

## ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.33.031

В. И. АКУЛОВ

### ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАТНЫМИ ЗАСЕЧКАМИ ПУНКТОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ ТВЕРДОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Точность определения отдельного пункта обратной засечкой, несмотря на значительное количество работ по данному вопросу, заслуживает дальнейших исследований в связи с широким применением обратных засечек при решении различных геодезических задач.

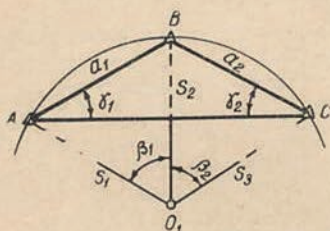


Рис. 1. Схема определения обратной засечкой центра описанной окружности твердого равнобедренного треугольника.

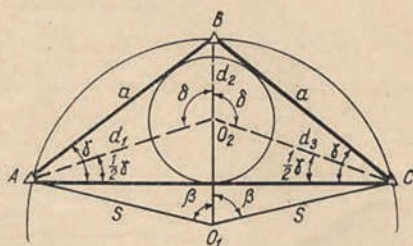


Рис. 2. Схема определения обратной засечкой центра вписанной окружности твердого равнобедренного треугольника.

При исследовании обратных засечек обычно рассматривается точность определения пункта, расположенного в замечательной точке равнобедренного твердого треугольника, образованного исходными пунктами. На практике твердый треугольник значительно отклоняется от равнобедренного, поскольку исходными пунктами для засечки являются как пункты триангуляции первого и второго классов, так и пункты низших классов; при этом определяемый пункт не всегда можно расположить в пределах твердого треугольника. В связи с этим теоретический и практический интерес представляет исследование точности определения обратными засечками пунктов, расположенных в замечательных точках твердого треугольника: центре описанного круга, центре вписанного круга и центре тяжести.

Для исследования взят равнобедренный твердый треугольник с различными углами при основании.

Для расчета точности обратной засечки воспользуемся известной в теории оценки точности посредственных наблюдений формулой средней квадратической ошибки положения одиночно определяемого пункта

$$M_s = \pm m_\beta \sqrt{\frac{[AA] + [BB]}{[AA][BB] - [AB]^2}}, \quad (1)$$

где  $m_\beta$  — средняя квадратическая ошибка измерения угла;  $A, B$  — коэффициенты уравнений погрешностей.

При измерении углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  при определяемом пункте по схеме, представленной на рис. 1, коэффициенты  $A$  и  $B$  равны:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\rho \sin \alpha_{i+1}}{s_{i+1}} - \frac{\rho \sin \alpha_i}{s_i}; \\ B_i &= -\frac{\rho \cos \alpha_{i+1}}{s_{i+1}} + \frac{\rho \cos \alpha_i}{s_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha$  — дирекционный угол направления с определяемого пункта на твердый;  $s$  — расстояние от определяемого пункта до твердого.

Для пункта  $O_1$ , расположенного в центре описанного круга твердого треугольника  $ABC$  (рис. 1), полагая, что ось абсцисс совмещена с направлением  $O_1A$ , и учитывая, что  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  и  $s_1 = s_2 = s_3 = s$ , имеем:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\rho \sin \beta}{s}; \\ B_1 &= -\frac{\rho \cos \beta}{s} + \frac{\rho}{s}; \\ A_2 &= \frac{\rho \sin 2\beta}{s} - \frac{\rho \sin \beta}{s}; \\ B_2 &= -\frac{\rho \cos 2\beta}{s} + \frac{\rho \cos \beta}{s}, \end{aligned} \quad (3)$$

отсюда

$$\begin{aligned} [AA] &= \frac{4\rho^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{s^2} (1 + \cos \beta \cos 2\beta); \\ [AB] &= \frac{4\rho^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{s^2} \sin 2\beta \cos \beta; \\ [BB] &= \frac{4\rho^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{s^2} (1 - \cos \beta \cos 2\beta); \\ [AA] + [BB] &= \frac{8\rho^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{s^2}; \\ [AA][BB] - [AB]^2 &= \frac{16\rho^4 \sin^4 \frac{\beta}{2} \sin^2 \beta}{s^4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя выражения из (4) в формулу (1), после преобразования получаем

$$M_{s_1} = \pm \frac{m_\beta s}{\sqrt{2} \rho \sin \frac{\beta}{2} \sin \beta}, \quad (5)$$

где  $\beta$  — угол при определяемом пункте.

Формула (5) выражает погрешность определения обратной засечкой пункта, расположенного в центре описанного круга твердого равно-

бедренного треугольника с углом  $\gamma$  ( $\gamma_1 = \gamma_2$ ) при основании и короткой стороной  $a$  ( $a_1 = a_2$ ).

Так как

$$\gamma = \frac{1}{2} \beta; \quad a = 2s \sin \frac{\beta}{2}, \quad (6)$$

то

$$M_{s_1} = \pm \frac{m_\beta a}{2 \sqrt{2} \rho \sin^2 \gamma \sin 2\gamma}, \quad (7)$$

где  $a$  — короткая сторона твердого равнобедренного треугольника  $ABC$ ;  $\gamma$  — угол при основании твердого равнобедренного треугольника  $ABC$ .

Для пункта, расположенного в центре  $O_2$  вписанного круга твердого равнобедренного треугольника  $ABC$  (рис. 2), коэффициенты  $A$  и  $B$ , полагая ось абсцисс, совпадающей с направлением  $O_2A$ , равны:

$$A_1 = \frac{\rho \sin \delta}{d_2}; \quad B_1 = -\frac{\rho \cos \delta}{d_2} + \frac{\rho}{d_1}; \quad (8)$$

$$A_2 = \frac{\rho \sin 2\delta}{d^3} - \frac{\rho \sin \delta}{d_2}; \quad B_2 = -\frac{\rho \cos 2\delta}{d_3} + \frac{\rho \cos \delta}{d_2},$$

где  $d$  — расстояние от центра вписанного круга до твердого пункта;  $\delta$  — угол при центре вписанного круга.

Из рис. 2 имеем

$$d_1 = d_3 = \frac{s \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}};$$

$$d_2 = 4s \sin^2 \frac{\beta}{4}; \quad \delta = 90^\circ + \frac{\beta}{4}, \quad (9)$$

где  $s$  — радиус описанного круга твердого равнобедренного треугольника  $ABC$ ;  $\beta$  — угол при центре описанного круга.

Поэтому

$$A_1 = \frac{\rho \cos \frac{\beta}{4}}{4s \sin^2 \frac{\beta}{4}}; \quad B_1 = \frac{\rho \left(1 + \cos \frac{\beta}{2}\right)}{4s \sin \frac{\beta}{4} \cos \frac{\beta}{2}}; \quad (8a)$$

$$A_2 = -\frac{\rho \cos \frac{\beta}{4}}{4s \sin^2 \frac{\beta}{4} \cos \frac{\beta}{2}}; \quad B_2 = 0,$$

отсюда

$$[AA] = \frac{\rho^2 \cos^2 \frac{\beta}{4} \left(1 + \cos^2 \frac{\beta}{2}\right)}{16s^2 \sin^4 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{2}};$$

$$[AB] = \frac{\rho^2 \cos \frac{\beta}{4} \left(1 + \cos \frac{\beta}{2}\right)}{16s^2 \sin^3 \frac{\beta}{4} \cos \frac{\beta}{2}}; \quad (10)$$

$$[BB] = \frac{\rho^2 \left(1 + \cos \frac{\beta}{2}\right)^2}{16s^2 \sin^2 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{2}};$$

$$[AA] + [BB] = \frac{\rho^2 \cos^2 \frac{\beta}{4}}{8s^2 \sin^4 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{2}};$$

$$[AA][BB] - [AB]^2 = \frac{\rho^4 \cos^2 \frac{\beta}{4} \cos^4 \frac{\beta}{4}}{64s^4 \sin^6 \frac{\beta}{4} \cos^4 \frac{\beta}{2}}.$$

Подставляя выражения из формулы (10) в формулу (1), получаем

$$M_{s_2} = \pm \frac{2\sqrt{2}m_\beta s \sin \frac{\beta}{4} \cos \frac{\beta}{2}}{\rho \cos^2 \frac{\beta}{4}} \quad (11)$$

или, учитывая (6), найдем

$$M_{s_2} = \pm \frac{m_\beta a \cos \gamma}{\sqrt{2}\rho \cos^3 \frac{\gamma}{2}}. \quad (11a)$$

Формула (11) выражает погрешность определения обратной засечкой пункта, расположенного в центре вписанного круга твердого равнобедренного треугольника.

Формулы (7) и (11a) позволяют установить как влияние формы твердого треугольника на точность определения пункта обратной засечкой, так и соотношение  $\lambda$  между ошибками определяемых пунктов, расположенных в центре описанного и вписанного кругов твердого равнобедренного треугольника.

Из формул (7) и (11a),

$$\lambda = \frac{M_{s_1}}{M_{s_2}} = \frac{1}{32 \sin^3 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \gamma}. \quad (12)$$

В табл. 1 при  $m_\beta = \pm 1''$  даны погрешности положений из обратных засечек пунктов, расположенных в замечательных точках твердого равнобедренного треугольника с короткой стороной  $a = 1$  км, а также указаны расстояния от центра вписанного круга до центра описанного круга и центра тяжести, вычисленные соответственно по формулам:

$$D_1 = \frac{a \cos \frac{3}{2}\gamma}{2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2}}; \quad (13)$$

$$D_2 = \frac{a}{3} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (2 \cos \gamma - 1). \quad (14)$$

Таблица 1

Угол $\gamma$	Расстояние от центра вписанного круга до		Погрешность положения пункта из обратной засечки при $a=1$ км и $m_{\beta} = \pm 1''$ , мм			Отношение ошибки положения пункта к ошибке пункта, расположенного в центре вписанного круга	
			Расположение пункта				
	центра описанного круга	центра тяжести	в центре вписанного круга	в центре описанного круга	в центре тяжести	$\lambda_1 = \frac{m_{s_1}}{m_{s_2}}$	$\lambda_2 = \frac{m_{s_3}}{m_{s_2}}$
15°	1,800 $a$	0,041 $a$	$\pm 3,50$	$\pm 51,17$	$\pm 3,39$	14,6	0,97
30°	0,732 $a$	0,065 $a$	3,30	7,92	3,26	2,4	0,99
45°	0,293 $a$	0,057 $a$	3,07	3,43	3,01	1,1	0,98
60°	0,00	0,00	2,64	2,64	2,64	1,0	1,0
75°	0,250 $a$	0,123 $a$	1,78	3,67	2,47	2,1	1,4

Погрешности положений из обратных засечек пункта, совпадающего с центром тяжести твердого треугольника  $ABC$  (табл. 1), вычислены непосредственно по формуле (1).

Из данных табл. 1 следует:

1) для твердого равнобедренного треугольника с углами  $\gamma < 60^\circ$  с минимальной погрешностью из обратной засечки определяется пункт, расположенный вблизи центра тяжести треугольника и при углах  $\gamma > 60^\circ$  — пункт, расположенный вблизи центра вписанного круга;

2) с увеличением угла  $\gamma$  твердого треугольника уменьшаются ошибки определений из обратных засечек пунктов, расположенных в замечательных точках треугольника;

3) ошибка определения из обратной засечки пункта, расположенного вблизи замечательных точек твердого треугольника, близкого по форме к равнобедренному, может быть найдена по формуле

$$M_s = \pm m_s a m_{\beta}, \quad (15)$$

где  $a$  — короткая сторона твердого треугольника, км;  $m_s$  — погрешность положения пункта из обратной засечки при  $a=1$  км и  $m_{\beta} = \pm 1''$ , (табл. 1), мм.

Для исследования влияния угла  $\beta$  на точность обратной засечки формуле (5) придадим следующий вид:

$$M_{s_1} = \pm \frac{m_{\beta} a}{2 \sqrt{2} \rho \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta}. \quad (5a)$$

В табл. 2 при  $m_{\beta} = \pm 1''$  даны ошибки положений пункта, расположенного вблизи центра описанного круга твердого равнобедренного треугольника с короткой стороной  $a=1$  км.

Таблица 2

	У г о л $\beta$						
	10°	30°	60°	90°	120°	150°	170°
$m_{s_1}$ , мм	$\pm 1299$	$\pm 51,2$	$\pm 7,92$	$\pm 3,43$	$\pm 2,64$	$\pm 3,67$	$\pm 9,95$

Из данных табл. 2 устанавливаем, что при  $\beta < 90^\circ$ , то есть когда определяемый пункт находится вне твердого треугольника, точность обратной засечки резко понижается с уменьшением угла  $\beta$  при определяемом пункте.

Угол $\gamma$	Пункт, расположенный в центре тяжести треугольника		Ошибка расчета по формуле (5), (%)	Пункт, расположенный в центре вписанного круга треугольника		Ошибка расчета по формуле (5), (%)
	Ошибка $m_{s_3}$ , мм			Ошибка $m_{s_2}$ , мм		
	по формуле (5)	по строгому расчету		по формуле (5)	по строгому расчету	
15°	$\pm 3,29$	$\pm 3,39$	2,9	$\pm 3,19$	$\pm 3,50$	8,9
30°	3,16	3,26	2,8	3,08	3,29	6,4
45°	2,92	3,01	3,0	2,89	3,07	5,9
60°	2,64	2,64	0,00	2,64	2,64	0,00

Формулу (5) можно использовать для приближенной оценки точности обратных засечек произвольного вида для пунктов, расположенных вблизи замечательных точек твердого треугольника, при этом расстояние  $s$  и угол  $\beta$  рассчитываются по формулам

$$s = \frac{PA + PB + PC}{3}, \quad \beta = \frac{\angle APC}{2}. \quad (16)$$

В табл. 3 приведены результаты расчетов по формуле (5) ошибок положений пунктов, расположенных в центре тяжести и центре вписанного круга твердого равнобедренного треугольника с короткой стороной  $a=1$  км при  $m_\beta = \pm 1''$ .

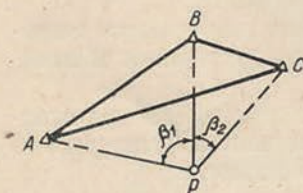


Рис. 3. Схема обратной засечки произвольной формы.

Рассчитаем по формуле (5) точность произвольного вида обратной засечки (рис. 3) с координатами пунктов (табл. 3).

$$x_A = -4006 \text{ м}, \quad y_A = 1253 \text{ м}; \quad x_B = y_B = 0;$$

$$x_C = 1842 \text{ м}, \quad y_C = 1218 \text{ м};$$

$$x_P = -892 \text{ м}, \quad y_P = 2949 \text{ м}.$$

Из схемы засечки (рис. 3) находим:  $PA=3500$  м,  $PB=3100$  м,  $PC=3200$  м и  $\angle APC=119^\circ$ .

Средние значения  $s$  и  $\beta$  (формула (16)) равны

$$s = \frac{3500 + 3100 + 3200}{3} = 3266 \text{ м}; \quad \beta = \frac{119^\circ}{2} = 59^\circ,5.$$

Подставляя значения  $s$  и  $\beta$  в формулу (5), получаем

$$M_s = \frac{m_p \cdot 3266}{2 \cdot 206265'' \sin \frac{59^\circ,5}{2} \sin 59^\circ,5} = \pm 26,2 m_p.$$

При строгом расчете  $M_s = \pm 27,2 m_p$ .

Рассмотренные примеры подтверждают целесообразность применения формулы (5) для оценки точности обратных засечек для пунктов, расположенных вблизи замечательных точек твердого треугольника.