

Таблица 1
Значения коэффициентов и оценка точности прогнозных моделей зависимости x от N для наблюдаемых марок

Марки	Δ φ	Δ β	Δ γ	Δ λ	Δ μ	Δ x_0	Δ σ	Δ σ_{\max} мм	$2m$, мм
1	0,7907	-0,0180	0,3459	1,0612	-0,4213	6,9908	-0,71	1,12	
3	0,4904	-0,1446	0,5551	0,3782	-0,3963	29,2498	-0,57	1,54	
5	0,4747	0,0558	1,3787	0,4242	-0,3010	4,9410	1,69	3,14	
6	0,6116	0,1372	0,8962	0,6109	-0,3596	1,4502	0,33	2,44	
7	0,5307	0,0902	—	—	—	0,7064	0,85	2,38	
8	0,5638	0,0789	1,0065	0,2046	0,0264	-19,6686	0,43	2,16	

Таблица 2
Значения коэффициентов и оценка точности прогнозных моделей зависимости h от N для наблюдаемых марок

Марки	Δ φ	Δ β	Δ γ	Δ λ	Δ μ	Δ ρ_1	Δ x_0	Δ σ	Δ σ_{\max} мм	$2m$, мм
1	0,8117	0,0409	0,2387	0,5105	-0,2199	—	1,6701	-0,60	0,64	
2	0,8117	0,0409	0,2387	0,5105	-0,2199	0,6409	3,0374	-0,54	0,64	
3	0,9110	0,0252	0,2289	—	—	—	1,2577	0,32	0,54	
4	0,9110	0,0252	0,2289	—	—	0,6409	0,0117	0,74	0,54	
5	0,3221	0,0600	0,2834	0,9157	-0,3622	—	2,2522	1,18	0,92	
6	0,7806	0,0390	0,2235	0,6852	-0,3267	—	2,9569	0,85	0,70	
7	0,2498	0,0786	0,6492	0,2267	-0,0452	—	58,3040	0,66	1,70	
8	0,8005	0,0539	0,2612	0,4703	-0,3585	—	5,4852	0,38	0,88	
b ₁	0,8864	0,0487	0,2756	0,4999	-0,0499	—	0,9513	-0,59	1,18	
c ₀	0,9266	0,0088	0,4771	0,9222	-0,2935	—	5,4106	-0,32	1,74	
c ₁₀	0,8781	0,0563	0,3624	0,9227	-0,3996	—	2,2866	0,79	1,62	
c ₁₁	0,9353	0,0233	0,2608	0,8230	-0,3696	—	3,5831	-0,25	0,89	
c ₁₂	0,9416	0,0364	0,2533	0,9792	-0,4650	—	1,9137	0,48	1,02	

В прогнозных моделях зависимости h от N для марок 3 и 4 закономерность изменения процесса шумовой компоненты σ_k выражается уравнением (6), в остальных случаях — уравнением (7), за исключением прогнозной модели зависимости x от N для марки 7, шумовая компонента которой представляет белый шум. Качество полученных прогнозных моделей оценено путем контрольного прогнозирования на 1986 г. по трем циклам наблюдений. Рассчитанные по прогнозным моделям значения x_k и h_k сопоставлены с измеренными значениями. Результаты оценки качества прогнозных моделей представлены в двух последних графах табл. 1 и 2. В предпоследней графе приведены максимальные разности Δ_{\max} наблюдаемых и расчетных значений x_k и h_k , а в последней — удвоенная средняя квадратическая ошибка m прогнозной модели, найденная по результатам наблюдений 1985 г. Величины, приведенные в последней графе табл. 1 и 2, говорят о том, что зависимости h от N лучше описываются уравнением (1), чем зависимости x от N . Результаты контроля прогнозировании показывают, что в случае зависимости x от N максимальные ошибки прогноза для марок 3, 6, 7 и 8 не превышают

значений m , а для марок 1 и 5 не выходят за пределы $2m$; в случае зависимости h от N максимальные ошибки прогноза для марок 7, 8, б, с₀, c₁₀ и c₁₂ не превышают значений m , за пределы $2m$ не выходят ошибки для марок 1, 2, 3 и за пределы $3m$ — для марок 4, 5 и 6.

Таким образом, результаты оценки качества полученных нами прогнозных моделей указывают на надежность этих моделей, что дает основание использовать их как для предвычисления ожидаемых горизонтальных поперечных смещений и осадок марок, заложивших в теле водохранилище, в зависимости от изменения уровня воды в водохранилище, так и для определения критериев нормальной работы плотины при данном ее состоянии.

1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. М., 1984. 2. *Брайт П. И.* Геодезические методы измерения деформаций оснований и сооружений. М., 1965. 3. *Гуляев Ю. П.* Прогнозирование деформаций инженерных сооружений по геодезическим данным на основании теории динамических систем // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотогеодезия. 1981. № 5. С. 64—69. 4. *Гуляев Ю. П.* Алгоритм оценивания параметров динамической модели и прогнозирования процесса перемещений наблюдаемых точек сооружений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотогеодезия. 1984. № 3. С. 26—32. 5. Методические рекомендации по составлению проекта размещения контрольно-измерительной аппаратуры в бетонных гидротехнических сооружениях (П14—70). Л., 1972. 6. *Ланкрюшин В. К.* Моделирование и исследование точности систем геодезических наблюдений современных движений земной коры // Современные движения земной коры. Тарту, 1973. № 5. С. 364—370.

Статья поступила в редакцию 14.04.86

УДК 528.35
В. Е. ДЕМЕНТЬЕВ

ОЦЕНКА ОШИБОК, ВЫЗЫВАЕМЫХ ДИСКРЕТНОСТЬЮ ИЗМЕРЕНИЙ

В последние годы в геодезических работах все чаще начинают применяться автоматические приборы.

С помощью этих приборов измерения выполняются, как правило, в дискретные моменты времени. Если наблюдаемая величина цель движется, а траектория движения изменяется нелинейно, то кроме погрешностей измерений имеют место и погрешности, вызванные дискретностью воспроизведения закона изменения траектории. Назовем их погрешностями за дискретность измерений. Эти погрешности зависят от частоты измерений, скорости и закона движения объекта. В свою очередь, частота измерений обусловлена частотой сканирования, быстродействием фотоприемных устройств, инерционностью механических узлов приборов и т. д. Из-за дискретности измерений возникают погрешности аппроксимации функции, характеризующей траекторию движения наблюдаемого объекта.

В качестве примера представим на графике движение объекта, высота которого изменяется относительно поверхности земли по экспоненциальному закону, а затем по прямой:

$$H(t) = \begin{cases} H_0 \exp(-\beta t) & 0 \leq t < t_1 \\ 0,3(t_2 - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases} \quad (1)$$

где $\beta = 1/5 \text{ с}^{-1}$; $t_1 = 15 \text{ с}$; $t_2 = 20 \text{ с}$; $H_0 = 30 \text{ м}$.

Если измерять положение объекта каждые 5 с, т. е. с частотой 0,2 Гц, а в интервалах между измерениями значения $H(t)$ получать путем линейного интерполирования, то вычисленные значения $H(t)$ имеют ошибки порядка 2 м (рис. 1), что не всегда может

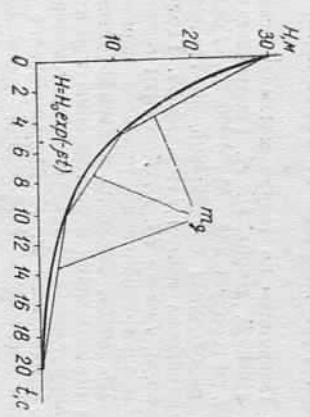


Рис. 1. Траектория движения объекта, выраженная:

— экспонентой вида $H = H_0 \exp(-\beta t)$; — ломаной линией, полученной в результате измерений положения объекта с интервалом в 5 с. Ошибка аппроксимации m_g уменьшается с увеличением времени t (на первом участке $m_g \approx 2 \text{ м}$, на прямой — $m_g = 0$).

быть приемлемо. Из рис. 1 можно заключить, что с увеличением частоты измерений уменьшается ошибка аппроксимации функции $H(t)$. Кроме того, ошибка изменяется с изменением функции $H(t)$. Действительно, с увеличением t ошибка уменьшается, а на прямом участке траектории она равна нулю.

Таким образом, для увеличения точности необходимо увеличить частоту измерений, а это в свою очередь вызывает усложнение аппаратуры. Вполне естественно, частоту измерений нельзя увеличивать неограниченно. Чтобы правильно выбрать частоту измерений, необходимо знать зависимость между частотой измерений и ошибкой аппроксимации функции.

Согласно теореме Котельникова функция $F(t)$, не содержащая частот выше f_0 , полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга на $h = 1/2f_0$. Теорема Котельникова справедлива лишь для бесконечно длинных во времени процессов.

При описании закона движения можно использовать помимо функции времени $F(t)$ спектральную $S(\omega)$.

При спектральном представлении траектории движения наиболее амплитуды спектральных составляющих приходяются на область низких частот и, начиная с некоторой более высокой частоты, они вносят столь малый вклад в описание закона движения объекта, что с ними можно не считаться.

Для воспроизведения непрерывной функции, имеющей ограниченную ширину спектра, требуется определить все мгновенные значения функции.

Функцию $F(t)$ с ограниченной шириной спектра можно выразить через свои отсчеты $F(kh)$:

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kh) \frac{\sin 2\pi F(t - kh)}{2\pi f(t - kh)} \quad (2)$$

В действительности при наблюдениях функция $F(t)$ имеет конечную длительность, т. е. ограничена по аргументу t и, следовательно, имеет бесконечно широкий спектр.

Такую функцию нужно восстановить по дискретным отсчетам, число которых $n = 2/T_n$ ограничено вследствие непрерывности наблюдения T_n . Тогда

$$F(t) = \sum_{k=-1}^n F(kh) \psi(t), \quad (3)$$

где

$$\psi(t) = \frac{\sin 2\pi f(t - kh)}{2\pi f(t - kh)}, \quad (4)$$

а энергию спектра этой функции можно представить как сумму квадратов отсчетов:

$$\int_0^T F^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{k=-1}^n F^2(kh). \quad (5)$$

Для описания реальной функции $F(t)$ можно использовать функцию с ограниченным спектром. В таком случае ошибки воспроизведения функции в точках отсчета будут равны нулю, а в промежутках между отсчетами они возрастают. Если частота измерений составляет f_0 , то частоту среза ω_c определяем из соотношения $\omega_c = \pi f_0$.

Оценим энергию пренебрегаемых частот, т. е. частот выше ω_c [1, 2]:

$$E_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (6)$$

Энергию всего спектра частот найдем из соотношения

$$E_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (7)$$

где $S(\omega)$ — спектр функции $F(t)$, который можно определить, воспользовавшись преобразованием Фурье:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (8)$$

Среднюю квадратическую ошибку аппроксимации функции можно найти из соотношения

$$m_g = \frac{E_c}{E_c} F(t). \quad (9)$$

Таким образом, для оценки ошибки, вызываемой дискретностью измерений, используем формулу

$$m_g = F(t) \frac{\int_0^{\omega_c} \int_0^{\omega_c} |F(t) \exp(-j\omega t)|^2 d\omega}{\int_0^{\omega_c} \int_0^{\omega_c} |F(t) \exp(-j\omega t)|^2 d\omega} \quad (10)$$

Применяя полученные соотношения, можно оценить величину m_g для случая, когда закон движения объекта описывается выражением (1).

С учетом (1) выражения (6) и (7) принимают следующий вид:

$$E_c = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{H_0^2 d\omega}{\beta^2 \omega^2} = \frac{H_0^2}{\pi \beta} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\beta} \right); \quad (11)$$

$$E_c = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{H_0^2 d\omega}{\beta^2 + \omega^2} = \frac{H_0^2}{2\beta}. \quad (12)$$

Подставляя полученные значения E_c и E_c в (10), получаем

$$m_g = \frac{2H_0 \beta}{\omega_c} \exp(-\beta t). \quad (13)$$

Зависимость m_g от t при $H_0=30$ м, $\beta=1/5$ с⁻¹ и частоте измерений 10 Гц и 50 Гц показана на рис. 2.

На практике встречаются также задачи по определению положения объекта, движение которого можно описать гармоническим законом:

$$F(t) = A \sin(\omega_0 t + \Phi), \quad (14)$$

где A амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; Φ — фаза колебаний; t — время.

Так как измерения выполняются на ограниченном времени, то весь процесс можно представить отрезком синусоиды:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ A \sin \omega_0 t & \text{при } 0 < t < \frac{2\pi n}{\omega_0}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{2\pi n}{\omega_0}. \end{cases} \quad (15)$$

Спектр этого процесса получаем преобразованием Фурье функции $F(t)$, т. е.

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} A \sin \omega_0 t \exp(-j\omega t) dt = A \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin \pi n \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (16)$$

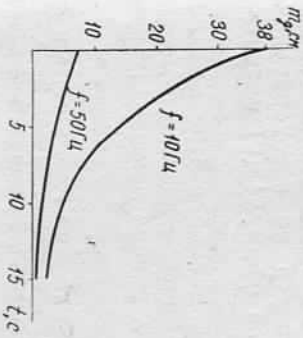


Рис. 2. Зависимость средней квадратической ошибки m_g , вызванной дискретностью измерений, от частоты измерений f и времени измерений t при экспоненциальном законе движения объекта.

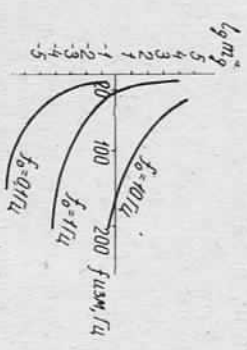


Рис. 3. Зависимость средней квадратической ошибки m_g , вызванной дискретностью измерений, от частоты измерений f и частоты гармонических колебаний объекта f_0 . Величина m_g отложена на оси абсцисс в логарифмическом масштабе.

Используя соотношение (10), определим погрешность за дискретность измерений для случая, когда закон движения объекта описывается синусоидой:

$$m_g = \frac{\int_0^{\omega_c} \left| A \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin \pi n \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2 d\omega}{\int_0^{\omega_c} \left| A \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin \pi n \frac{\omega}{\omega_0} \right|^2 d\omega} A \sin \omega_0 t. \quad (17)$$

Приняв $\omega/\omega_0 = a$, $n=1$, можно написать $a_c = \omega_c/\omega_0$; $d\omega = \omega_0 da$ и

$$\int_0^{\omega_c} \frac{1}{(1+a)^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi a}{(1-a)^2} da \quad A \sin \omega_0 t. \quad (18)$$

Применяя численное интегрирование, получаем значения m_s для различных значений частоты измерений $f_{\text{изм}}$ и для различных частот колебаний объекта f_0 .

На рис. 3 приведены графики, показывающие зависимость средней квадратической ошибки m_s от частоты измерений $f_{\text{изм}}$ для частот гармонической колебаний объекта $f_0 = 0,1; 1; 10$ Гц и амплитуды колебаний $A = 10^\circ$. Для значений m_s , выраженных в угловых секундах, принят логарифмический масштаб.

В том случае, когда оцениваемый процесс носит случайный характер, можно вычислить его спектр по автокорреляционной функции, а затем E_s и E_s согласно формуле (9) оценить величину m_s .

Таким образом, предложенный в данной статье метод позволяет оценить ошибку, вызываемую дискретностью измерений, в зависимости от частоты измерений и закона движения изучаемого объекта.

1. Турбович Н. Т. К вопросу применения теоремы Котельникова к функциям времени с неограниченным спектром // Радиотехника. 1958. № 8. С. 11-12. 2. Турбович Н. Т. Аналитическое представление функции с неограниченным спектром // Радиотехника. 1959. № 3. С. 22-27.

Статья поступила в редакцию 25.12.85

УДК 528.3:551.511

Б. М. ДЖУМАН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛУКТУАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПО ДРОЖАНИИМ ИЗОБРАЖЕНИИ НА КОНЕЧНЫХ ТРАССАХ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Структурную характеристику флуктуаций показателя преломления можно определить по известной формуле [2]:

$$C_n = a^2 a \left(\frac{80 P \cdot 10^{-6}}{\gamma^2} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{dT}{dz} \right)^2 + \gamma_a \right]^2 \quad (1)$$

Для определения структурной характеристики флуктуаций по дрожаниям изображений рассмотрим вначале зависимость C_n от высоты при различных температурных стратификациях в приземном слое.

Известно, что при нейтральной стратификации температура и скорость ветра изменяются с высотой по логарифмическому закону, т. е. $\frac{du}{dz} \sim z^{-1}$ и $\frac{dT}{dz} \sim z^{-1}$, а коэффициент турбулентности $k \sim z$.

Подставляя значения этих выражений в (1), получаем $C_n^2 \sim z^{-2/3}$. Таким образом, при стратификации, близкой к нейтральной, C_n^2 изменяется пропорционально $z^{-1/3}$.

При сильно неустойчивой стратификации $k^2 \sim z^4 \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_a \right)$, $\frac{dT}{dz} + \gamma_a \sim z^{-4/3}$, а $\frac{du}{dz}$ может изменяться от $z^{-1/3}$ до z^{-1} (близ поверхности земли). Подставляя в (1) эти выражения, получаем соответственно $C_n^2 \sim z^{-8/9}$ и $C_n^2 \sim z^{-10/9}$.

Таким образом, при сильно неустойчивой стратификации C_n изменяется в приземном слое пропорционально $z^{-1/2}$.

При сильно устойчивой стратификации в приземном слое воздуха число Ричардсона $R_s \rightarrow R = \text{const}$, профили скорости ветра и температуры линейно изменяются с высотой, а коэффициент турбулентности стремится к постоянному значению. Поэтому можно предположить, что при таких условиях C_n изменяется пропорционально от $z^{-1/4}$ до z^2 .

Учитывая установленные зависимости, величину C_n для неустойчивой стратификации получаем из формулы [1]

$$C_n^2 = 10,2 C_{n_0} L^{1/2} z^{-1/2} D^{-1/6} \rho^4, \quad (2)$$

где σ_{max}^2 — максимальная амплитуда дрожания (размах); C_{n_0} — структурная характеристика на высоте 1 м.

Для определения структурной характеристики флуктуаций показателя преломления выполнены экспериментальные наблюдения. Район работ представлял собой типичную всхолмленную местность с колебанием высот до 100 м. Наблюдения производили с одного пункта по восьми направлениям. Длины сторон и эквивалентные высоты приведены ниже:

	1	2	3	4	5	6	7	8
L, км	1,9	0,6	1,1	2,0	5,6	2,5	4,0	2,7
z _{ср} , м	5,0	2,5	9,0	13,0	29,0	9,1	34,0	18,0

Измерения максимальных амплитуд колебаний изображений визирных целей производили теодолитом OT-02 в угловых секундах.

Одновременно психрометрами Асмана определяли температуру на высотах 1 и 5 м, а также все другие метеорологические элементы. Наблюдения выполняли на протяжении 10 ясных дней при неустойчивой стратификации. В результате измерено 16 серий данных амплитуд колебаний изображений по каждому направлению с одновременно определенным метеорологическим элементом.

Все измерения усреднены и разделены на три группы по значениям разности температур $\frac{\Sigma(T_s - T_1)}{n} = \Delta T_{\text{ср}}$. Результаты измерений приведены в таблице. В ней, кроме измеренных σ_{max}^2 ,