 4n] = -0{,}488\, S$ при $k \geqslant 3$; $[c_2 f_{t_1}(4n+1)] = -0{,}0107\, S$

$[c_2 f_{t_2}(4n+1)] = -0{,}3445\, S$; $[c_2 f_{t_3}(4n+1)] = -0{,}6221\, S$;

$[c_2 f_{t_k}(4n+1)] = -0{,}594\, S$ при $k \geqslant 4$.

Далее:

$[c_j f_{t_k}(4n+j-1)] = -0{,}367\, S$ при $j = 3, 4, 5, \ldots$ и $k = 3, 4, 5, \ldots$;

$[c_j f_{t_k}(4n+j-1)] = -0{,}65\, S$ при $j = 3, 4, 5, \ldots$ и $k = 4, 5, 6, \ldots$;

$[c_j f_{t_k}(4n+j-1)] = -0{,}619\, S$ при $j > 3$ и $k > 5$,

а при $j = N$ и $k = N+1$ $[c_N f_{t_k}(4n+N-1)] = -0{,}5892\, S$.

Остальные коэффициенты этого вида практически не влияют на обратный вес. Следовательно, суммарное влияние уравнений горизонта будет

$$\frac{1}{P_5} = \sum_1^j \frac{[c_j f_t (4n+j-1)]^2}{[c_j c_j (4n+j-1)]} = (0{,}1237\, k - 0{,}1047)\, S^2 \qquad (9)$$

и для последнего k-го пункта

$$\frac{1}{P_5} = (0{,}1267\, k - 0{,}2019)\, S^2.$$

Влияние уравнения дирекционных углов на вес функции определяется выражением

$$\frac{1}{P_6} = \frac{[d f_t (4n+N)]^2}{[dd (4n+N)]} = \frac{0{,}043}{0{,}5\, N + 1} S^2,$$

и для $k = N+1$

$$\frac{1}{P_6} = \frac{0{,}171}{0{,}5\, N + 1} S^2, \qquad (10)$$

так как

$$[d f_{t_k}(4n+N)]\Big|_{k \geqslant 1}^{k-1} = -0{,}156\, S,$$

а для $k = N+1$

$$[d f_{t_k}(4n+N)] = -0{,}306\, S.$$

Зная величины формул (4)—(10), получаем формулы для подсчета обратного веса функции длины диагонали

$$\frac{1}{P_{f_t}} = \left(0{,}182\, k + 0{,}092 - \frac{0{,}043}{0{,}5\, N + 1}\right) S^2,$$

и для последнего пункта

$$\frac{1}{P_{f_t}} = \left(0{,}179\, k + 0{,}212 - \frac{0{,}165}{0{,}5\, N + 1}\right) S^2. \qquad (11)$$

Поперечный сдвиг. На основании таблицы преобразованных коэффициентов были вычислены соответствующие им коэффициенты нормальных уравнений:

$$[a_i f_{u_k}] = (-1)^{i+1}[0{,}2887\,(2k-1-i)+1{,}1547]\,S \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant 2k-1$$

$$[a_i f_{u_k}] = [b_i f_{u_k}] = -0{,}866\,S \text{ при } i = 2k;$$

$$[b_i f_{u_k}] = (-1)^{i+1} \cdot 1{,}732\,S \text{ при } 1 \leqslant i < 2k;$$

$$[c_j f_{u_k}] = -\frac{1}{6}S \text{ при } k = j;$$

$$[c_j f_{u_k}] = -\frac{4}{3}(k-j)\,S \text{ при } k > j; \ [df_{u_k}] = -\frac{1}{3}k\,(2k-1)\,S.$$

Квадратичный коэффициент для весовой функции направления диагонали будет

$$[f_{u_k} f_{u_k}] = \left[1{,}5\,k + \frac{1}{18}k\,(2k-1)(4k-1)\right]S^2. \qquad (12)$$

Величина, вносимая условными уравнениями сторон первого вида в обратный вес функции определится выражениями:

$$\frac{1}{P_1} = (0{,}0833\,k^3 + 0{,}3125\,k^2 + 0{,}3855\,k)\,S^2;$$

для $k = N + 1$

$$\frac{1}{P_1} = (0{,}0833\,k^3 + 0{,}3125\,k^2 + 0{,}3855\,k - 0{,}2813)\,S^2, \qquad (13)$$

и так как для нечетных i

$$[a_i' f_{u_k}(n+i-1)] = -[0{,}1083(2k-1-i)+0{,}433)S \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant 2k-1,$$

$$\frac{1}{P_2} = (0{,}0068\,k^3 + 0{,}0307\,k^2 + 0{,}0444)\,S^2.$$

Выражения для определения неквадратичных коэффициентов уравнений сторон второго вида, уравнений горизонта и весовой функции очень громоздки, поэтому приведем только значения обратных весов, вносимых данными уравнениями в обратные веса функций.

Для синусных условных уравнений второго вида и весовой функции:

$$\frac{1}{P_3} = (0{,}9342\,k - 0{,}4714\,k^2 + 0{,}0797\,k^3 - 0\,1573)\,S^2;$$

для последнего k-го пункта

$$\frac{1}{P_3} = (0{,}0797\,k^3 - 0{,}4714\,k^2 + 9342\,k + 0{,}0327)\,S^2; \qquad (14)$$

$$\frac{1}{P_4} = (0{,}0138\,k^3 - 0{,}0145\,k^2 + 0{,}0377\,k - 0{,}0237)\,S^2;$$

для $k = N + 1$

$$\frac{1}{P_4} = (0{,}0138\,k^3 - 0{,}0145\,k^2 + 0{,}0377\,k - 0{,}031)\,S^2. \qquad (15)$$

Суммарное влияние уравнений горизонта на обратный вес будет

$$\frac{1}{P_5} = (0{,}1648\,k^3 - 0{,}3262\,k^2 + 0{,}1312\,k + 0{,}0543)\,S^2.$$

а для последнего пункта ряда

$$\frac{1}{P_5} = (0{,}1648\,k^3 - 0{,}3262\,k^2 + 0{,}1312\,k + 0{,}08)\,S^2. \qquad (16)$$

Влияние уравнения дирекционного угла на обратный вес определяется выражениями:

$$\frac{1}{P_6} = \frac{(0{,}1908\,k^2 + 0{,}1819\,k - 0{,}052)^2}{0{,}5\,N + 1}\,S^2,$$

для $k = N + 1$

$$\frac{1}{P_6} = \frac{(0{,}1908\,k^2 + 0{,}1819\,k)^2}{0{,}5\,N + 1}\,S^2. \qquad (17)$$

так как

$$[df_{u_k}(4n + N)] = -(0{,}1439\,k^2 + 0{,}1372\,k - 0{,}0392)\,S$$

и для $k = N + 1$

$$[df_{u_k}(4n + N)] = -(0{,}1439\,k^2 + 0{,}1372\,k)\,S.$$

Зная все значения для определения обратного веса функции поперечного сдвига ряда, после простых вычислений имеем

$$\frac{1}{P_{f_u}} = \left[0{,}096\,k^3 + 0{,}1356\,k^2 + 0{,}0226\,k + 0{,}1267 - \right.$$
$$\left. - \frac{(0{,}1908\,k^2 + 0{,}1819\,k - 0{,}052)^2}{0{,}5\,N + 1}\right] S^2;$$

для последнего пункта ряда

$$\frac{1}{P_{f_u}} = \left[0{,}096\,k^3 + 0{,}1356\,k^2 + 0{,}0226\,k + 0{,}1996 - \right.$$
$$\left. - \frac{(0{,}1908\,k^2 + 0{,}1819\,k)^2}{0{,}5\,N + 1}\right] S^2. \qquad (18)$$

Таблица 1

Значения обратных весов функций продольного сдвига

k	N	1	2	3	4	5	6
1	По схеме Гаусса По формуле (11) Погрешность, %	0,252 0,245 2,8	0,256 0,252 1,6	0,260 0,257 1,2	0,262 0,260 0,8	0,264 0,262 0,8	0,265 0,263 0,8
2	По схеме Гаусса По формуле (11) Погрешность, %	0,467 0,460 1,5	0,454 0,434 4,4	0,457 0,439 3,9	0,459 0,442 3,7	0,461 0,444 3,7	0,463 0,445 3,9
3	По схеме Гаусса По формуле (11) Погрешность, %		0,674 0,667 1,0	0,636 0,621 2,4	0,637 0,624 2,0	0,638 0,626 2,0	0,640 0,627 2,0
4	По схеме Гаусса *По формуле (11)* Погрешность, %			0,869 0,862 0,8	0,815 0,806 1,1	0,815 0,808 0,9	0,816 0,809 0,9
5	По схеме Гаусса По формуле (11) Погрешность, %				1,056 1,052 0,4	0,994 0,990 0,4	0,992 0,991 0,1
6	По схеме Гаусса По формуле (11) Погрешность, %					1,241 1,239 0,2	1,172 1,173 0,1
7	По схеме Гаусса По формуле (11) Погрешность, %						1,424 1,424 0

С целью проверки полученных формул для вычисления обратных весов функций продольного и поперечного сдвига были решены численные примеры по схеме Гаусса для различного числа центральных систем в ряду. Результаты вычислений приведены в табл. 1, 2. Как видно из приведенных вычислений, погрешности в определении обратных весов по формулам (11) и (18) невелики, и этими формулами можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида.

Рассмотрим влияние погрешностей исходных дирекционных углов на точность различных элементов данного ряда. Полную среднюю квадратическую ошибку M функции можно представить [1] в виде

$$M_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial T_{\text{н}}}\right)^2 m_{T_{\text{н}}} + \left(\frac{\partial F}{\partial T_{\text{к}}}\right)^2 m_{T_{\text{к}}} + \mu^2 \frac{1}{P_f},$$

Таблица 2

Значения обратных весов функций поперечного сдвига

k	N	1	2	3	4	5	6
1	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %	0,316 0,312 1,3	0,329 0,330 0,3	0,340 0,340 0	0,347 0,347 0	0,352 0,352 0	0,355 0,355 0
2	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %	0,708 0,708 0	0,900 0,904 0,4	1,021 1,020 0,1	1,099 1,097 0,2	1,154 1,152 0,2	1,195 1,193 0,2
3	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %		1,487 1,519 2,2	2,048 2,052 0,2	2,382 2,378 0,2	2,615 2,610 0,2	2,789 2,785 0,1
4	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %			2,868 2,887 0,7	3,910 3,897 0,3	4,580 4,559 0,5	5,073 5,056 0,3
5	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %				4,968 4,950 0,4	6.627 6,582 0,7	7,763 7,712 0,7
6	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %					7,923 7,849 0,9	10,344 10,245 1,0
7	По схеме Гаусса По формуле (18) Погрешность, %						11,880 11,721 1,3

где $m_{T_н}$ и $m_{T_к}$ — средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов; μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса;

$$\frac{\partial F}{\partial T_н} = f_{T_п} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_н} Q_1; \quad \frac{\partial F}{\partial T_к} = f_{T_к} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_к} Q_1.$$

Здесь $f_{T_н}$ и $f_{T_к}$ — частные производные от функции по исходным дирекционным углам; $\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_н}$, $\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_к}$ — частные производные от свободных членов по исходным данным; Q_1 — переходный коэффициент, определяемый для нашего случая по формуле

$$Q_{1_t} = \frac{[df_t(4n + N)]}{[dd(4n + N)]} = -\frac{0,274}{0,5N + 1} S.$$

Частные производные от свободного члена условия дирекционных углов не зависят от вида весовой функции и соответственно будут:

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_{\text{н}}} = +1; \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_{\text{к}}} = -1.$$

Частные производные от функций по исходным данным $f_{T_{\text{н}}}$ и $f_{T_{\text{к}}}$ равны нулю. Следовательно, для длины диагонали получим

$$M_{F_t} = S\sqrt{\frac{0{,}075}{(0{,}5N+1)^2}(m_{T_{\text{н}}}^2 + m_{T_{\text{к}}}^2) + \left(0{,}182\,k + 0{,}092 - \frac{0{,}043}{0{,}5\,N+1}\right)\mu^2}.$$

Для поперечного сдвига

$$Q_{1_u} = \frac{[df_u(4n+N)]}{[dd(4n+N)]} = -\frac{(0{,}253\,k^2 + 0{,}241\,k - 0{,}069)}{0{,}5\,N+1}S.$$

Исходя из этого,

$$M_{F_u} = \sqrt{Q_{1_u}^2(m_{T_{\text{н}}}^2 + m_{T_{\text{к}}}^2) + \frac{1}{P_{f_u}}\mu^2}.$$

Список литературы: 1. *Корницкий Ю. Н.* О точности дирекционного угла в середине линейно-углового ряда из геодезических квадратов, проложенного между сторонами с исходными дирекционными углами. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 2. *Лозинский В. В.* Ошибка дирекционного угла связующих сторон рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 3. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24.

Работа поступила в редколлегию 5 марта 1979 года. Рекомендована кафедрой геоморфологии Львовского госуниверситета.