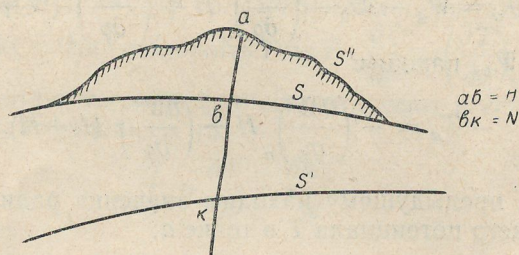


Н. К. МИГАЛЬ

ОБОСНОВАНИЕ ФОРМУЛЫ СТОКСА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ *

Вывод известной формулы Стокса [1] содержит существенные недостатки, ибо требует удаления или перемещения материковых масс, то есть регуляризации Земли. Это обстоятельство вызывает некоторые трудности и значительный объем вычислительных работ при применении формулы. В настоящей статье мы приводим новый вывод формулы Стокса, не требующий регуляризации Земли.

Возьмем сжатый уровненный эллипсоид вращения (можно взять любую уровненную поверхность, мало отличающуюся от геоида), масса которого равна массе Земли, вращающейся вокруг малой оси с постоянной угловой скоростью ω , равной угловой скорости вращения Земли.



Совместим центр эллипсоида O и малую ось его соответственно с центром массы и осью вращения Земли. Обозначим через V и V' потенциальные функции притяжения Земли и уровненного эллипсоида. Кроме того, предположим, что схема распределения масс Земли получена в результате перераспределения масс уровненного эллипсоида, так что $V = V' + T$, где T — потенциал положительных и отрицательных масс. Эту функцию будем называть возмущающим потенциалом, а массы, вызывающие его, — возмущающими массами.

Потенциал силы тяжести $W'_a = V'_a + \frac{\omega^2}{2} r^2$ уровненного эллипсоида в точке a равен

$$W'_a = W'_k + \int_{r_k}^{r_a} \frac{\partial W'}{\partial \rho} d\rho. \quad (1)$$

* Настоящая статья представляет оригинал, изданный на стеклоглафе в Бюлетене научных работ Харьковского инженерно-строительного института (тираж 60 экз.), № 17, 1939 г.

Поскольку идея, затрагиваемая в этой статье, весьма активно обсуждается в настоящее время, решено опубликовать статью для более широкого круга лиц. (Примечание автора).

Здесь (см. рисунок) точки a , b и k расположены на одном и том же радиусе-векторе q ; S — геоид, S' — уровенный эллипсоид, S'' — физическая поверхность Земли. Формулу (1) перепишем в таком виде:

$$W'_a = W'_k + \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c (N + H), \quad (1')$$

где $\left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c$ — среднее значение радиальной производной потенциала на отрезке ak .

Вычитая из обеих частей равенства (1') W_a — потенциал силы тяжести Земли в точке a — и принимая во внимание соотношение $W'_a - W_a = -T_a$, получаем

$$-T_a = W'_k - W_a + \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c (N + H).$$

Так как

$$W_a = W_b + \int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{\partial W}{\partial \rho} d\rho = W_b + \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_n H,$$

где $\left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_n$ — среднее значение радиальной производной потенциала на отрезке ab , то

$$-T_a = W'_k - W_b - \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_n H + \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c (N + H).$$

Положив $W'_k = W_b$, находим

$$-T_a = - \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_n H + \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c (N + H). \quad (2)$$

Аналогично предыдущему находим значение радиальной производной взсмущающего потенциала T в точке a :

$$- \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_a = \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_k - \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_a + \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial \rho^2} \right)_m (N + H), \quad (3)$$

где $\left(\frac{\partial^2 W'}{\partial \rho^2} \right)_m$ — среднее значение второй радиальной производной потенциала на отрезке ak .

Умножим уравнение (2) на $\frac{2}{R}$, где R — некоторый радиус сферы с центром в точке O , и сложим с уравнением (3).

Получим точное уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{2T_a}{R} - \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_a = & -\frac{2}{R} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_n H + \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_k - \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_a + \\ & + \left\{ \frac{2}{R} \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c + \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial \rho^2} \right)_m \right\} (N + H). \end{aligned} \quad (4)$$

Упростим его, сделав допущения, аналогичные таковым при выводе формулы Стокса для регуляризированной Земли,

$$\left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_c + \left(\frac{\partial^2 W'}{\partial \rho^2} \right)_m \approx 0, \quad \left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)_k - \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_a \approx g_a - \gamma_k,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_n = -g_n.$$

Получаем

$$\frac{2T_a}{R} + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_a = \gamma_k - g_a - \frac{2g_n}{R} H$$

или, вводя обозначение

$$g_0 = g_a + \frac{2g_n}{R} H$$

и опуская индексы a и k , записываем

$$\frac{2T}{R} + \frac{\partial T}{\partial \rho} = \gamma - g_0. \quad (5)$$

Еще раз подчеркиваем, что g_n есть среднее значение силы тяжести внутри материковых масс на отрезке ab , а поэтому недопустима трактовка поправки $\frac{2g_n}{R}$ как поправки в «свободном воздухе», связанной, как известно, с регуляризацией Земли.

Для решения уравнения (5), где T и $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ отнесены к точкам физической поверхности Земли, поступим следующим образом. Опишем сферу Σ наименьшим радиусом R , чтобы вся масса Земли и уровенного эллипсоида находилась внутри ее. Покажем теперь, что с достаточной для нас точностью можно положить $T \approx T_\sigma$, $\frac{\partial T}{\partial \rho} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_\sigma$, где индекс σ указывает, что соответственные функции отнесены к сфере Σ .

В самом деле, имея в виду, что

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial W'}{\partial \rho},$$

находим

$$\begin{aligned} T_\sigma - T &= \int_{\rho_{S''}}^{\rho_\sigma} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial W'}{\partial \rho} \right) d\rho \leq \int_{\rho_{S''}}^{\rho_\sigma} \left| \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial W'}{\partial \rho} \right| d\rho = \\ &= \left| \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial W'}{\partial \rho} \right|_\mu \Delta \rho \approx |\gamma - g|_\mu \Delta \rho, \end{aligned} \quad (a)$$

где $\Delta \rho$ — расстояние, отсчитываемое вдоль радиуса-вектора от поверхности S'' до сферы Σ ; $|g - \gamma|_\mu$ — среднее значение на отрезке $\Delta \rho$ абсолютной величины разности между силой тяжести уровенного эллипсоида и силой тяжести Земли.

Далее, формула (2) дает:

$$T = -g_n H + \gamma_c (N + H),$$

откуда

$$N = \frac{T}{\gamma_c} + \frac{g_n - \gamma_c}{\gamma_c} H \quad (6)$$

или

$$N = \frac{T_\sigma}{\gamma_c} + \frac{T - T_\sigma}{\gamma_c} + \frac{g_n - \gamma_c}{\gamma_c} H.$$

Следовательно, можно положить $T = T_\sigma$, сделав при этом ошибку ΔN в N , согласно (a),

$$\Delta N \leq \frac{|\gamma - g|_\mu}{\gamma_c} \Delta \rho.$$

Аналогичным способом можно показать, что с той же точностью

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_\sigma.$$

Итак,

$$\frac{2T_\sigma}{R} \left(+ \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_\sigma = \gamma - g_0, \quad (5')$$

то есть мы свели задачу к определению гармонической функции T , регулярной на бесконечности и подчиненной условию (5') на поверхности сферы. Решение этой задачи известно [2].

Получив из (5') T_σ и подставив его в (6), находим формулу

$$N = N_s + \frac{g_n - \gamma_c}{\gamma_c} H, \quad (7)$$

мало отличающуюся, как показывают подсчеты, от формулы Стокса

$$N_s = \frac{T_\sigma}{\gamma_c}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes G. On the variation of gravity at the surface of the Earth (Translations of Cambridge Philosoph. Society, vol., 8, p. 672).
2. Пицетти П. Механические основы фигуры планет. ГТТИ, 1933.

Работа поступила
4 октября 1963 года.