

Л. К. ВОИСЛАВСКИЙ

УРАВНОВЕШИВАНИЕ ТИПОВЫХ СИСТЕМ ТРИЛАТЕРАЦИИ ПО СПОСОБУ УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Математическая взаимосвязь между измеренными сторонами в трилатерации выражается, как правило, через различные функции этих сторон (площади треугольников, углы и т. д.). Поэтому, применяя разные функции, мы каждый раз будем получать условные уравнения в другой форме. По роду используемых функций известные методы составления условных уравнений в трилатерации можно разделить на три группы:

1. Метод сравнения площадей, впервые предложенный Л. Крюгером [10]. Дальнейшая разработка этого метода дана в работах И. М. Герасимова [5] и Н. Г. Романова [6].

2. Метод угловых соотношений, разработанный С. А. Бутлером [3] и Э. Вархаловским [11].

3. Метод преобразованных уравнений поправок, предложенный К. Н. Терпуговым и Ю. А. Гордеевым [8] на основе сочетания косвенных и условных измерений.

С точки зрения практики, на наш взгляд, наибольшего внимания заслуживает метод угловых соотношений. Данный метод универсален, так как пригоден для уравновешивания любых систем трилатерации, и, как будет показано ниже, обеспечивает наиболее простое решение задачи почти для всех типовых фигур трилатерации.

В зависимости от строения сети, количества исходных пунктов и их размещения для метода угловых соотношений характерно несколько разновидностей условных уравнений:

а) Условие горизонта. Если на каком-либо пункте по измеренным или исходным сторонам можно вычислить из треугольников все углы, составляющие полный угол, то есть 360° , возникает условие горизонта. Примером сети, где имеется данное условие, является центральная система (рис. 1), для которой можем записать

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + \dots + (\gamma_n) + \omega = 0, \quad (1)$$

где $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n - 360^\circ$.

б) Условие жесткого угла. Возникает при вставке одного или нескольких пунктов в угол, образованный жесткими сторонами (рис. 2).

$$(\gamma_1) + (\gamma_2) + \dots + (\gamma_n) + \omega = 0, \quad (2)$$

где $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n - \angle AOB$.

в) Условие суммы (разности) углов. Возникает в фигурах с перекрывающимися треугольниками, например, в геодезическом четырехугольнике (рис. 3).

$$(\gamma) - (\gamma') - (\gamma'') + \omega = 0, \quad (3)$$

где $\omega = \gamma - (\gamma' + \gamma'')$.

г) Если в сети имеется два разобщенных исходных пункта, как, например, в цепи треугольников между двумя твердыми точками (рис. 4), возникает условие жесткой диагонали

$$\begin{aligned} (D') + w &= 0, \\ w &= D' - D, \end{aligned} \quad (4)$$

где D' — диагональ, вычисленная по измеренным сторонам; D — диагональ, вычисленная по координатам исходных пунктов.

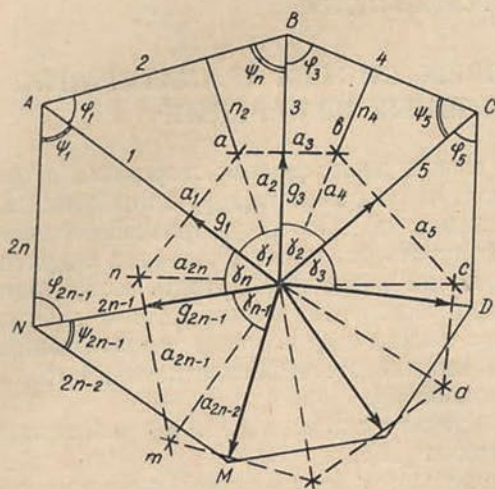


Рис. 1. Построение весовой фигуры для уравнивания центральной системы.

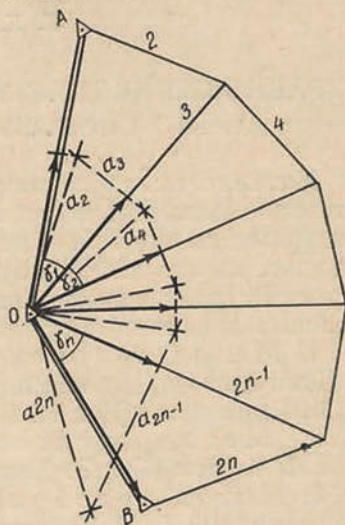


Рис. 2. Построение весовой фигуры для уравнивания вставки в жесткий угол.

д) При наличии в сети не менее двух не соприкасающихся сторон с твердыми дирекционными углами возникает условие дирекционных углов (см. рис. 5).

$$-(\gamma_1) + (\gamma_2) - \dots - (\gamma_{n-1}) + (\gamma_n) + w = 0, \quad (5)$$

где $w = -\gamma_1 + \gamma_2 - \dots - \gamma_{n-1} + \gamma_n + (\alpha_{AB} - \alpha_{CD})$.

е) Условия абсцисс и ординат (координатные) имеют место в сетях, опирающихся не менее чем на три исходных пункта (рис. 5).

$$\sum_{i=1}^n (d_i) \cos \alpha_i = \frac{1}{\rho} [(Y_D - Y_B) (\gamma_1) + (Y_D - Y_a) (\gamma_2) + \dots + (Y_D - Y_q) (\gamma_{n-1})] + w_x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (d_i) \sin \alpha_i + \frac{1}{\rho} [(X_D - X_B) (\gamma_1) + (X_D - X_a) (\gamma_2) + \dots + (X_D - X_q) (\gamma_{n-1})] + w_y = 0, \quad (6)$$

где

$$w_x = \sum_{i=1}^n \Delta X + X_D - X_B, \quad w_y = \sum_{i=1}^n \Delta Y + Y_D - Y_B.$$

Следует отметить, что в трилатерации координатные условия могут быть заменены условиями жесткой диагонали и наоборот.

Переход от поправок вычисленных углов (γ_j) к поправкам измеренных сторон v_i в уравнениях (1)–(6) наиболее просто осуществляется при помощи формулы, предложенной С. А. Бутлером [3]:

$$\gamma_j = \frac{\rho}{h_1} v_1 - \frac{\rho}{h_1} \cos \varphi v_2 - \frac{\rho}{h_1} \cos \psi v_3. \quad (7)$$

Принятые в выражении (7) обозначения показаны на рис. 6.

При уравнивании трилатерации по способу условий наиболее кропотливой и трудоемкой работой является вычисление коэффициентов и свободных членов условных уравнений. Значительное снижение трудоемкости уравнивательных вычислений может быть достигнуто, если заменить аналитическое определение коэффициентов условных уравнений более удобным и простым графоаналитическим при условии обеспечения требуемой точности вычисления поправок.

Наряду с известными способами графоаналитического определения коэффициентов условных уравнений в трилатерации, которые были разработаны А. В. Буткевичем [2] и В. Ф. Антоноженко [1], для этой же цели может быть применен еще один способ, основанный на геометрической интерпретации уравнения (7).

Из вершины угла γ вдоль сторон CA и CB отложим в крупном масштабе градиенты направлений этих сторон $g_i = \frac{\rho}{d_i}$ (рис. 6). Через точки F и G проводим прямые, перпендикулярные векторам \vec{g}_2 и \vec{g}_3 до их пересечения в точке E , после чего соединяем точку E с вершиной C . Из подобия треугольников ACD и CEF , а также треугольников BCD и CEG можем записать

$$a_1 = \frac{\rho}{h_1}, \quad a_2' = \frac{\rho}{h_1} \cos \varphi, \quad a_3' = \frac{\rho}{h_1} \cos \psi. \quad (8)$$

Сделав подстановку из (8) в (7), получаем

$$(\gamma_j) = a_1 v_1 - a_2' v_2 - a_3' v_3. \quad (9)$$

Коэффициенты в формуле (9) определяются на чертеже в результате простейших геометрических построений.

Представляется целесообразным более подробно рассмотреть сущность предлагаемого способа на примерах уравнивания различных систем трилатерации.

1. Центральная система. На схеме сети (рис. 1) вдоль сторон, входящих в два смежных треугольника, в крупном масштабе откладываем величины $g_i = \frac{\rho}{d_i}$. Модули градиентов вычисляются на логарифмической линейке или выбираются из специальной таблицы [7]. Через концы векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_{2n-1}$ проводим прямые, перпендику-

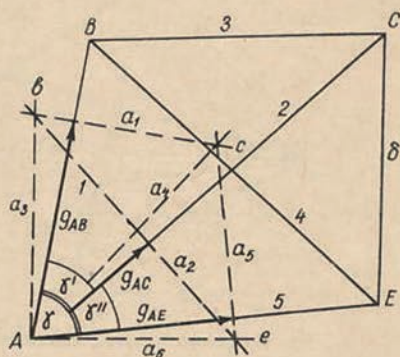


Рис. 3. Построение весовой фигуры для уравнивания геодезического четырехугольника.

лярные этим векторам, до их взаимного пересечения в точках a, b, c, \dots, n . Соединив точки пересечения с полюсом O , получим фигуру, которая по своей конструкции также является центральной системой. Полученную фигуру будем называть весовой. Сравнив построения на рис. 1 и 6, легко установить, что а) все элементы весовой фигуры перпендикулярны соответствующим сторонам заданной центральной си-

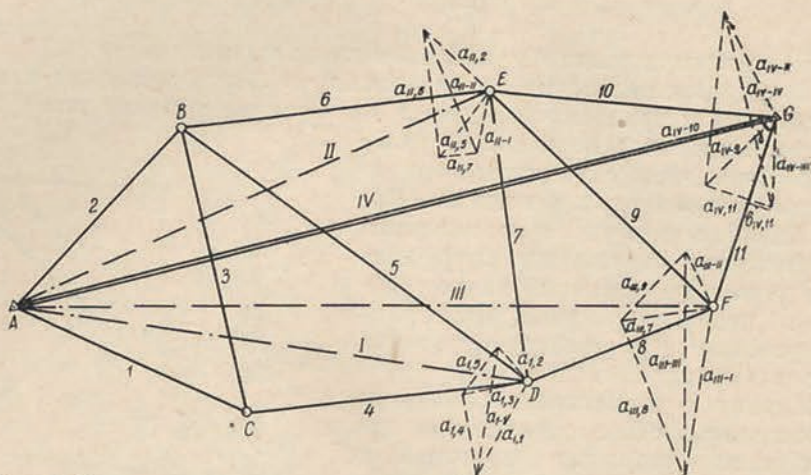


Рис. 4. Схема уравновешивания цепи треугольников между двумя твердыми пунктами.

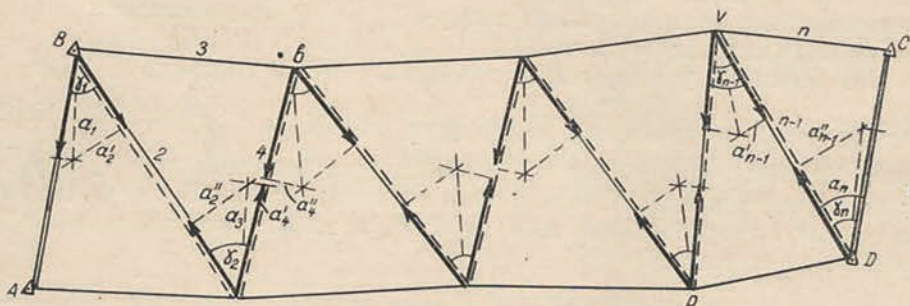


Рис. 5. Построение весовых фигур для уравновешивания цепи треугольников между двумя жесткими сторонами.

стемы; б) весовая фигура включает построения, аналогичные рис. 6 для всех углов γ_j , входящих в условие горизонта (1).

Подставляя (9) в (1) и группируя коэффициенты при одноименных поправках, получаем условное уравнение

$$-a_1 v_1 + a_2 v_2 - a_3 v_3 + \dots - a_{2n-1} v_{2n-1} + a_{2n} v_{2n} + w = 0. \quad (10)$$

Все коэффициенты уравнения (10) определяют непосредственно на чертеже, руководствуясь следующим правилом:

Коэффициент при поправке равен длине того элемента весовой фигуры, который пересекает данную сторону или ее продолжение под прямым углом.

Коэффициенты при поправках внешних сторон всегда положительны. Коэффициенты при поправках внутренних сторон имеют знак минус, если сумма прилежащих к данной стороне углов φ и ψ меньше 180° , и знак плюс, если эта сумма больше 180° .

Правильность построения весовой фигуры легко проверить чертежным треугольником, используя свойство взаимной перпендикулярности соответствующих сторон заданной центральной системы и ее весовой фигуры. Если свободный член ω вычислен в секундах, а поправки к измеренным сторонам необходимо получить в сантиметрах, размерность градиентов направлений g_i следует принимать в *сек/см*.

Решив (10) при условии $[vv] = \min$, находим интересующие нас поправки v_i .

При необходимости произвести оценку точности весовые фигуры могут быть также использованы для определения весовых коэффициентов.

2. Вставка пунктов в жесткий угол. Построение весовой фигуры для возникающего в данной сети условия жесткого угла AOB показано на рис. 2. Все остальные операции выполняются так же, как и при уравнивании центральной системы.

3. Геодезический четырехугольник. Принимая за полюс вершину A (рис. 3), откладываем вдоль сходящихся в ней сторон AB, AC, AE градиенты их направлений $\vec{g}_{AB}, \vec{g}_{AC}, \vec{g}_{AE}$. Через концы векторов под прямым углом к линиям AB, AC, AE проводим прямые до их взаимного пересечения в точках b, c, e . Соединив полученные точки с полюсом A , получаем весовую фигуру, представляющую собой четырехугольник с диагоналями. Условное уравнение геодезического четырехугольника на основании (3) и (9) имеет вид

$$-a_1 v_1 + a_2 v_2 - a_3 v_3 + a_4 v_4 - a_5 v_5 - a_6 v_6 + \omega = 0. \quad (11)$$

Знаки коэффициентов в (11) зависят от того, как получен свободный член ω . Если $\omega = \gamma - (\gamma' + \gamma'')$, коэффициенты диагональных сторон положительны, а боковых — отрицательны.

4. Цепь треугольников между двумя твердыми пунктами. Предположим, что в цепи треугольников, проложенной между двумя твердыми пунктами (рис. 4), помимо измеренных сторон нам известен также дирекционный угол одной из линий, например GF . В такой системе возникает два условия: жесткой диагонали AG и жесткого угла γ в точке G .

При составлении первого условного уравнения используем промежуточные диагонали, предложенные в свое время И. М. Герасимовым [5] и Н. Г. Романовым [6] для уравнивания трилатерации по методу сравнения площадей. Посредством проведения промежуточных диагоналей $I, II, III \dots$ сеть расчленяется на геодезические четырехугольники $ABDC, ABED, AEFD, AFGE$. Для каждого геодезического четырехугольника строится весовая фигура и составляется условное уравнение по типу выражения (11), имея в виду, что численное значение каждого коэффициента a_{ji} имеет соответствующий знак «+» или «-».

$$\begin{aligned} a_{1,1} v_1 + a_{1,2} v_2 + a_{1,3} v_3 + a_{1,4} v_4 + a_{1,5} v_5 + a_{1,1} v_1 &= 0, \\ a_{11,2} v_2 + a_{11,5} v_5 + a_{11,6} v_6 + a_{11,7} v_7 + a_{11,1} v_1 + a_{11,11} v_{11} &= 0, \\ a_{111,7} v_7 + a_{111,8} v_8 + a_{111,9} v_9 + a_{111,1} v_1 + a_{111,11} v_{11} + a_{111,111} v_{111} &= 0, \\ a_{111,9} v_9 + a_{111,10} v_{10} + a_{111,11} v_{11} + a_{111,11} v_{11} + a_{111,111} v_{111} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

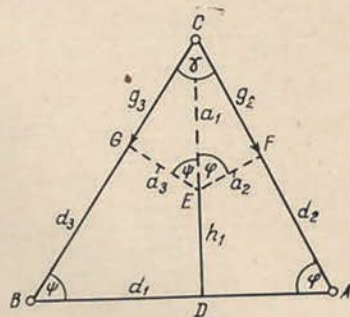


Рис. 6. Геометрическая интерпретация формулы С. А. Бутлера.

Из первых трех уравнений (12) находим значения величин v_1 , v_{II} , v_{III} и подставляем их в четвертое уравнение (12). В результате получаем

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{a_{II,I} a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{II,I} a_{IV,II}}{a_{I,I} a_{II,II}} - \frac{a_{III,I} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{III,III}} \right) a_{I,1} v_1 - \\
 & - \left[\left(\frac{a_{II,I} a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{II,I} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II}} - \frac{a_{II,I} a_{IV,II}}{a_{I,I} a_{II,II}} \right) a_{I,2} - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{IV,II}}{a_{II,II}} \right) a_{II,2} \right] v_2 - \left(\frac{a_{II,I} a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{III,I} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{III,III}} - \right. \\
 & - \left. \frac{a_{II,I} a_{IV,II}}{a_{I,I} a_{II,II}} \right) a_{I,3} v_3 - \left(\frac{a_{II,I} a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{III,I} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{III,III}} - \right. \\
 & - \left. \frac{a_{II,I} a_{IV,II}}{a_{I,I} a_{II,II}} \right) a_{I,4} v_4 - \left[\left(\frac{a_{II,I} a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{III,I} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{III,III}} - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{a_{II,I} a_{IV,II}}{a_{I,I} a_{II,II}} \right) a_{I,5} - \left(\frac{a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{IV,II}}{a_{II,II}} \right) a_{II,5} \right] v_5 + \\
 & + \left(\frac{a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{IV,II}}{a_{II,II}} \right) a_{II,6} v_6 + \left[\left(\frac{a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{IV,II}}{a_{II,II}} \right) a_{II,7} - \right. \\
 & - \left. \frac{a_{IV,III}}{a_{III,III}} a_{III,7} \right] v_7 - \frac{a_{IV,III}}{a_{III,III}} a_{III,8} v_8 - \left(\frac{a_{IV,III}}{a_{III,III}} a_{III,9} - a_{IV,9} \right) v_9 + \\
 & + a_{IV,10} v_{10} + a_{IV,11} v_{11} + w_a = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_I &= - \frac{a_{II,I} a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{II,II} a_{III,III}} + \frac{a_{II,I} a_{IV,II}}{a_{I,I} a_{II,II}} + \frac{a_{III,I} a_{IV,III}}{a_{I,I} a_{III,III}}, \\
 \varepsilon_{II} &= \frac{a_{III,II} a_{IV,III}}{a_{II,II} a_{III,III}} - \frac{a_{IV,II}}{a_{II,II}}, \quad \varepsilon_{III} = - \frac{a_{IV,III}}{a_{III,III}}, \quad \varepsilon_{IV} = 1.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Кроме того, обозначим

$$A_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \varepsilon_j, \tag{15}$$

где $1, 2, 3, \dots, n$ — измеренные стороны; $1, 2, 3, \dots, m$ — геодезические четырехугольники. Подставляя (14), (15) в (13), получаем условное уравнение жесткой диагонали в окончательном виде

$$\begin{aligned}
 A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + A_4 v_4 + A_5 v_5 + A_6 v_6 + A_7 v_7 + A_8 v_8 + A_9 v_9 + \\
 + A_{10} v_{10} + A_{11} v_{11} + w_a = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Коэффициенты A_i , в отличие от первичных (непреобразованных) коэффициентов a_{ji} , будем называть преобразованными. Величины ε_j в данном случае выполняют роль преобразующих множителей.

Для нахождения преобразующих множителей рекомендуется следующий прием. Запишем непроброзованные коэффициенты при поправках промежуточных диагоналей в треугольную таблицу

$$\begin{aligned} & a_{I,I} \\ & a_{II,I} a_{II,II} \\ & a_{III,I} a_{III,II} a_{III,III} \\ & a_{IV,I} a_{IV,II} a_{IV,III} \end{aligned}$$

Разделим в каждом столбце все элементы, начиная со второго, на элемент данного столбца, расположенный на главной диагонали, взятый с обратным знаком. Получаем новую треугольную таблицу, к которой

Таблица 1

	$\frac{a_{II,I}}{a_{I,I}}$			
	$a_{I,I}$			
	$\frac{a_{III,I}}{a_{I,I}}$	$\frac{a_{III,II}}{a_{II,II}}$		
	$a_{I,I}$	$a_{II,II}$		
	0	$\frac{a_{IV,II}}{a_{II,II}}$	$\frac{a_{IV,III}}{a_{III,III}}$	
	0	0	0	1
ϵ_I	ϵ_{II}	ϵ_{III}	ϵ_{IV}	

Таблица 2

	$\frac{b_{II,I}}{b_{I,I}}$			
	$b_{I,I}$			
	$\frac{b_{III,I}}{b_{I,I}}$	$\frac{b_{III,II}}{b_{II,II}}$		
	0	0	$\frac{b_{IV,III}}{b_{III,III}}$	
	0	0	0	1
η_I	η_{II}	η_{III}	η_{IV}	

снизу приписываем строку с единицей на главной диагонали и нулями в остальных столбцах (табл. 1). Первое слагаемое ϵ_j равно произведению элементов главной диагонали таблицы, начиная со столбца, соответствующего искомому ϵ_j . Второе, третье и последующие слагаемые, составляющие ϵ_j , равны произведениям элементов столбца, соответствующего искомому ϵ_j , на элементы таблицы, расположенные вправо-вниз или вниз-вправо по ходу шахматного коня (в табл. 1 показаны стрелками).

Свободный член уравнения (16) определяется из выражений (см. [9, 4]):

$$\begin{aligned} w_a &= -a_{IV,IV} l, \\ l &= \frac{(X_G - X'_A)^2 + (Y_G - Y'_A)^2 - (X_G - X_A)^2 - (Y_G - Y_A)^2}{2D'}, \end{aligned} \quad (17)$$

где X, Y — координаты исходных пунктов; X', Y' — приближенные координаты, вычисленные по неуравненным расстояниям; D' — приближенная длина диагонали ряда AG .

Для условия жесткого угла γ из весовой фигуры, построенной в точке G (рис. 4), получаем условное уравнение

$$b_{IV,III} v_{III} + b_{IV,II} v_{II} + w_b = 0, \quad (18)$$

где

$$w_b = \gamma_{\text{выч}} - (\alpha_{GA} - \alpha_{GF}).$$

С помощью весовых фигур составляем условные уравнения геодезических четырехугольников $ABCD, ABED, AEFD$ по типу уравнений (12), обозначая коэффициенты b_{ji} . Выразив посредством этих уравнений поправку промежуточной диагонали v_{III} из (18) через поправки

Схема уравнивания цепи треугольников,

№ сторон и диагоналей			Непреобразованные коэффициенты							
			Измеренные стороны, диагонали				Градиенты направлений			
1	2	3	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
			ε_I	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	η_I	η_{II}	η_{III}	η_{IV}
1	d_1	—	$a_{1,1}$	—	—	—	$b_{1,1}$	—	—	—
2	d_2	—	$a_{1,2}$	$a_{II,2}$	—	—	$b_{1,2}$	$b_{II,2}$	—	—
3	d_3	—	$a_{1,3}$	—	—	—	$b_{1,3}$	—	—	—
4	d_4	g_4	$a_{1,4}$	—	—	—	$b_{1,4}$	—	—	—
5	d_5	g_5	$a_{1,5}$	$a_{II,5}$	—	—	$b_{1,5}$	$b_{II,5}$	—	—
6	d_6	g_6	—	$a_{II,6}$	—	—	—	$b_{II,6}$	—	—
7	d_7	g_7	—	$a_{II,7}$	$a_{III,7}$	—	—	$b_{II,7}$	$b_{III,7}$	—
8	d_8	g_8	—	—	$a_{III,8}$	—	—	—	$b_{III,8}$	—
9	d_9	g_9	—	—	$a_{III,9}$	$a_{IV,9}$	—	—	$b_{III,9}$	—
10	d_{10}	g_{10}	—	—	—	$a_{IV,10}$	—	—	—	—
11	d_{11}	g_{11}	—	—	—	$a_{IV,11}$	—	—	—	$b_{IV,11}$
I	D_I	g_I	a_{I-1}				b_{I-1}	—		
II	D_{II}	g_{II}	a_{II-1}	a_{II-II}			b_{II-1}	b_{II-II}		
III	D_{III}	g_{III}	a_{III-1}	a_{III-II}	$a_{III-III}$		b_{III-1}	b_{III-II}	$b_{III-III}$	
IV	D_{IV}	g_{IV}	0	a_{IV-II}	a_{IV-III}	a_{IV-IV}	0	0	b_{IV-III}	b_{IV-IV}
			$-\frac{a_{II-1}}{a_{III-1}}$				$+\frac{b_{II-1}}{b_{I-1}}$			
			$-\frac{a_{III-1}}{a_{I-1}}$	$-\frac{a_{III-II}}{a_{II-II}}$			$+\frac{b_{III-1}}{b_{I-1}}$	$\frac{b_{III-II}}{b_{II-II}}$		
			0	$-\frac{a_{IV-II}}{a_{II-II}}$	a_{IV-III}		0	0	$+\frac{b_{IV-III}}{b_{III-III}}$	
			0	0	0	1	0	0	0	1

измеренных сторон и выполнив преобразования, аналогичные (13), (14), (15), получаем условное уравнение

$$B_1 v_1 + B_2 v_2 + B_3 v_3 + \dots + B_{11} v_{11} + w_b = 0, \quad (19)$$

где

$$B_i = \sum_{j=1}^m b_{ji} \eta_j.$$

опирающейся на два исходных пункта

Преобразованные коэффициенты		Поправки V	Уравненные стороны
A	B		
12	13	14	15
K_a $A_1 = a_{I, 1} \varepsilon_I$ $A_2 = a_{I, 2} \varepsilon_I + a_{II, 2} \varepsilon_{II}$ $A_3 = a_{I, 3} \varepsilon_I$ $A_4 = a_{I, 4} \varepsilon_I$ $A_5 = a_{I, 5} \varepsilon_I + a_{II, 5} \varepsilon_{II}$ $A_6 = a_{II, 6} \varepsilon_{II}$ $A_7 = a_{II, 7} \varepsilon_{II} + a_{III, 7} \varepsilon_{III}$ $A_8 = a_{III, 8} \varepsilon_{III}$ $A_9 = a_{III, 9} \varepsilon_{III} + a_{IV, 9} \varepsilon_{IV}$ $A_{10} = a_{IV, 10} \varepsilon_{IV}$ $A_{11} = a_{IV, 11} \varepsilon_{IV}$	K_b $B_1 = b_{I, 1} \eta_I$ $B_2 = b_{I, 2} \eta_I + b_{II, 2} \eta_{II}$ $B_3 = b_{I, 3} \eta_I$ $B_4 = b_{I, 4} \eta_I$ $B_5 = b_{I, 5} \eta_I + b_{II, 5} \eta_{II}$ $B_6 = b_{II, 6} \eta_{II}$ $B_7 = b_{II, 7} \eta_{II} + b_{III, 7} \eta_{III}$ $B_8 = b_{III, 8} \eta_{III}$ $B_9 = b_{III, 9} \eta_{III}$ $B_{11} = b_{IV, 11} \eta_{IV}$	$v_1 = K_a A_1 + K_b B_1$ $v_2 = K_a A_2 + K_b B_2$ $v_3 = K_a A_3 + K_b B_3$ $v_4 = K_a A_4 + K_b B_4$ $v_5 = K_a A_5 + K_b B_5$ $v_6 = K_a A_6 + K_b B_6$ $v_7 = K_a A_7 + K_b B_7$ $v_8 = K_a A_8 + K_b B_8$ $v_9 = K_a A_9 + K_b B_9$ $v_{10} = K_a A_{10}$ $v_{11} = K_a A_{11} + K_b B_{11}$	$d_1 + v_1$ $d_2 + v_2$ $d_3 + v_3$ $d_4 + v_4$ $d_5 + v_5$ $d_6 + v_6$ $d_7 + v_7$ $d_8 + v_8$ $d_9 + v_9$ $d_{10} + v_{10}$ $d_{11} + v_{11}$
[AA]	[AB]	W_a	
[AB]	[BB]	W_b	
Δ	Δ_a	Δ_b	$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}}$

Преобразующие множители η_j находим по табл. 2, применяя те же правила, что и при определении множителей ε_j .

Уравнительные вычисления цепи треугольников удобно располагать по схеме, которая приведена в табл. 3. Если дирекционный угол линии GF неизвестен, условное уравнение (19) отпадает и соответственно в вычислительной схеме опускаются колонки 8, 9, 10, 11, 13.

5. Цепь треугольников между двумя жесткими сторонами. Здесь возникают три независимых условия: дирекционных углов, абсцисс и ординат. Для составления условного уравнения

дирекционных углов намечается ходовая линия, в точках поворота которой строятся весовые фигуры, как показано на рис. 5. Подставляя (9) в (5), переходим от поправок углов γ_j к поправкам измеренных сторон v_i . В результате получаем

$$-a_1 v_1 + \bar{a}_2 v_2 + a_3 v_3 - \bar{a}_4 v_4 - \dots \pm \bar{a}_{n-1} v_{n-1} \pm a_n v_n + w = 0, \quad (20)$$

где a_i — коэффициенты при поправках промежуточных сторон цепи, которые определяются непосредственно на чертеже из весовых фигур; $\bar{a}_i = (a'_i - a''_i)$ — коэффициенты при поправках связующих сторон вычисляются как разности соответствующих элементов весовых фигур, примыкающих к данной стороне.

В отношении координатных условий возможны два способа решения задачи. Во-первых, из выражений (6) и (9) можно составить условные уравнения абсцисс и ординат

$$\begin{aligned} \frac{a_1(Y_D - Y_B)}{\rho} v_1 - \left[\frac{\bar{a}_2(Y_D - Y_B)}{\rho} - \cos \alpha_2 \right] v_2 - \frac{a_3(Y_D - Y_a)}{\rho} v_3 + \dots \\ \dots - \left[\frac{a'_{n-1}(Y_D - Y_q)}{\rho} - \cos \alpha_{n-1} \right] v_{n-1} + w_x = 0, \quad (21) \\ - \frac{a_1(X_D - X_B)}{\rho} v_1 + \left[\frac{\bar{a}_2(X_D - X_B)}{\rho} + \sin \alpha_2 \right] v_2 + \frac{a_3(X_D - X_a)}{\rho} v_3 + \dots \\ \dots - \left[\frac{a'_{n-1}(X_D - X_q)}{\rho} - \sin \alpha_{n-1} \right] v_{n-1} + w_y = 0, \end{aligned}$$

где a_i, \bar{a}_i — соответствующие коэффициенты уравнения (20), которые определяются из весовых фигур.

Во-вторых, используя свойство взаимозаменяемости, можно условия абсцисс и ординат заменить условиями жестких диагоналей AC и BD , для которых составляется условное уравнение по типу выражения (16).

Мы рассмотрели уравнивание основных типовых систем трилатерации с графоаналитическим определением коэффициентов условных уравнений через построение весовых фигур. Предлагаемый способ прост, нагляден и имеет надежный контроль. Для сетей, где возникают условия суммы (разности) углов, горизонта и жесткого угла все коэффициенты определяются непосредственно на чертеже без каких-либо дополнительных вычислений. В этом мы видим основное достоинство данного способа.

Как показала проверка на ряде примеров уравнивания трилатерации, этот способ обеспечивает необходимую точность вычислений, дает значительную экономию времени и доступен специалистам средней квалификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоныженко В. Ф. О вычислении коэффициентов условных уравнений в трилатерационной сети. Междвед. респ. науч.-техн. сб. «Инженерная геодезия», вып. 1. Киев, 1965.
2. Буткевич А. В. О вычислении коэффициентов и свободных членов условных уравнений в линейных сетях. «Геодезия и картография», 1960, № 11.
3. Бутлер С. А. Уравнивание тригонометрических сетей, определенных длинами сторон. «Геодезист», 1939, № 8, 9.
4. Войславский Л. К. Вычисление свободных членов уравнений поправок при уравнивании линейной сети по методу посредственных измерений. Уч. зап. Рижского политехн. ин-та, т. XVIII. Рига, 1966.

5. Герасимов И. М. Уравнивание линейной триангуляции по способу условных измерений. «Геодезия и картография», 1960, № 1.
6. Романов Н. Г. Уравнивание линейной триангуляции методом площадей. «Геодезия и картография», 1961, № 1.
7. Сомов Г. Е. Градиенты и линии положения в геодезии. Тр. Харьковского с.-х. ин-та им. В. В. Докучаева, т. 53 (90). «Недра», 1967.
8. Терпугов К. Н., Гордеев Ю. А. Уравнивание линейных триангуляций по методу условий с использованием типового условного уравнения и механических правил. Известия вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», 1969, вып. 4.
9. Юршанский З. М. Связь между коэффициентами и свободными членами условных уравнений и уравнений погрешностей. Тр. НИИГАиК, т. 6. Новосибирск, 1954.
10. Krüger L. Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschichten. «Veröff. des Königl. Preuß. Geodätischen Institutes» Neue Folge, Nr 34, Potsdam, 1908.
11. Warchalowski E. Triangulacja nowego typu. «Przegląd geodezyjny». 1948, Nr. 7—8.

Работа поступила
27 декабря 1968 года