

В сборнике публикуются статьи, в которых освещаются новые результаты в развитии теории и методов геодезических, геоокеанических и астрономических определений, теории фигуры Земли и планет, уравнительных вычислений, а также исследований в области изучения земной и астрономической рефракции, современных движений земной коры, прикладной геодезии, картографии, фотограмметрии и аэрофотогеодезии, организации и экономики геодезических работ.

Для преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов геодезического профиля, а также работников геодезических и картографических учреждений.
Библиогр. в конце статей.

Редакционная коллегия: доц., канд. техн. наук Н. И. Кравцов (отв. ред.), доц., канд. техн. наук Ф. Д. Заболоцкий (зам. отв. ред.), доц., канд. техн. наук И. Н. Гуляз (отв. секр.), доц., канд. техн. наук П. В. Павлов, доц., канд. техн. наук В. А. Коваленко, А. Н. Колесник, проф., д-р техн. наук А. С. Лисицынский, проф., д-р техн. наук И. Ф. Монин, доц., канд. техн. наук Д. И. Маслич, проф., д-р техн. наук Г. А. Мешеряков, проф., д-р техн. наук А. Л. Островский, проф., д-р техн. наук В. М. Сердюков, проф., д-р техн. наук В. Я. Финиковский.

Ответственный за выпуск проф., д-р техн. наук
А. Л. Островский

Адрес редакции:

290646 Львов-13, ул. Мира, 12,
Львовский орден Ленина политехнический институт
им. Ленинского комсомола,
геодезический факультет. Тел.: 39-88-32

Редакция научно-технической литературы
Зав. редакцией М. П. Парцый

Г 1902020000-024 505-87
М225(04)-87

© Издательское объединение
«Выща школа», 1987

В. А. ВИЛЕНСКИЙ, С. Н. ХОДОРОВ ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРОЕКТОВ МНОГОРАЗРЯДНЫХ ТРИЛАТЕРАЦИОННЫХ ПОСТРОЕНИИ

В инженерно-геодезической практике в настоящее время наряду с традиционными методами создания геодезического обоснования (триангуляция и полигонометрия) широко применяются трилатерационные построения. В ряде случаев они могут иметь многоступенчатую схему развития. Вопросы априорной оценки точности построенных многообразной трилатерации изучены мало. Поэтому,

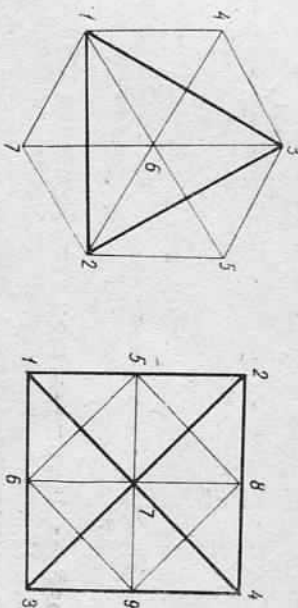


Рис. 1. Двухразрядная трилатерация (модель 1).

Рис. 2. Двухразрядная трилатерация (модель 2).

продолжая наши исследования по оценке точности сетей многоступенчатой триангуляции, изложенные в [2—5], в настоящей статье мы ставим задачу реализации строгой оценки точности двух- и трехразрядных типовых сетей трилатерации и получения по ее результатам соотношений, характеризующих точность слабых элементов в зависимости от точности измерений на каждой стадии построения.

Строгой оценка точности двух- и трехразрядных сетей трилатерации выполнялась на ЭВМ ЕС на моделях построений из равно-сторонних треугольников и геодезических квадратов (рис. 1—4), которые могут применяться в геодезической практике при проектировании инженерно-геодезических сетей. В качестве исходных во всех моделях приняты пункты 1 и 2. Длины сторон в первой модели равны 3 и $\sqrt{3}$ км, во второй — 4 и 2 км, в третьей — 3, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$ км, в четвертой — 4, 2 и 1 км. Оценка положения всех пунктов того, что средняя квадратическая ошибка линейных измерений m_s зависит от длины S измеряемых линий. Эта зависимость при ис-

пользовании электронных дальномеров обычно имеет вид уравнения регрессии

$$\mu S = a + bS \cdot 10^{-6}, \quad (1)$$

где a — постоянное слагаемое ошибки; b — коэффициент. В этом случае для многогранной трилатерации представляется возможным получить простые формулы, которые позволяют предвычислить точность слабых ее элементов в зависимости от постоянных a и b ре-

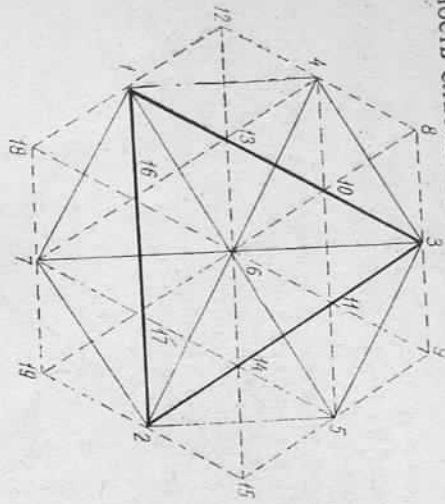


Рис. 3. Трегранная трилатерация (модель 3).

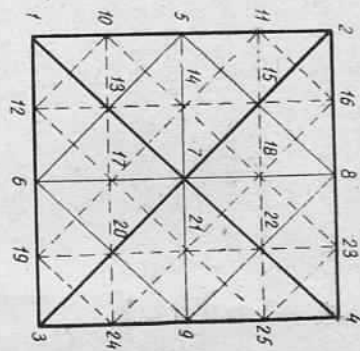


Рис. 4. Трегранная трилатерация (модель 3).

грессии прибора. По результатам строгой оценки точности всех моделей (табл. 1) получены следующие линейные зависимости.

Двухгранная сеть (модель 1)

$$\begin{aligned} m_p &= 1,31a + 0,94bS, \\ m_S &= 0,9a + 0,53bS, \\ m_a &= 1,37a + 0,87bS. \end{aligned} \quad (2)$$

Двухгранная сеть (модель 2)

$$\begin{aligned} m_p &= 1,43a + 0,97bS, \\ m_S &= 0,83a + 0,44bS, \\ m_a &= a + 0,65bS. \end{aligned} \quad (3)$$

Трехгранная сеть (модель 3)

$$\begin{aligned} m_p &= 1,67a + 0,67bS, \\ m_S &= 0,88a + 0,3bS, \\ m_a &= 2,24a + 0,87bS. \end{aligned} \quad (4)$$

Трехгранная сеть (модель 4)

$$\begin{aligned} m_p &= 1,51a + 0,56bS, \\ m_S &= 0,82a + 0,22bS, \\ m_a &= 1,8a + 0,58bS. \end{aligned} \quad (5)$$

Таблица 1

Результаты оценки точности многогранной трилатерации

Номер группы	a	b	μS	Модель 1			Модель 3			μS	Модель 2			Модель 4		
				m_p , см	m_S , см	m_a , ...	m_p , см	m_S , см	m_a , ...		m_p , см	m_S , см	m_a , ...	m_p , см	m_S , см	m_a , ...
				1	1	1	4	4,1	2,5		4,0	3,7	1,8	4,9	5	5,3
1	1	3	10	9,8	5,7	9,2	7,7	3,6	10,0	13	13,1	6,2	8,8	8,2	3,5	8,8
1	1	5	16	15,4	8,9	14,3	11,6	5,4	15,2	21	20,8	9,7	14,0	12,7	5,2	13,4
2	2	1	5	5,5	3,4	5,3	5,3	2,7	7,1	6	6,8	3,5	4,6	5,3	2,5	5,9
2	2	3	11	11,1	6,6	10,6	9,4	4,5	12,3	14	14,5	7,0	9,8	9,8	4,3	10,6
2	2	5	17	16,8	9,8	15,7	13,3	6,3	17,5	22	22,3	10,6	15,0	14,3	6,1	15,3
3	3	1	6	6,7	4,3	6,7	7,0	3,6	9,4	7	8,2	4,3	5,6	6,7	3,3	7,7
3	3	3	12	12,4	7,5	11,9	11,0	5,4	14,6	15	16,0	7,9	10,8	11,3	5,1	12,4
3	3	5	18	18,1	10,7	17,1	15,0	7,2	19,8	23	23,8	11,4	16,0	15,8	6,9	17,1

В полученных зависимостях (2)–(5) параметр S — измеренное расстояние в сети первой ступени построения. Приведенные формулы позволяют по заданным параметрам уравнения регрессии свето- или радиодальномера и по заданному измеренному расстоянию предвычислить точность слабых элементов сетей триггера-лин, созданной в несколько очередей. В табл. 2 приведенные формулы проверяли путем сравнения значений оцениваемых величин по результатам строгой оценки точности и вычислений по предло-

Проверка формул (2)–(5)

a	b	Модель 1		Модель 2		Модель 3		Модель 4	
		m_p по формуле	см строго	m_s по формуле	см строго	m_a по формуле	см строго	m_p по формуле	см строго
1	2	7,0	6,9	4,4	4,4	7,5	7,4	6,0	6,0
1	5	15,4	15,4	9,6	9,7	15,3	15,3	12,7	12,7
2	1	5,4	5,5	3,4	3,5	7,1	7,1	5,3	5,3
2	4	13,9	13,9	8,7	8,8	14,9	14,9	12,0	12,0
3	3	12,4	12,4	7,8	7,9	14,6	14,6	11,3	11,3
3	5	18,1	18,1	11,3	11,4	19,8	19,8	15,7	15,8

Таблица 2

женным выражениям. Анализ результатов, полученных в табл. 2, показывает, что погрешность найденных формул не превышает 1%.

Однако реальные многозарядные плановые сети могут отличаться от идеальных моделей. Поэтому поставлена задача выявить степень расхождения оценки точности моделей 1–4 от реальных геодезических построений. Для этого использован метод статистического моделирования. Каждая из рассматриваемых моделей искажалась по случайному закону путем подключения к рабочему алгоритму датчика случайных чисел — программа GAUSS (i, A, h, v). С помощью этого датчика вырабатывались случайные числа u_x и u_y , со средним квадратическим размахом h и математическим ожиданием $A=0$. С учетом u_x и u_y получены координаты пунктов идеальных моделей, соответствующие значению искажения $h=0,40$ м ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$). Таким образом, для всех исследуемых моделей в нескольких вариантах найдены оценочные параметры, которые сравнивали с соответствующими им значениями для идеальной модели. Конечно, чем больше h , тем больше различие в геометрии реальных сетей и моделей и тем значительнее расхождение в оценке точности рассматриваемых построений. Как показали исследования, при $h=240$ м погрешность априорной оценки не превышает 17%, что вполне приемлемо для целей проектирования.

Приведем примеры, интересующие применение формул в практике предвычисления точности многостадийных линейных построений.

Пример 1. Проектом предусмотрено развитие двухступенчатого геодезического обоснования по методу триггерации с использованием светодальномера СТ-65. Сеть построена из геодезических квадратов (см. рис. 2). Необходимо выделить априорную оценку точности слабых элементов запроецированного построения.

Исходными данными для расчета точности являются коэффициенты уравнения регрессии прибора ($a=1,5, b=3$) и средняя длина измеряемой стороны в сети первого разряда $S=4,8$ км. В этом случае по формуле (3) получаем $m_p=16,1$ см, $m_s=7,6$ см, $m_a=10,9'$.

Пример 2. При проектировании трехзарядной триггерационной сети (см. рис. 3) следует обеспечить абсолютную ошибку в положении пункта в наиболее слабом месте построения $m_p=14$ см и ошибку в измерении стороны $m_s=6,5$ см. Средняя длина измеряемой стороны в первом разряде $S=3,4$ км. Требуется выбрать оптимальный по точности и дальности действия тип светодальномера. Для расчета используем формулы (4). Подставляя в них известные по условию значения m_p, m_s и S , имеем систему уравнений вида

$$\begin{aligned} 1,67a + 2,28b &= 14, \\ 0,88a + 1,02b &= 6,5, \end{aligned}$$

решая которую, получаем $a=1,72, b=4,88$. Найденным коэффициентам регрессии a и b прибора удовлетворяют технические характеристики светодальномера КДГ-3, для которого, согласно паспорту, $a=1,5, b=5$.

В практике проектирования многозарядных геодезических сетей широко применяется методика, разработанная проф. Н. Н. Дебелевым. В соответствии с этой методикой ошибку слабого элемента последней ступени можно получить по формуле

$$M^2 = \sum_{i=1}^n m_i^2, \quad (6)$$

где m_i — средняя квадратическая ошибка слабого элемента i -й ступени геодезического обоснования относительно исходных пунктов; n — количество стадий построения. В [4] показано, что проектирование многозарядных триангуляционных сетей, в соответствии с (6), дает заниженные результаты оценки точности и приводит к существенным ее искажениям. Из [1] видно, что эти искажения имеют место вследствие неучета корреляционных связей, возникающих при уравнивании сети между пунктами высших классов. Поэтому в [1] рекомендуется для повышения качества проектирования применять строгие методы оценки точности, основанные на использовании корреляционных матриц исходных пунктов. Однако использование этих матриц, даже при наличии ЭВМ, является сложным вычислительным процессом. Исходя из этого, в [5] для многозарядной триангуляции получено соотношение, обобщающее формулу (6) и позволяющее при оценке проектов учитывать корреляцию между ошибками исходных данных. Принадлежит к двухзарядным сетям триангуляции указанное соотношение имеет вид [5]

$$M^2 = (m_1^2 + m_2^2) - \frac{m_1^2 m_2^2}{\mu_2}, \quad (7)$$

где m_1 — средние квадратические ошибки оцениваемых параметров сети; μ_2 — средние квадратические ошибки измерений. В рам-

как исследований, изложенных в настоящей статье, формула (7) апробирована на двухразрядных сетях трилатерации (см. рис. 1, 2). Для трехразрядных построений трилатерации (см. рис. 3, 4) в результате анализа установлены зависимости вида:

$$M^2 = (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} m_1 m_2 + \frac{\mu_1}{\mu_3} m_1 m_3 + \frac{\mu_2}{\mu_3} m_2 m_3 \right); \quad (8)$$

Модель 4

$$M^2 = (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - \frac{1}{\sqrt{1,8}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} m_1 m_2 + \frac{\mu_1}{\mu_3} m_1 m_3 + \frac{\mu_2}{\mu_3} m_2 m_3 \right). \quad (9)$$

В табл. 3 фрагментарно приведены результаты расчетов по формулам (7)–(9), которые сравнивались с соответствующими результатами, полученными из строгого оценивания и по формуле (6). Из анализа представленных в табл. 3 данных следует:

- 1) искажения оценки точности по общепринятой методике (формула (6)) составляет 40...100% для двухступенчатых сетей трилатерации и 50...200% для трехстадийных линейных построений в зависимости от соотношения точности измерений. Таким об-

Таблица 3

Предвычисление точности многообразной трилатерации

a	b	μ ₁	μ ₂	μ ₃	m ₁ , см	m ₂ , см	m ₃ , см	M _p , см		Ошибки формул, %		
								по формуле (6)	по формулам (7)–(9)	строго	(6)	(7)–(9)
Двухразрядные сети												
Модель 1												
1	3	10	6,2	—	16,3	7,7	—	18,1	11,1	9,8	84,7	13,3
1	5	16	9,7	—	26,1	12,1	—	28,8	17,5	15,4	87,0	13,6
2	2	8	5,5	—	13,1	6,8	—	14,7	9,3	8,3	77,1	12,0
3	4	15	9,9	—	24,5	12,4	—	27,5	17,2	15,3	80,3	13,1
Модель 2												
1	2	9	5	—	16,8	6,0	—	17,9	11,8	9,2	94,5	28,3
1	3	13	7	—	24,5	8,4	—	25,9	17,0	13,1	97,7	29,8
2	1	6	4	—	10,8	4,6	—	11,8	8,0	6,8	73,5	17,6
3	2	11	7	—	20,0	8,1	—	21,6	14,5	12,1	78,5	19,8
Трехразрядные сети												
Модель 3												
1	1	4	2,7	2	6,5	3,4	2,5	7,8	4,0	3,7	110,8	8,1
1	5	16	9,7	6	26,1	12,1	7,5	29,7	14,1	11,6	156,0	21,6
3	3	12	8,2	6	19,6	10,2	7,5	23,3	12,1	11,0	111,8	10,0
3	5	18	11,7	8	29,4	14,5	9,9	34,3	17,1	15,0	128,7	14,0
Модель 4												
1	2	9	5	3	16,8	6,0	3,5	18,2	6,4	6,0	203,3	6,7
1	4	17	9	5	32,1	10,9	5,8	34,4	11,5	10,5	227,6	9,5
2	5	22	12	7	41,3	14,4	8,1	44,5	15,4	14,3	211,2	7,7
3	4	19	11	7	35,3	13,0	8,0	38,4	14,1	13,6	182,4	3,7

разом, предвычисление точности многообразной трилатерации по формуле (6) вряд ли можно считать обоснованным;

- 2) результаты оценки точности типовых построений многоступенчатой трилатерации по формулам (7)–(9) приближаются к строгим. Поэтому их можно рекомендовать при проектировании трилатерационных сетей, создаваемых в несколько очередей. При этом следует учитывать, что в отличие от общепринятой методики математическую обработку проектируемых сетей следует выполнять не раздельно, а совме-

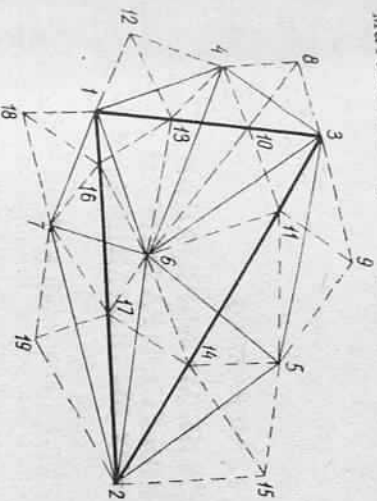


Рис. 5. Схема произвольного трехразрядного построения трилатерации.

3) при проектировании полученных формул возможен и другой подход. Для расчета значений M задаются необходимыми значениями ошибок измерений μ; соответствующей стадии геодезического обоснования, а средние квадратические ошибки оцениваемых параметров m_i в рассматриваемом построении предвычисляются по формулам, приведенным в современной инструктивной литературе для сетей

одного порядка точности [6].

В заключение наших исследований на реальной сети трехступенчатой трилатерации (рис. 5), длины линий которой колеблются в диапазоне от 400 до 3500 м, апробирована формула (8). Как видно из табл. 4, предлагаемую методику предвычисления точности многообразных сетей трилатерации можно рекомендовать и для построений, геометрия которых отличается от моделей.

Проверка формул (8)

a	b	μ ₁	μ ₂	μ ₃	m ₁ , см	m ₂ , см	m ₃ , см	M _p , см		Ошибки формул, %		
								по формуле (6)	по формулам (8)	строго	(6)	(8)
1	0	1	1	1	1,6	1,4	1,4	2,6	1,7	1,6	60,4	4,4
1	4	13	7,9	5	20,2	11,4	7,1	24,2	8,9	9,8	146,7	9,4
3	5	18	11,7	8	27,9	16,8	11,4	34,5	14,1	15,4	124,3	8,5

Таблица 4

1. Видалин А. А., Лукан А. С. Влияние ошибок исходных данных при построении построения и уравнивания геодезических сетей // Применение инженерной геодезии в транспортном строительстве. 1976. Вып. 178. С. 17–29. 2. Видалин В. А., Ходоров С. Н. Оценка точности и проектирование многообразной триангуляционной сети. К., 1984. С. 7. Рукопись деп. в УкрНИИДТИ, № 2207 Ук-84. 3. Видалин В. А., Ходоров С. Н. Учет соотношения точностей измерений при проектировании многообразной триангуляционной сети. К., 1984. С. 8. Рукопись деп. в УкрНИИДТИ, № 1771 Ук-84. 4. Видалин В. А., Ходоров С. Н. К вопросу о методике проектирования многообразного геодезического обоснования.

ванья, К., 1984. С. 7. Рукопись деп. в Украининти, № 1774 Ук-84. 5. Виденский В. А., Ходоров С. Н. Исследования по методике проектирования сетей строительства. К., 1984. С. 8. Рукопись деп. в Украининти, № 1775 Ук-84. 6. Руководство по расчету точности геодезических работ в промышленном строительстве. М., 1979.

Статья поступила в редакцию 26.12.85

УДК 528.1

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАЖОРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРА МАТРИЦ В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Исследование свойств собственных значений матриц, возникающих в уравнительных вычислениях, встречается значительно труднее. В большинстве случаев эти свойства описывают в виде неравенств, которые весьма полезны в теоретических выкладках и позволяют дать иногда практические рекомендации по выбору того или иного способа уравнивания для конкретной геодезической сети при составлении системы нормальных уравнений с лучшей обусловленностью.

Целый ряд подобного типа экстремальных неравенств и рекомендаций дан болгарским геодезистом И. Тренковым [4, 8, 9 и др.], причем в своих исследованиях он руководствовался, как правило, теорией пучка квадратичных форм [1].

Представленные здесь неравенства, полученные на основе теории мажоризации [3], не только подтверждают выводы И. Тренкова, но и имеют существенные уточнения, отличия и достоинства. Во-первых, они получены с использованием другого математического аппарата, который позволил упростить и существенно сократить объем математических выкладок, что уже представляло определенным интерес. Во-вторых, что наиболее важно, полученные мажорантные неравенства для собственных значений матриц в действительности более общие, чем неравенства И. Тренкова. Они дают возможность обосновать целый ряд новых результатов и благодаря большей универсальности и простоте выводов существенно полезнее и с методической точки зрения.

Ниже рассмотрим применение теории мажоризации на примере изучения свойств матриц весовых коэффициентов уравниваемых блондений и необходимых неизвестных. Подобный анализ можно провести для матриц и в других случаях геодезической практики. Предварительно условимся нумеровать все собственные значения $\lambda_i(A)$ квадратной матрицы A в порядке невозрастания и приведем простейшее определение мажорантных соотношений.

Определение [3]. Вектор X мажорируется вектором Y , если

$$\sum_{l=1}^k x_l \leq \sum_{l=1}^k y_l; \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \sum_{l=1}^n x_l = \sum_{l=1}^n y_l,$$

где x_i и y_i — компоненты вектора X и Y порядка n , упорядоченные по невозрастанию.

В дальнейшем использованы матрицы коэффициентов A и B параметрических и основных уравнений соответственно, матрица нормальных уравнений $N = A^T Q^{-1} A$ параметрического способа уравнивания ранга $\text{rang } N = r \leq m$, где m — число необходимых неизвестных; Q_Y — положительно определенная матрица весовых коэффициентов вектора измерений Y ранга $\text{rang } Q_Y = n$; n — число измерений.

Учитывая, что результаты уравнивания любым способом теоретически идентичны, без ограничения общности для матрицы весовых коэффициентов уравненного вектора измерений Y при параметрическом уравнивании имеем выражение

$$Q_Y = AN^+ A^T, \quad (1)$$

где N^+ — псевдообратная к N матрица, так как $r \leq m$, а при кор-
релятом —

$$Q_Y = Q_Y - Q_Y B^T (B Q_Y B^T)^{-1} B Q_Y. \quad (2)$$

Из (1) и свойств ранга матриц следует, что

$$\text{rang } Q_Y = \text{rang } A = r, \quad (3)$$

т. е. матрица Q_Y вырожденная, неотрицательно определенная и имеет $r = n - r$ нулевых собственных значений.

Обозначим второй член в выражении (2) через

$$C = Q_Y B^T (B Q_Y B^T)^{-1} B Q_Y.$$

Ранг неотрицательно определенной матрицы C

$$\text{rang } C = r, \quad (4)$$

т. е. равен числу избыточных измерений.

Перепишем выражение (2) в виде

$$Q_Y = Q_Y + C. \quad (5)$$

Применяя к (5) теорему для собственных значений суммы матриц [6], получаем неравенства

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{j_s + j_s - s}(Q_Y) \leq \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_Y) + \sum_{s=1}^k \lambda_{j_s}(C), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n, \\ i_k + j_k \leq k + n. \end{aligned} \quad (7)$$