

## О ПРОЕКТИРОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ НАБЛЮДЕНИЙ В ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Известно, что в практике целесообразно применять оптимальные программы наблюдений, обладающие одинаковым весом измерений на всех пунктах и направлениях. Следовательно, оптимизация измерений в геодезических сетях сводится к нахождению минимальной по стоимости программы наблюдений, позволяющей определить параметры сети с заданной точностью.

Понятие минимальная стоимость наблюдений имеет смысл только в сетях с разного рода измерениями, например, для линейно-угловых сетей. В сетях трилатерации, пренебрегая изменением стоимости измерения линии от ее длины, или в триангуляции условие минимальной стоимости наблюдений можно заменить минимумом измерений.

Поставленная задача минимизации числа измерений относится к задачам целочисленного программирования. Наиболее универсальный и теоретически обоснованный подход к решению такой задачи изложен в [3]. Однако предложенный алгоритм не учитывает критериев оптимизации, играющих важную роль при нахождении оптимальных программ наблюдений в сетях, имеющих различные назначения.

Энтропия в алгоритме Ю. М. Неймана [3] является обобщенным критерием отбора изменений, не учитывающих целевого назначения сети. Не решен вопрос адаптации этого алгоритма для нахождения оптимальных программ наблюдений в сетях с неоднородным распределением допустимых точностных параметров [2].

Другие алгоритмы нахождения оптимальных программ наблюдений [5—7] основаны на целенаправленном переборе измерений по критерию минимальной или максимальной информативности измерений в зависимости от того, исключаются измерения из программы всех возможных измерений или, наоборот, добавляются в программу необходимых измерений. Однако нахождения очередного измерения максимальной или минимальной информативности требуют обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений столько раз, сколько имеется конкурирующих измерений. В этом состоит основной недостаток данных алгоритмов. Так, нахождение оптимальной программы наблюдений в сети триангуляции из 10 пунктов занимает около 1 ч машинного времени ЭВМЕС-1022, а для сети из 15 пунктов около 3 ч. Зависимость машинного времени, необходимого для нахождения оптимальных программ наблюдений в сети от числа пунктов, имеет вид кубического полинома.

Несмотря на то что нахождение оптимальных программ наблюдений относится к целочисленному программированию, эту

задачу можно свести к задаче распределения весов измерений, только вес может быть равным 0 или 1. При  $p=0$  измерение исключается, при  $p=1$  измерение остается.

Для определения наиболее информативных измерений попытаемся использовать частные производные по весам измерений от целевых функций, определяющихся критериями информативности. Для этого предположим, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  пропорциональны величинам  $(\Phi - \Phi')$ , где  $\Phi'$ ,  $\Phi$  — значение целевой функции до и после исключения очередного измерения из программы наблюдений.

Из этого следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} (\Phi - \Phi')_1^{-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} (\Phi - \Phi')_2^{-1} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} (\Phi - \Phi')_n^{-1}. \quad (1)$$

При увеличении количества пунктов в сети относительная информативность отдельного измерения будет стремиться к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi - \Phi'}{\Phi} = 0. \quad (2)$$

Значение производной  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  для отдельного измерения на интервале  $p=0,1$  стремится к постоянной величине. Следовательно, равенство (1) правомочно при  $n \rightarrow \infty$ .

В основном все целевые функции являются функциями ковариационной матрицы и стоимости измерений. Так как в сетях триангуляции или трилатерации стоимость каждого измерения можно принять одинаковой, то для вычисления производных от целевых функций, выраженных через собственные числа для основных критериев  $A, D, E, I$  — оптимизации, можно воспользоваться выражениями [1]

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial p_K} = - \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_K}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi^D}{\partial p_K} = \Phi^D \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-1} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_K}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi^E}{\partial p_K} = - \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_K}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi^I}{\partial p_K} = \lambda_m^{-1} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_K} - \Phi^I \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_K} \right), \quad (6)$$

где  $\lambda$ ,  $\lambda_i$ ,  $\lambda_m$  — минимальное,  $i$ -е и максимальное собственные числа матрицы коэффициентов нормальных уравнений:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_K} = Z_i^T \frac{\partial N}{\partial p_K} Z_i; \quad (7)$$

$\frac{\partial N}{\partial p_K} = a_K^T a_K$ ;  $a$  — вектор коэффициентов уравнения поправок  $i$ -го измерения;  $Z_i$  — собственный вектор  $i$ -го собственного числа.

Из изложенного следует, что информативность конкурирующих измерений можно определять с помощью приведенных производных, исключая обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений, что значительно позволит экономить машинное время.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим многократную угловую засечку (см. рисунок). Определим информативность

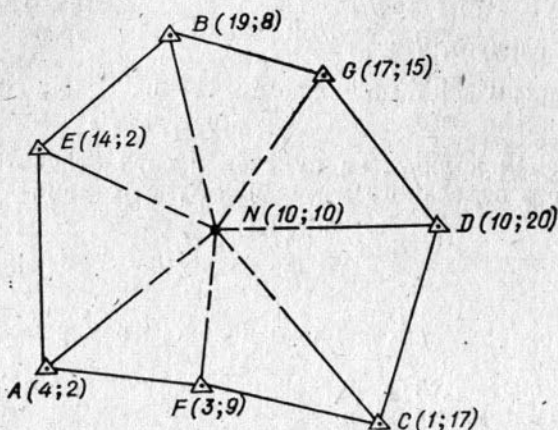


Схема многократной угловой засечки.

измерений и частные производные от целевой функции по  $A$ ,  $D$ ,  $E$  и  $I$ -критериям оптимальности при засечке с трех пунктов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Так как все измерения предлагается производить с одинаковой точностью, то информативность измерений будем определять как функцию корреляционной, а не ковариационной матрицы.

Сначала определим значения  $Sp Q$ ,  $\det Q$ ,  $\lambda_1(Q)$ ,  $\lambda_1(Q)/\lambda_2(Q)$  корреляционной матрицы.

$$\text{Матрица} \quad Q = (A^T A)^{-1}, \quad (8)$$

где матрица коэффициентов уравнений погрешностей

$$A = \begin{pmatrix} -1,65 & 1,24 \\ -0,48 & 2,18 \\ 1,11 & 1,43 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 4,19 & 0,60 \\ 0,60 & 8,34 \end{pmatrix}, \quad Q_{ABC} = \begin{pmatrix} 0,241 & -0,017 \\ -0,017 & 0,121 \end{pmatrix},$$

$$Sp Q_{ABC} = 0,362, \quad \det Q_{ABC} = 0,029.$$

Минимальное и максимальное собственные числа  $Q_{ABC}$  определим по зависимости

$$\lambda_{1,2} = \frac{Q_{11} + Q_{22} \pm \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}}{2}. \quad (9)$$

В этом случае  $\lambda_{1ABC} = 0,243$ ,  $(\lambda_1/\lambda_2) = 2,052$ . Собственные векторы матрицы  $(A^T A)$  определим по следующим зависимостям:

$$\text{при } N_{11} > N_{22}; \quad Z_{21} = -Z_{12}; \quad Z_{22} = Z_{11},$$

$$Z_{11} = \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2N_{12}}{N_{11} - N_{22}}\right); \quad (10)$$

$$Z_{12} = \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2N_{12}}{N_{11} - N_{22}}\right); \quad (11)$$

$$\text{при } N_{11} < N_{22}; \quad Z_{21} = Z_{12}; \quad Z_{22} = -Z_{11}$$

$$Z_{11} = \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2N_{12}}{N_{11} - N_{22}} + 90^\circ\right); \quad (12)$$

$$Z_{12} = \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2N_{12}}{|N_{11} - N_{22}|} + 90^\circ\right). \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,141 & 0,990 \\ 0,990 & -0,141 \end{pmatrix}.$$

Для определения информативности каждого измерения вычислим  $\operatorname{Sp}$ ,  $\det$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_1/\lambda_2$ , исключив из  $A$  соответствующие им уравнения поправок.

Так, для направления  $C-N$

$$A_{AB} = \begin{pmatrix} -1,65 & 1,24 \\ -0,48 & 2,18 \end{pmatrix}, \quad A_{AB}^T A_{AB} = \begin{pmatrix} 2,96 & -0,98 \\ -0,98 & 6,30 \end{pmatrix},$$

$$Q_{AB} = \begin{pmatrix} 0,357 & 0,056 \\ 0,056 & 0,167 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{Sp} Q_{AB} = 0,523$ ,  $\det Q_{AB} = 0,057$ ,  $\lambda_1 = 0,341$ ,  $(\lambda_1/\lambda_2) = 2,441$ . Информативность измерения по направлению  $C-N$  определяем следующими зависимостями:

$$\operatorname{Sp}_{C-N} = \operatorname{Sp}_{AB} - \operatorname{Sp}_{ABC} = 0,162,$$

$$\det_{C-N} = \det_{AB} - \det_{ABC} = 0,028,$$

$$\lambda_{1C-N} = \lambda_{1AB} - \lambda_{1ABC} = 0,128, \quad (14)$$

$$(\lambda_1/\lambda_2)_{C-N} = (\lambda_1/\lambda_2)_{AB} - (\lambda_1/\lambda_2)_{ABC} = 0,39.$$

Информативность измерений по остальным направлениям равна

	$\operatorname{Sp}$	$\det$	$\lambda_1$	$\lambda_1/\lambda_2$
$A-N$	2,396	0,304	2,887	18,73
$B-N$	0,179	0,043	0,062	-0,75

Теперь определим частные производные от целевой функции для каждого измерения по  $A$ ,  $D$ ,  $E$  и  $I$ -критериям оптимальности согласно зависимостям (3—7).

Для измеренного направления  $C-N$

$$\frac{\partial N}{\partial p_{C-N}} = a_{C-N}^T a_{C-N} = \begin{pmatrix} 1,23 & 1,59 \\ 1,59 & 2,03 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial p_{C-N}} = Z_1^T \frac{\partial N}{\partial p_{C-N}} Z_1 = 2,466; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial p_{C-N}} = Z_2^T \frac{\partial N}{\partial p_{C-N}} Z_2 = 0,806; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi^A}{\partial p_{C-N}} = -0,083, \quad \frac{\partial \Phi^D}{\partial p_{C-N}} = 0,014,$$

$$\frac{\partial \Phi^E}{\partial p_{C-N}} = -0,806, \quad \frac{\partial \Phi^I}{\partial p_{C-N}} = 0,198.$$

Для измерений по направлениях  $A-N$ ,  $B-N$  частные производные равны

	$\frac{\partial \Phi^A}{\partial p}$	$\frac{\partial \Phi^D}{\partial p}$	$\frac{\partial \Phi^E}{\partial p}$	$\frac{\partial \Phi^I}{\partial p}$
$A-N$	-0,207	0,026	-3,270	-1,395
$B-N$	-0,072	0,017	-0,030	1,197.

Из выполненных вычислений видно, что минимальной информативностью по  $A$  и  $D$ -критериям оптимальности обладает измерение, выполненное по направлению  $C-N$ , а по критериям  $E$  и  $I$  — измерение, выполняемое по направлению  $B-N$ . Из полученных значений частных производных минимальное по  $D$ -критерию соответствует направлению  $C-N$ , а  $E$ -критерию — измерению по направлению  $B-N$ . По  $A$  и  $I$ -критериям минимальные значения производных не соответствуют измерениям минимальной информативности. Это несоответствие, как будет показано дальше, получилось из-за малого числа избыточных измерений. Для сравнения информативности измерений по критерию максимального энтропийного объема с  $A$ ,  $D$ ,  $E$  и  $I$ -критериями оптимальности, выполним вычисления, аналогичные [4]. Мерой сравнения наилучшей комбинации необходимых измерений является величина

$$\eta = \frac{\prod_{j=1}^{2k} \sqrt{\sum_{i=1}^n a^2}}{\det A^T A}. \quad (18)$$

В нашем случае комбинация необходимых измерений будет состоять из измерений по двум направлениям. Подобных комбинаций у нас будет три. Измерение, не участвующее в наилуч-

шей комбинации, будет иметь минимальную информативность. Так, вычисленные величины  $\eta$  составляют  $\eta_{AN}=0,328$ ;  $\eta_{BN}=0,271$ ;  $\eta_{CN}=0,478$  соответственно. Индекс  $AN$  означает, что измерение по направлению  $AN$  не участвует в паре наблюдений. Из полученных величин  $\eta$  наилучшей является засечка из измерений по направлениям  $A-N$  и  $C-N$ . Следовательно, измерение  $B-N$  имеет минимальную информативность при засечке пункта  $N$  с пунктов  $A, B, C$ . В данном случае измерение по направлению  $B-N$  обладает минимальной информативностью по  $E$  и  $I$  критериям оптимальности и критерию максимального энтропийного объема. Следовательно, при выборе критерия информативности измерений для построения оптимальных программ наблюдений необходимо руководствоваться допустимыми точностями требованиями к сети и ее целевым назначением. Как показывают специальные исследования в инженерных сетях, наиболее эффективен  $A$ -критерий оптимальности. Для геодезических сетей на геодинамических полигонах следует применять  $D$  и  $E$ -критерии оптимальности в зависимости от целевого назначения полигона и требований к точности определения компонент деформаций земной поверхности. Критерий  $I$  оптимальности следует применять для сетей с плохо обусловленной системой нормальных уравнений.

На примере многократной угловой засечки исследуем изменения функциональной зависимости между информативностью измерений и частными производными по весам измерений от целевой функции. Для этого определена информативность и

частные производные  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  по каждому измерению для много-

кратных засечек с различным количеством направлений от трех до семи (см. рисунок). Результаты вычислений по  $A, D, E$  и  $I$ -критериям оптимальности представлены в табл. 1—4. В нижней части табл. 1—4 для каждой многократной засечки представ-

лены уравнения регрессии вида  $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = a(\Phi' - \Phi) + b$  и соответ-

ствующие им средние квадратические отклонения  $m$ . Представленные результаты показывают, что с увеличением числа избыточных измерений  $n$  информативность измерений уменьшается, абсолютное значение коэффициента  $a$  в регрессионных уравнениях возрастает, а пропорциональное соотношение между

информативностью измерений и  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  становится все более строгим.

Для  $A$  и  $D$ -критериев оптимальности значение  $m$  уменьшается с увеличением  $n$ . Это свидетельствует об устойчивости и закономерном изменении постоянной функциональной взаимосвязи

между информативностью измерений и  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  с увеличением количества избыточных измерений.

Сравнение информативности измерений многократной угловой засечки с частными производными от целевой функции по А-критерию оптимальности

Таблица 1

Наименование направлений	Количество направлений									
	3		4		5		6		7	
	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-4}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-4}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-4}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-4}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-4}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-4}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-4}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-4}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-4}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-4}$
A-N	23958	-2078	1525	-696	1227	-611	383	-257	187	-142
B-N	1786	-718	1652	-686	1136	-558	209	-152	165	-124
C-N	1616	-827	643	-408	291	-216	141	-114	142	-115
D-N			1227	-606	506	-325	396	-264	276	-196
E-N					421	-264	409	-260	368	-238
F-N							619	-307	296	-180
G-N									211	-150
Уравнение регрессии	-0,059x	-0,067	-0,293x	-0,023	-0,411x	-0,010	0,425x	-0,007	-0,528x	-0,004
$m = \sqrt{\frac{ VV }{n}}$	4,51 · 10 <sup>-3</sup>		1,58 · 10 <sup>-3</sup>		0,89 · 10 <sup>-3</sup>		2,08 · 10 <sup>-3</sup>		0,53 · 10 <sup>-3</sup>	

Сравнение информативности измерений многократной угловой засечки с частными производными от целевой функции по D-критерию оптимальности

Таблица 2

Наименование направлений	Количество направлений									
	3		4		5		6		7	
	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-3}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-3}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-3}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-3}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-3}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$
A-N	30420	-3159	1701	-3810	900	-5655	216	-7541	100	7887
B-N	4294	-2068	2008	-4095	926	-5744	168	-6301	103	8054
C-N	2767	-1693	821	-2558	310	-2903	104	-4390	74	6233
D-N			1463	-3545	496	-4027	221	-7592	128	9448
E-N					534	-4216	255	-8308	172	-11582
F-N							450	-11518	202	-12810
G-N									128	-9459
Уравнение регрессии	-47,89x	-1700	-1316,09x	-15,27	-4418,63x	-17,16	-20072,31x	-28,92	-50676,37x	-28,09

Сравнение информативности измерений многократной угловой засечки с частными производными от целевой функции по E-критерию оптимальности

Количество направлений

Наименование направлений	3		4		5		6		7	
	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-1}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-1}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-1}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-1}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-1}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$
A-N	23874	-327	1521	-411	1205	-357	374	-372	149	-201
B-N	624	-3	1528	-165	1058	-277	9	2	74	-71
C-N	1280	-80	478	-9	143	-49	55	-45	116	-178
D-N			1152	-194	353	-103	392	-392	274	-414
E-N					12	-1	362	-287	362	-487
F-N							468	-144	72	1
G-N									120	-109
Уравнение регрессии	-1,251x	-0,294	-25,777x	+1,083	-27,970x	-0,022	-65,709x	-0,257	-159,709x	+0,577
$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n}}$	203,35 · 10 <sup>-3</sup>		899,78 · 10 <sup>-3</sup>		135,70 · 10 <sup>-3</sup>		665,70 · 10 <sup>-3</sup>		588,63 · 10 <sup>-3</sup>	

Таблица 4

Сравнение информативности измерений многократной угловой засечки с частными производными от целевой функции по I-критерию оптимальности

Количество направлений

Наименование направлений	3		4		5		6		7	
	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-2}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-2}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-2}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-2}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$	$(\Phi-\Phi')$ $10^{-2}$	$\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ $10^{-2}$
A-N	1873	-139	136	-59	161	-73	64	-40	19	-5
B-N	-75	119	119	19	117	-35	-38	40	-12	22
C-N	39	20	23	39	-15	24	-11	17	16	-7
D-N			90	1	9	17	69	-44	59	-41
E-N					-66	67	49	-14	75	-47
F-N							35	40	-38	58
G-N									-3	20
Уравнение регрессии	-0,113x	+0,690	-0,649x	+0,596	-0,576x	+0,239	-0,699x	+0,194	-0,922x	+0,156
$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n}}$	355,78 · 10 <sup>-3</sup>		239,42 · 10 <sup>-3</sup>		61,970 · 10 <sup>-3</sup>		172,54 · 10 <sup>-3</sup>		87,45 · 10 <sup>-3</sup>	



Для  $E$  и  $I$ -критериев оптимальности закономерности между  $m$  и  $n$  не наблюдаются. Следовательно, в алгоритмах, основанных на принципе последовательного исключения малоинформативных измерений, возможно определение информативности измерений по  $A$  и  $D$ -критериям оптимальности с помощью частных производных  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ . Как показали специальные исследования,

в сетях с количеством пунктов более десяти предложенная методика распространяется и на  $E$  и  $I$ -критерии. Стоимость моделей, полученных по методу сравнения частных производных и по методу сравнения информативности измерения, имеют различия в пределах 15%.

1. *Гарасименко М. И.* Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. Владивосток, 1983. 2. *Коробочкин М. И., Зайцева Н. С.* О методах проектирования геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1968. № 4. С. 10—14. 3. *Нейман Ю. М.* Алгоритм проектирования геодезического построения на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1966. № 6. С. 33—45. 4. *Тамугис З. П.* Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М., 1979. 5. *Третьяк К. Р.* Один из методов проектирования сетей трилатерации с помощью ЭВМ // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 36. С. 99—103. 6. *Третьяк К. Р.* Оптимальное проектирование измерений в линейно-угловых сетях инженерного назначения // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 43. С. 99—103. 7. *Банов Б.* Алгоритм за избор на оптимален брои измервания в геодезически мрежи // Геодезия, картография и землеустройство. 1981. Вып. 9. С. 20—23.