УДК 528.061.2

Д. И. МАСЛИЧ, Л. С. ХИЖАК

РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Вопросам исследования точности геодезического нивелирования посвящен ряд работ [2, 3], однако в них недостаточно отражено влияние высоты прохождения визирного луча над подстилающей поверхностью на рассматриваемую точность. С учетом этого в настоящей работе авторы поставили своей целью детально рассмотреть вопрос о точности геодезического нивелирования для дневного периода, когда в основном производится измерение зенитных расстояний.

Формулы геодезического нивелирования имеют следующий вид: для одностороннего нивелирования

$$h = s\,\mathrm{ctg}\,z\left(1 + \frac{H_m + N_m}{R}\right) + i_1 + l_2 + \frac{1-k}{2R}s^2 + (u_1 - u_m)\frac{s}{\rho''} + \Delta E, \quad (1)$$

для двустороннего нивелирования

$$h = s\,\mathrm{tg}\,\frac{z_2 - z_1}{2}\left(1 + \frac{H_m + N_m}{R}\right) + \frac{i_1 + l_1}{2} - \frac{i_2 + l_2}{2} + \frac{(k_2 - k_1)s^2}{4R} + \left(\frac{u_1 + u_2}{2} - u_m\right)\frac{s}{\rho''} + \Delta E, \quad (2)$$

где s — проекция линии нивелирования на эллипсоид; z_1, z_2 — измеренные зенитные расстояния; R — радиус кривизны нормального сечения вдоль линии нивелирования; u — компонент уклонения ствеса вдоль линии нивелирования; u_m — среднее интегральное уклонение отвеса вдоль линии нивелирования; ΔE — поправка за переход от измеренной разности высот к разности нормальных высот; k — коэффициент рефракции; $H_m = \frac{1}{2}(H_1' + H_2')$ — среднее из приближенных высот точек над поверхностью квазигеоида; N_m — среднее из приближенных высот соответствующих точек квазигеоида над эллипсоидом; i_1, i_2 — высоты инструментов; l_1, l_2 — высоты визирных целей.

При определении средней квадратической ошибки превышения h в дневной период m_h мы не будем учитывать ошибок вычисления i, v, R, s, а также поправок за уклонения отвесных линий и непараллельность уровенных поверхностей. С учетом этого для одностороннего нивелирования можем записать

$$m_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{m_z^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial k}\right)^2 m_k^2, \quad (3)$$

где m_z — средняя квадратическая ошибка определения z, m_k — средняя квадратическая ошибка определения k, или

$$m_h^2 = \frac{s^2}{\sin^4 z}\;\frac{m_z^2}{\rho^2} + \frac{s^4}{4R^2}m_k^2. \quad (4)$$

Ошибку m_k можно рассматривать как состоящую из двух ошибок, то есть

$$m_k^2 = m_{kh}^2 + m_{kt}^2, \tag{5}$$

где m_{kh} — средняя квадратическая ошибка, вызванная изменением коэффициента рефракции с высотой; m_{kt} — средняя квадратическая ошибка k, обусловленная изменением коэффициента рефракции в течение времени. Таким образом, мы не учитываем изменения коэффициента рефракции от направления к направлению при одной и той же эквивалентной высоте, так как эти изменения значительно меньше изменений, вызванных первыми двумя факторами. Поэтому m_k, вычисленное по выражению (5), будет несколько преуменьшенным. В дальнейшем мы оценим ошибки, вызванные нашим допущением. Подставляя m_k из (5) в (4), получаем

$$m_h^2 = \frac{s^2}{\sin^4 z}\,\frac{m_z^2}{\rho^2} + \frac{s^4}{4R^2} m_{kh}^2 + \frac{s^4}{4R^2} m_{kt}^2. \tag{6}$$

Обработка обширного экспериментального материала показала [4], что m_z и m_{kt} могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} m_z &= \alpha_z + \beta_z \xi, \\ m_{kt} &= \alpha_{kt} + \beta_{kt}\xi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $\xi = \frac{1}{h_э}$; α и β — некоторые коэффициенты, определяемые экспериментальным путем. Подставляя последние в формулу (6) и принимая $\sin z = 1$ (что можно допустить при незначительных углах), получаем

$$m_h^2 = s^2\left[\frac{\alpha_z^2}{\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}^2}{4R^2}s^2 + \left(2\,\frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2} + 2\,\frac{\alpha_{kt}\beta_{kz}}{4R^2}s^2\right)\xi + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\beta_z^2}{\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2}{4R^2}s^2\right)\xi^2 + \frac{m_{kt}^2}{4R^2}s^2\right]. \tag{8}$$

Остановимся далее на последнем члене формулы (8). Здесь можно рассматривать два случая:

1) когда зависимость k от высоты известна и может быть представлена в виде [2]

$$k_0 = \alpha_k + \beta_k \xi, \tag{9}$$

а коэффициенты α_k и β_k получают экспериментальным путем, и 2) когда при вычислениях превышений принято среднее для данного района значение коэффициента рефракции.

В первом случае средняя квадратическая ошибка будет равна ошибке, вызванной неточностью определения зависимости коэффициента рефракции от высоты. Если предположим, что эта зависимость определяется уравнением (9), а α_k и β_k получены из экспериментальной обработки материала методом регрессионного анализа [1], можно принять

$$m_{kh} = S_k, \tag{10}$$

где

$$S_k = \frac{s_k}{\sqrt{n-2}}\sqrt{1 + \frac{n(\xi_h - \xi_0)^2}{\sum\limits_1^n (\xi_i - \xi_0)}} \tag{11}$$

и

$$s_k = \frac{\sum_1^n [k_0 - \alpha_k - \beta_k(\xi_i - \xi_0)]^2}{n}, \tag{11'}$$

где ξ_h — фиксированное значение ξ, ξ_0 — среднее значение ξ.

Учитывая это для первого случая, формулу (8) запишем в виде:

$$m_h^2 = \left[\frac{\alpha_z^2}{\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}^2}{4R^2}s^2 + 2\xi\left(\frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}\beta_{kt}}{4R^2}s^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\beta_z^2}{\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2}{4R^2}s^2\right)\xi^2 + \frac{S_k^2}{4R^2}s^2\right]\cdot s^2. \tag{12}$$

Во втором случае примем, что

$$m_{kh} = k_0 - \bar{k} \tag{13}$$

или, учитывая (9),

$$m_{kh} = \alpha_k + \beta_k\xi - \bar{k}, \tag{14}$$

где $\bar{k}$ — принятое для данного района значение коэффициента рефракции. Тогда

$$m_h^2 = s^2\left[\frac{\alpha_z^2}{\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}^2 + (a_k - \bar{k})^2}{4R^2}s^2 + 2\xi\left(\frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}\beta_{kt} + \beta_k(\alpha_k - \bar{k})}{4R^2}s^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\beta_z^2}{\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2 + \beta_k^2}{4R^2}s^2\right)\xi^2\right]. \tag{15}$$

Формула (15) позволяет оценить величину m_h, если не учитывается изменение коэффициента рефракции с высотой.

Для вычисления средней квадратической ошибки m_h значения параметров α_z, β_z, α_k, β_k, α_{kt}, β_{kt}, $S_к$ должны быть получены экспериментальным путем. Поэтому формулы (12) и (15) можно назвать полуэмпирическими.

Указанные параметры, полученные нами из обработки экспериментального материала, равны:

$$\alpha_z = +1{,}38, \quad \alpha_k = +0{,}193, \quad \alpha_{kt} = +0{,}005,$$
$$\beta_z = +6{,}490, \quad \beta_k = -1{,}517, \quad \beta_{kt} = +0{,}858,$$
$$S_k = \pm 0{,}012 \text{ при } \xi_h = 0{,}025,$$
$$S_k = \pm 0{,}031 \text{ при } \xi_h = 0{,}200.$$

Для удобства вычислений s выразим в десятках километров, а m_h — в метрах. Тогда после вычислений формулы (12) и (15) принимают вид:

для первого случая

$$m_h^2 = s^2[0{,}00448 + 0{,}00154\cdot s^2 + (0{,}0421 + 0{,}529\cdot s^2)\xi +$$
$$+ (0{,}099 + 45{,}24\cdot s^2)\xi^2 + 61{,}46S_k^2\cdot s^2] \tag{16}$$

и для второго

$$m_h^2 = s^2[0{,}00448 + 0{,}0686\cdot s^2 + (0{,}0421 - 5{,}632\cdot s^2)\xi +$$
$$+ (0{,}099 + 187{,}1\cdot s^2)\xi^2]. \tag{17}$$

Результаты вычислений по формулам (16) и (17) для различных эквивалентных высот и расстояний приведены в табл. 1 и 2 для обоих

Таблица 1

Значения m_h для одностороннего нивелирования, вычисленные с учетом изменения k с высотой

s в км \ $h_э$ в м	5	7,5	10	15	20	30	40
5	0,36	0,25	0,19	0,14	0,11	0,08	0,07
10	1,41	0,97	0,75	0,54	0,42	0,30	0,24
15	3,17	2,25	1,68	1,20	0,94	0,67	0,52
20	—	—	2,99	2,12	1,67	1,19	0,92

Таблица 2

Значения m_h для одностороннего нивелирования, вычисленные без учета изменения k с высотой

s в км \ $h_э$ в м	5	7,5	10	15	20	30	40
5	0,64	0,41	0,26	0,19	0,13	0,08	0,06
10	2,54	1,63	1,18	0,73	0,51	0,31	0,22
15	5,70	3,66	2,64	1,63	1,14	0,68	0,49
20	—	—	4,70	2,90	2,02	1,20	0,86

рассмотренных нами случаев. Во втором случае среднее значение k принято равным 0,16.

Анализируя результаты, приведенные в этих таблицах, нетрудно заметить, что для реально существующих отношений между s и $h_э$ значения ошибок, полученных при учете зависимости k от эквивалентной высоты, значительно меньше (примерно в два раза), чем в том случае, когда эта зависимость не учитывается. Следует заметить, что при выводе формул (8) и (12) мы не учитывали изменений величины k и m_k от направления к направлению, кроме того, k, m_z и m_k могут строго не подчиняться зависимостям вида (7), и количество измерений, из которого получены значения α_k, β_k, α_{kt}, β_{kt}, α_z, β_z и S_k, ограничено. Поэтому, естественно, и значения указанных параметров будут иметь погрешности.

Определим, с какой точностью мы вычисляем среднюю квадратическую ошибку по выведенным выше формулам, если параметры α_z, β_z, α_{kt}, β_{kt}, S_k найдены из обработки экспериментального материала методом регрессионного анализа, причем, рассматривать будем лишь точность определения m_h по формуле (12). Для этого перепишем формулу (6) в виде

$$m_h = \sqrt{s^2 \frac{m_z^2}{\rho^2} + \frac{s^4}{4R^2} m_{kt}^2 + \frac{s^4}{4R^2} m_{kh}^2} \tag{18}$$

и найдем среднюю квадратическую ошибку m_{m_h} ошибки m_h, если известны средние квадратические ошибки m_{m_z}, $m_{m_{kt}}$ и $m_{m_{kh}}$ ошибок m_z, m_{kt} и m_{kh}.

В этом случае ошибку m_h можно считать функцией независимых аргументов m_z, m_{kt} и m_{kh}. Не приводя подробно выводов, запишем окончательную формулу, по которой можно вычислить интересующую нас ошибку:

$$m_{m_h} = \sqrt{\frac{s^4 m_z^2}{m_h^2 \rho^4} m_{m_z}^2 + \frac{s^8 m_{kt}^2}{16\, m_h^2 R^4} m_{m_{kt}}^2 + \frac{s^8 m_{kh}^2}{16\, m_h^2 R^4} m_{m_{kh}}^2}. \tag{19}$$

Формула (19) выведена в предположении, что параметры α_z, β_z, α_{kt}, β_{kt}, α_k, β_k получены из экспериментального материала методом регрессионного анализа. Тогда значения m_z и m_{kt} можно получить из уравнений (7), а m_{kh} по формуле (10) в предположении, что зависимость k от высоты учитывается. Величины m_{m_z}, и $m_{m_{kt}}$ можно определить аналогично определению m_{m_n}, то есть

$$m_{m_z} = S_z, \quad m_{m_{kt}} = S_{kt}, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} S_z &= \frac{s_z}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \frac{n(\xi_h - \xi_0)^2}{\sum\limits_1^n (\xi_i - \xi_0)^2}}, \\ S_{kt} &= \frac{s_{kt}}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \frac{n(\xi_h - \xi_0)^2}{\sum\limits_1^n (\xi_i - \xi_0)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Средняя квадратическая ошибка $m_{m_{kh}}$ в случае, если учитывалась зависимость k от эквивалентной высоты по (9), будет представлять собой среднюю квадратическую ошибку величины S_k, определяемой по формуле (11). Тогда, приближенно приняв, что

$$m_{S_k} = \frac{S_k}{\sqrt{2(n-2)}}, \tag{22}$$

для $m_{m_{kh}}$ получаем

$$m_{m_{kh}} = \frac{s_k}{\sqrt{n-2} \cdot \sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{n(\xi_h - \xi_0)^2}{\sum\limits_1^n (\xi_i - \xi_0)^2}}. \tag{23}$$

Для вычисления m_{m_h} по формуле (19) значения параметров получены из обработки упоминаемого выше экспериментального материала. Они оказались следующими: $S_{kt}=0{,}006$ при $\xi_h=0{,}025$; $S_{kt}=0{,}018$ при $\xi_h=0{,}200$; $S_z=0{,}12$ при $\xi_h=0{,}025$ и $S_z=0{,}18$ при $\xi_h=0{,}200$.

Вычислять средние квадратические ошибки по формулам (16) и (17) мы можем в том случае, если для каждого направления известны эквивалентные высоты. Однако в настоящее время в производственных условиях эквивалентные высоты не вычисляются и поэтому нет возможности учитывать изменение коэффициента рефракции с высотой, а также изменение точности его определения, хотя такой учет значительно повысил бы точность современного метода геодезического нивелирования. Поэтому преобразуем формулы (12) и (15) с таким расчетом, чтобы при некоторых предположениях исключить из них величины ξ. Как известно, имеется некоторая корреляционная связь между эквивалентной высотой и расстоянием [2], то есть можно принять, что

$$\frac{h_э}{s} = l \tag{24}$$

и считать l постоянной величиной для условий, в которых производится геодезическое нивелирование. Тогда, подставляя вместо $h_э$ его значение, полученное из (24), в формулу (12), последнюю перепишем в виде

$$m_h^2 = \frac{\beta_z^2}{\rho^2 l^2} + 2\frac{\alpha_z \beta_z}{\rho^2 l} s + \left(\frac{\alpha_z^2}{\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2}{4R^2 l^2}\right) s^2 + 2\frac{\alpha_{kt}\beta_{kt}}{4R^2 l} s^3 + \left(\frac{\alpha_{kt}^2}{4R^2} + \frac{S_k^2}{4R^2}\right) s^4. \tag{25}$$

И соответственно для второго случая находим

$$m_h^2 = \frac{\beta_z^2}{l^2\rho^2} + 2\frac{\alpha_z\beta_z}{l\rho^2}s + \left(\frac{\alpha_z^2}{\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2 + \beta_k^2}{4lR^2}\right)s^2 +$$

$$+ 2\frac{\alpha_{kt}\beta_{kt} + \beta_k(\alpha_k - \bar{k})}{4lR^2}s^3 + \frac{\alpha_{kt} + (\alpha_k - \bar{k})}{4R^2}s^4. \qquad (26)$$

Из обработки наших материалов величина $l = 0{,}0025$.

При таком значении l и для расстояний от 5 до 20 *км* первый член в формулах (25) и (26) пренебрегаемо мал по сравнению с остальными членами, и поэтому его можно не учитывать. Тогда, подставляя в указанные формулы значения величин α_z, β_z, α_{kt}, β_{kt}, α_k, β_k и S_k и пренебрегая первым членом, окончательно получаем формулы для вычисления средних квадратических ошибок разности высот геодезического нивелирования для случая, когда учитывалось изменение k с высотой:

$$m_h^2 = 0{,}0017 \cdot s + 0{,}077s^2 + 0{,}0211 \cdot s^3 + 0{,}00154 \cdot s^4 + 61{,}46S_k \cdot s^4, \quad (27)$$

и для случая, когда k для данного района принималось постоянным:

$$m_h^2 = 0{,}0017 \cdot s + 0{,}3039 \cdot s^2 - 0{,}2255s^3 + 0{,}0686s^4, \qquad (28)$$

где s — длина линии визирования в десятках километров.

При получении формулы (28) $\bar{k}$ принималось равным 0,16. Эту величину коэффициента можно считать предельной для дневного периода в приземном слое воздуха. Здесь необходимо заметить, что предвычисленные по формулам (27) и (28) средние квадратические ошибки геодезического нивелирования будут соответствовать действительности, если l, полученное из зависимости (24), будет равно среднему значению $l = 0{,}0025$, которое принималось при расчетах. При значительных уклонениях для отдельных направлений l от его среднего значения необходимо так или иначе определять эквивалентную высоту, и расчеты выполнять по формуле (12), иначе мы можем получить большие расхождения между предвычисленными и полученными значениями m_h.

Перейдем к рассмотрению вопроса оценки точности двухстороннего геодезического нивелирования. С этой целью обратимся к формуле (2), для которой значение средней квадратической ошибки m_h' выразится формулой.

$$m_h'^2 = \frac{s^2}{4\rho^2}(m_{z_1}^2 + m_{z_2}^2) + \frac{s^4}{16R^2}m_{\Delta k}^2, \qquad (29)$$

если, как и ранее, пренебречь ошибками определения высот инструментов, визирных целей, длин линий, а также ошибками за уклонение отвесных линий и непараллельность уровенных поверхностей. В формуле (29) $m_{\Delta k}$ — средняя квадратическая ошибка разности коэффициентов рефракции.

На величину $m_{\Delta k}$ оказывают влияние три источника ошибок, и поэтому ее можно представить в виде

$$m_{\Delta k}^2 = m_{\Delta k_9}^2 + m_{k_1}^2 + m_{k_2}^2, \qquad (30)$$

где $m_{\Delta k_9}$ — средняя квадратическая ошибка, вызванная неравенством прямых и обратных эквивалентных высот; m_{k_1}, m_{k_2} — соответственно ошибки, вызванные изменением коэффициентов k_1 и k_2 в течение времени. Здесь, как и выше, мы будем рассматривать два случая: 1) когда изменение коэффициента рефракции с высотой известно и может быть представлено уравнением (9) (параметры α_k и β_k в этом уравнении должны быть определены из экспериментального материала) и 2) когда для данного района принимается постоянный коэффициент рефракции.

В первом случае ошибка $m_{\Delta k_0}$ будет представлять собой ошибку определения коэффициента рефракции из уравнения (9) для данной высоты. Поэтому ее можно принять равной

$$m_{\Delta k_0} = S_{k_1}^2 + S_{k_2}^2, \tag{31}$$

где S_{k_1} и S_{k_2} — ошибки определения k на высотах ξ_1 и ξ_2. Если обработку экспериментального материала с целью определения α_k и β_k вести методом регрессионного анализа, то величины S_{k_1} и S_{k_2} следует вычислять по формуле (11).

Если, кроме того, учитывать, что ошибки m_{k_1} и m_{k_2}, как показано раньше, изменяются с высотой, последние можем представить в виде

$$\left.\begin{aligned} m_{k_1}^2 &= (\alpha_{kt} + \beta_{kt}\xi_1)^2, \\ m_{k_2}^2 &= (\alpha_{kt} + \beta_{kt}\xi_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

и аналогично для средних квадратических ошибок зенитных расстояний $m_{z_1}^2$ и $m_{z_2}^2$ можно записать:

$$\left.\begin{aligned} m_{z_1}^2 &= (\alpha_z + \beta_z\xi_1)^2, \\ m_{z_2}^2 &= (\alpha_z + \beta_z\xi_2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Учитывая (30), (32) и (33), формулу (29) после некоторых преобразований запишем в виде

$$m_{h\,\text{ср}}^2 = \frac{\alpha_z^2}{2\rho^2}s^2 + \frac{\alpha_{kt}}{8R^2}s^4 + \left(\frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2}s^2 + \frac{\alpha_{kt}\beta_{kt}}{4R^2}s^4\right)\xi_{\text{ср}} + \left(\frac{\beta_z^2}{2\rho^2}s^2 + \frac{\beta_{kt}^2}{8R^2}s^4\right)\xi_{\text{ср}}^2 + \left(\frac{\beta_z^2}{8\rho^2}s^2 + \frac{\beta_{kt}^2}{32R^2}s^4\right)\Delta\xi^2 + \frac{S_{k_1}^2 + S_{k_2}^2}{16R^2}. \tag{34}$$

Здесь

$$\xi_{\text{ср}} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \quad \frac{1}{2}\Delta\xi = \xi_{\text{ср}} - \xi_1. \tag{35}$$

Для одновременного геодезического нивелирования величины m_{k_1} и m_{k_2} будут равны 0, следовательно, в этом случае формула (34) примет вид:

$$\overline{m}_h^2 = s^2\left[\frac{\alpha_z^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2}\xi_{\text{ср}} + \frac{\beta_z^2}{8\rho^2}\Delta\xi^2 + \frac{S_{k_1}^2 + S_{k_2}^2}{16R^2}\cdot s^2 + \frac{\beta_z^2}{2\rho^2}\xi_{\text{ср}}^2\right]. \tag{36}$$

Преобразуем формулы (34) и (36). С этой целью положим

$$h_э = l\cdot s, \tag{37}$$

тогда

$$m_{h\,\text{ср}}^2 = \frac{\beta_z^2}{2l^2\rho^2} + \frac{\alpha_z\beta_z}{l\rho^2}s + \left(\frac{\alpha_z^2}{2\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2}{8l^2\rho^2}\right)s^2 + \frac{\alpha_{kt}\beta_{kt}}{4lR^2}s^3 + \frac{\alpha_{kt}^2}{8R^2}s^4 + \left(\frac{\beta_z^2}{8\rho^2}s^2 + \frac{\beta_{kt}^2}{32R^2}s^4\right)\Delta\xi^2 + \frac{S_{k_1}^2 + S_{k_2}^2}{16R^2}s^4; \tag{38}$$

а для одновременного нивелирования будем иметь

$$\overline{m}_h^2 = \frac{\beta_z^2}{2l^2\rho^2} + \frac{\alpha_z\beta_z}{l\rho^2}s + \frac{\alpha_z^2}{2\rho^2}s^2 + \frac{\beta_z^2}{8\rho^2}s^2\Delta\xi^2 + \frac{S_{k_1}^2 + S_{k_2}^2}{16R^2}s^4. \tag{39}$$

Как указывалось ранее для материала, который был использован при определении коэффициентов α_k, β_k, α_{kt}, β_{kt} и т. д., величина $l=0,0025$. Принимая это значение l, а также полагая что

$$\frac{\Delta h_э}{h_{э\,ср}} = \frac{\Delta\xi}{\xi_{ср}} = 0,3, \tag{40}$$

где $\Delta h_э = h_{э\,пр} - h_{э\,обр}$, получаем окончательные формулы для средних квадратических ошибок двухстороннего неодновременного и двухстороннего одновременного нивелирования в первом случае, то есть в предположении, что изменение коэффициента k с высотой учтено:

$$m^2_{h\,ср} = 0,00084 \cdot s + 0,03853 \cdot s^2 + 0,0106 \cdot s^3 + 0,00077 \cdot s^4 + \\ + (0,0495 \cdot s^2 + 22,68 s^4)\,\Delta\xi^2 + 30,802\,(S^2_{k_1} + S^2_{k_2}) \cdot s^4, \tag{41}$$

где s — длина линии в десятках *км*

и $$\overline{m}^2_h = 0,00084 \cdot s + 0,00224 \cdot s^2 + 0,0495 s^2 \Delta\xi^2 + 30,802\,(S^2_{k_1} + S^2_{k_2}) \cdot s^4. \tag{42}$$

Результаты вычислений по формулам (34) и (36) для различных расстояний и эквивалентных высот приведены соответственно в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Значения $m_{h\,ср}$ для двухстороннего нивелирования, вычисленные с учетом изменения k с высотой

$h_э$ в *м* / s в *км*	5	7,5	10	15	20	30	40
5	0,26	0,18	0,14	0,10	0,08	0,06	0,05
10	1,03	0,71	0,55	0,39	0,30	0,22	0,17
15	2,26	1,55	1,20	0,85	0,67	0,49	0,37
20	—	—	2,13	1,51	1,19	0,86	0,66

Таблица 4

Значения $\overline{m}_h$ для одновременного нивелирования, вычисленные с учетом изменения k с высотой

$h_э$ в *м* / s в *км*	5	7,5	10	15	20	30	40
5	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04	0,03
10	0,20	0,18	0,17	0,16	0,14	0,11	0,08
15	0,42	0,39	0,36	0,33	0,29	0,24	0,17
20	—	—	0,63	0,58	0,51	0,42	0,28

Теперь приведем формулы для двухстороннего геодезического нивелирования в случае, если не учитывалось изменение коэффициента рефракции с высотой. Нашими основными предположениями в этом случае будут

$$\left.\begin{aligned} m^2_{\Delta k_0} &= \beta^2_k (\xi_1 - \xi_2)^2, \\ m^2_{k_1} &= (\alpha_{kt} + \beta_{kt}\xi_1)^2, \\ m^2_{k_2} &= (\alpha_{kt} + \beta_{kt}\xi_2)^2, \\ m^2_{z_1} &= (\alpha_z + \beta_z\xi_1)^2, \\ m^2_{z_2} &= (\alpha_z + \beta_z\xi_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

При этих предположениях основная формула ошибки превышений неодновременного двухстороннего геодезического нивелирования примет вид:

$$m_{h\text{ср}}^2 = s^2\left[\frac{\alpha_z^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}^2}{8R^2}s^2 + \left(\frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2} + \frac{\alpha_{kt}\beta_{kt}}{4R^2}s^2\right)\xi_{\text{ср}} + \left(\frac{\beta_z^2}{2\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2}{8R^2}s^2\right)\xi_{\text{ср}}^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\beta_z^2}{8\rho^2} + \frac{\beta_{kt}^2}{32R^2}s^2\right)\Delta\xi^2 + \frac{\beta_k^2}{4R^2}s^2\,\Delta\xi^2\right], \qquad (44)$$

а для одновременного нивелирования найдены

$$m_h^2 = s^2\left[\frac{\alpha_z^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha_z\beta_z}{\rho^2}\xi_{\text{ср}} + \frac{\beta_z^2}{2\rho^2}\xi_{\text{ср}}^2 + \frac{\beta_k^2}{4R^2}s^2\Delta\xi^2 + \frac{\beta_z^2}{2\rho^2}\Delta\xi^2\right] \qquad (45)$$

или, учитывая (37), получаем для неодновременного нивелирования

$$m_{h\text{ср}}^2 = \frac{\beta_z^2}{2l^2\rho^2} + \frac{\alpha_z\beta_z}{l\rho^2}s + \frac{\alpha_z^2}{2\rho^2}s^2 + \frac{\alpha_{kt}\beta_{kt}}{4lR^2}s^3 + \frac{\alpha_{kt}^2}{8R^2}s^4 +$$
$$+ \left(\frac{\beta_z^2}{8\rho^2}s^2 + \frac{\beta_{kt}^2}{32R^2}s^4\right)\Delta\xi^2 + \frac{\beta_{kt}^2}{8l^2R^2}s^2 + \frac{\beta_k^2}{4R^2}\Delta\xi^2 s^4, \qquad (46)$$

и для одновременного нивелирования

$$\overline{m}_h^2 = \frac{\beta_z^2}{2l^2\rho^2} + \frac{\alpha_z\beta_z}{l\rho^2}s + \frac{\alpha_z^2}{2\rho^2}s^2 + \frac{\beta_z^2}{8\rho^2}s^2\Delta\xi^2 + \frac{\beta_k^2}{4R^2}\Delta\xi^2 s^4; \qquad (47)$$

учитывая значения параметров, приведенные выше, окончательно получаем

$$m_{h\text{ср}}^2 = 0{,}00084\cdot s + 0{,}265\cdot s^2 + 0{,}0106\,.s^3 + 0{,}00077\cdot s^4 +$$
$$+ (0{,}0124\cdot s^2 + 5{,}65\cdot s^4)\,\Delta\xi^2, \qquad (48)$$

$$\overline{m}_h^2 = 0{,}00084\cdot s + 0{,}229\cdot s^2 + 0{,}0124\cdot s^2\Delta\xi^2. \qquad (49)$$

Результаты вычислений по формулам (44) и (45) представлены соответственно в табл. 5 и 6.

Таблица 5

Значения $m_{h\text{ ср}}$ для двухстороннего нивелирования, вычисленные без учета изменения k с высотой

$h_э$ в *м* / s в *км*	5	7,5	10	15	20	30	40
5	0,31	0,21	0,16	0,11	0,09	0,06	0,05
10	1,24	0,84	0,63	0,43	0,33	0,23	0,18
15	2,75	1,85	1,40	0,95	0,73	0,51	0,39
20	—	—	2,49	1,69	1,29	0,89	0,69

Таблица 6

Значения $\overline{m}_h$ для одновременного нивелирования, вычисленные без учета изменения k с высотой

$h_э$ в *м* / s в *км*	5	7,5	10	15	20	30	40
5	0,18	0,12	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03
10	0,72	0,48	0,36	0,25	0,19	0,13	0,10
15	1,61	1,08	0,81	0,54	0,41	0,28	0,20
20	—	—	1,43	0,96	0,72	0,49	0,35

Приведенные выше формулы дают средние квадратические ошибки определения превышений как для одновременного, так и для неодновременного двухстороннего геодезического нивелирования в случае, если учитывалось и не учитывалось изменение коэффициента рефракции с высотой.

Наконец, заметим, что при рассмотрении точности геодезического нивелирования экспериментальные значения параметров были получены для слоя воздуха 5—50 *м*, а поэтому выводы, приведенные здесь, относятся именно к этому слою. Кроме того, при определении параметров не принималось во внимание изменение коэффициента рефракции от направления к направлению и поэтому ошибки, предвычисленные по приведенным формулам, могут быть несколько занижены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Гостехиздат, 1955.

2. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Труды ЦНИИГАиК, вып. 102, Геодезиздат, 1955.

3. Маслич Д. И. О точности геодезического нивелирования в горных условиях. Львов, 1957.

4. Маслич Д. И., Хижак Л. С. Исследование зависимости коэффициента рефракции от периода суток и высоты луча. Межведомств. республ. науч.-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 10, Изд-во Львовского ун-та, 1969.

Работа поступила
31 марта 1969 года.