

ванья, К., 1984. С. 7. Рукопись деп. в УкрНИИГТИ, № 1774 Ук-84. 5. Вилеванский В. А., Ходоров С. Н. Исследования по методике проектирования сетей ступенчатых сетей, 1984. С. 8. Рукопись деп. в УкрНИИГТИ, № 1775 Ук-84. 6. Руководство по расчету точности геодезических работ в промышленном строительстве. М., 1979.

Статья поступила в редакцию 26.12.85

УДК 528.1

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАЖОРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРА МАТРИЦ В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Исследование свойств собственных значений матриц, возникающих в уравнительных вычислениях, встречается значительно труднее. В большинстве случаев эти свойства описывают в виде равенств, которые весьма полезны в теоретических выкладках и позволяют дать иногда практические рекомендации по выбору того или иного способа уравнивания для конкретной геодезической сети при составлении системы нормальных уравнений с лучшей обусловленностью.

Целый ряд подобного типа экстремальных равенств и рекомендаций дан болгарским геодезистом И. Тренковым [4, 8, 9 и др.], причем в своих исследованиях он руководствовался, как правило, теорией пучка квадратичных форм [1].

Представленные здесь неравенства, полученные на основе теории мажоризации [3], не только подтверждают вывод И. Тренкова, но и имеют существенные уточнения, отличия и достоинства. Во-первых, они получены с использованием другого математического аппарата, который позволил упростить и существенно сократить объем математических выкладок, что уже представляло определенный интерес. Во-вторых, что наиболее важно, получены определенные неравенства для собственных значений мажорантные неравенства для собственного значения И. Тренкова. Они дают возможность обосновать целый ряд новых результатов и благодаря большей универсальности и простоте выводов существенно полнее и с методической точки зрения.

Ниже рассмотрим применение теории мажоризации на примере изучения свойств матриц весовых коэффициентов уравненных наклонений и необходимых неизвестных. Подобенный анализ можно провести для матриц и в других случаях геодезической практики. Предварительно условимся нумеровать все собственные значения $\lambda_i(A)$ квадратной матрицы A в порядке невозрастания и приведем простейшее определение мажорантных соотношений.

Определение [3]. Вектор X мажорируется вектором Y , если

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i; \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$

где x_i и y_i — компоненты вектора X и Y порядка n , упорядоченные по невозрастанию.

В дальнейшем использованы матрицы коэффициентов A и B параметрических и условных уравнений соответственно, матрица нормальных уравнений $N=A^T Q_r^{-1} A$ параметрического способа уравнивания ранга $\text{rang } N=r \leq m$, где m — число необходимых неизвестных; Q_r — положительно определенная матрица весовых коэффициентов вектора измерений Y ранга $\text{rang } Q_r=n$; n — число измерений.

Учитывая, что результаты уравнивания любым способом теоретически идентичны, без ограничения общности для матрицы весовых коэффициентов уравненного вектора измерений Y при параметрическом уравнивании имеем выражение

$$Q_r = AN + A^T, \quad (1)$$

где N^+ — псевдообратная к N матрица, так как $r \leq m$, а при корелатном —

$$Q_r = Q_r - Q_r V^T (BQ_r V^T)^{-1} BQ_r. \quad (2)$$

Из (1) и свойств ранга матриц следует, что

$$\text{rang } Q_r = \text{rang } A = r. \quad (3)$$

Т. е. матрица Q_r вырожденная, неотрицательно определенная и имеет $r=n-r$ нулевых собственных значений.

Обозначим второй член в выражении (2) через

$$C = Q_r V^T (BQ_r V^T)^{-1} BQ_r.$$

Ранг неотрицательно определенной матрицы C

$$\text{rang } C = r, \quad (4)$$

т. е. равен числу избыточных измерений.

Перепишем выражение (2) в виде

$$Q_r = Q_r + C. \quad (5)$$

Применяя к (5) теорему для собственных значений суммы матриц [6], получаем неравенства

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{r+s+j_s-s}(Q_r) \leq \sum_{s=1}^k \lambda_{j_s}(Q_r) + \sum_{s=1}^k \lambda_{j_s}(C), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n, \\ i_k + j_k \leq k + n. \end{aligned} \quad (7)$$

Если выполняются условия (7) и условие $i_1 + j_1 \geq n + 2 - k$, то

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s + j_s + k - s - n}(Q_Y) \geq \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_{\bar{Y}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_{j_s}(C). \quad (8)$$

Из мажорантных оценок (6) — (8) вытекает целый ряд других неравенств [6], например,

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_Y) \leq \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_{\bar{Y}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_s(C),$$

откуда при $k=1$ получим

$$\lambda_{i_1}(Q_Y) \leq \lambda_{i_1}(Q_{\bar{Y}}) + \lambda_1(C). \quad (9)$$

Аналогично можно получить

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_Y) \leq \sum_{s=1}^k \lambda_s(Q_{\bar{Y}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(C), \quad (10)$$

откуда следует

$$\lambda_{i_1}(Q_Y) \leq \lambda_1(Q_{\bar{Y}}) + \lambda_{i_1}(C). \quad (11)$$

Учитывая (3) и (4), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{r+1}(Q_{\bar{Y}}) &= \lambda_{r+2}(Q_{\bar{Y}}) = \dots = \lambda_n(Q_{\bar{Y}}) = 0, \\ \lambda_{r+1}(C) &= \lambda_{r+2}(C) = \dots = \lambda_n(C) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

тогда из (9) и (11) находим

$$\lambda_{i_1}(Q_Y) \leq \lambda_{i_1}(C), \quad i = r+1, \dots, n,$$

$$\lambda_{j_1}(Q_Y) \leq \lambda_1(Q_{\bar{Y}}), \quad j = r+1, \dots, n.$$

Пологая $j_s = r+1, r+2, \dots, n, i_s = j, k=1$, из формулы (6) получаем

$$\lambda_j(Q_Y) \leq \lambda_{j-r}(Q_{\bar{Y}}), \quad j = r+1, \dots, n, \quad (13)$$

или

$$\lambda_{r+i}(Q_Y) \leq \lambda_i(Q_{\bar{Y}}), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (14)$$

Из обратных неравенств (8) следует соотношение

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_Y) \geq \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_{\bar{Y}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_{n-k+s}(C),$$

полагая в котором $k=1$ и учитывая (12), имеем

$$\lambda_j(Q_Y) \geq \lambda_j(Q_{\bar{Y}}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

т. е. любое собственное значение матрицы весовых коэффициентов уравненных измерений меньше или равно соответствующему ему собственному значению матрицы весовых коэффициентов вектора измерений.

Объединяя соотношения (14) и (15), можно написать

$$\lambda_i(Q_Y) \geq \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geq \lambda_{r+i}(Q_Y), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (16)$$

Из соотношений (16) следует грубая экстремальная оценка И. Тренкова [4, 8], полученная при ранге $r=m$:

$$\lambda_i(Q_Y) \geq \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geq \lambda_n(Q_Y), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Пусть измерения независимы. Положим $Q_Y = P^{-1}$, где P — диагональная весовая матрица с пронумерованными в порядке убывания весами $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. Тогда $\lambda_i(Q_Y) = p_i^{-1}$ и из (16) следует оценка для каждого собственного значения

$$p_i^{-1} \geq \lambda_i(Q_{\bar{Y}}) \geq p_{r+i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (18)$$

т. е. первые r наименьших весов измерений не влияют на нижнюю ненулевую границу спектра матрицы $Q_{\bar{Y}}$.

Из соотношений (18) как частные случаи следуют экстремальные оценки И. Тренкова, полученные при $r=m$:

$$p_1^{-1} \geq \lambda_1(Q_{\bar{Y}}) \geq p_n^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_i(Q_{\bar{Y}}) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \text{ если } p_1 = p_n = 1.$$

Кроме указанных неравенств для матриц $Q_{\bar{Y}}$, Q_Y и C применимы также другие мажорантные неравенства, приведенные, например, в [3].

Рассмотрим свойства матрицы весовых коэффициентов порядка m уравненного вектора необходимых неизвестных параметрического способа уравнивания

$$Q_{\bar{X}} = N^+ = (A^T Q_r^{-1} A)^+.$$

Для упорядоченных в невозрастающем порядке ее собственных значений $\lambda(Q_{\bar{X}})$ и диагональных элементов $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m$ можно использовать мажорантные неравенства [3]

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(Q_{\bar{X}}) \geq \sum_{i=1}^k q_i; \quad (19)$$

$$\prod_{i=k}^m \lambda_i(Q_{\bar{X}}) \leq \prod_{i=k}^m q_i, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

В (19) соблюдается знак равенства при $k=m$.

Из (19) и (20) в виде частного случая при $k=1$ в (19) и $k=m$ в (20) следует неравенство, приведенное в [8]:

$$\lambda_1(Q_{\bar{X}}) \geq q_1 \geq \lambda_m(Q_{\bar{X}}). \quad (21)$$

Оно непосредственно следует также из известного принципа Редля [2].

Максимальное собственное значение $\lambda_1(Q_{\bar{X}})$ обратно минимальному ненулевому собственному значению матрицы нормаль-

ных уравнений параметрического способа уравнивания, поэтому (21) становится ясным, что именно оно определяет верхнюю границу обратных весов неизвестных и оказывает решающую роль на точность геодезической сети в целом. Рассмотрим свойства матрицы весовых коэффициентов вектора уравненных измерений и неизвестных:

$$Q_{\bar{r}} = \begin{pmatrix} Q_{\bar{r}} & Q_{\bar{r}, \bar{x}} \\ Q_{\bar{x}, \bar{r}} & Q_{\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} Q_{\bar{x}} \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}^T, \quad (22)$$

где E — единичная матрица. Из представления (22) следует, что $\text{rang } Q_{\bar{r}} = \text{rang } Q_{\bar{x}} = r$, т. е. матрица $Q_{\bar{r}}$ имеет $m+n-r$ собственных значений, равных нулю:

$$\lambda_j(Q_{\bar{r}}) = 0, \quad j = r+1, r+2, \dots, m+n. \quad (23)$$

Применяя к матрицам $Q_{\bar{r}}$, $Q_{\bar{r}}$ и $Q_{\bar{x}}$ теорему о собственных значениях блочных матриц [7], получаем

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s+j_s}(Q_{\bar{r}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_{m+n-k+s}(Q_{\bar{r}}) \leq \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_{\bar{r}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_{j_s}(Q_{\bar{x}}) \quad (24)$$

Для

$$\begin{aligned} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m, \\ k \leq \min(m, n). \end{aligned} \quad (25)$$

Из формул (23) и (25) следует, что в (24) второй член в выражении, слева равен нулю, т. е.

$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s+j_s}(Q_{\bar{r}}) \leq \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s}(Q_{\bar{r}}) + \sum_{s=1}^k \lambda_{j_s}(Q_{\bar{x}}),$$

откуда при $k=1$ имеем $\lambda_{i_1+j_1}(Q_{\bar{r}}) \leq \lambda_{i_1}(Q_{\bar{r}}) + \lambda_{j_1}(Q_{\bar{x}})$

или

$$\lambda_1(Q_{\bar{r}}) \leq \min[\lambda_1(Q_{\bar{r}}) + \lambda_1(Q_{\bar{x}}), \lambda_1(Q_{\bar{r}}) + \lambda_1(Q_{\bar{x}})]. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что из неравенства (26) следует левая часть более грубой экстремальной оценки И. Тренкова [4, 8]:

$$\lambda_1(Q_{\bar{r}}) + \lambda_1(Q_{\bar{x}}) \geq \lambda_1(Q_{\bar{r}}) \geq \lambda_n(Q_{\bar{r}}) + \lambda_m(Q_{\bar{x}}), \quad (27)$$

$$i=1, 2, \dots, r=m.$$

На основании теоремы о сингулярных значениях блочных матриц [5] можно записать также соотношения

$$\lambda_1(Q_{\bar{r}}) \geq \max[\lambda_1(Q_{\bar{r}}), \lambda_1(Q_{\bar{x}})], \quad (28)$$

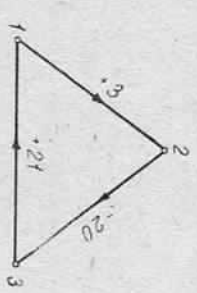
объединяя которые с (26), получаем

$$\begin{aligned} \min[\lambda_1(Q_{\bar{r}}) + \lambda_1(Q_{\bar{x}}), \lambda_1(Q_{\bar{r}}) + \lambda_1(Q_{\bar{x}})] &\geq \\ &\geq \lambda_1(Q_{\bar{r}}) \geq \max[\lambda_1(Q_{\bar{r}}), \lambda_1(Q_{\bar{x}})], \\ i=1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (29)$$

Неравенства (16), (18) и (29), в отличие от неравенств И. Тренкова, более общие и позволяют локализовать каждое собственное значение в отделимости. Кроме того, неравенства И. Тренкова (17) и (27) доказаны лишь для $r=m$, в то время как полученные здесь соотношения справедливы при $r \leq m$.

Приведем пример полученного выше соотношения на элементарном численном примере. Пусть уравнивается свободная нивелир

Схема нивелирной сети



лирная сеть, показанная на рисунке, в которой равногочено измерены превышения h_1, h_2 и h_3 с весами $p_1=p_2=p_3=1$. Тогда имеем

$$\lambda_1(Q_{\bar{r}}) = \lambda_2(Q_{\bar{r}}) = \lambda_3(Q_{\bar{r}}) = 1, \quad m=3, \quad r=2, \quad r=1. \quad (30)$$

Матрица

$$Q_{\bar{r}} = Q_{\bar{r}} - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $r=1$, по $\lambda_2(C) = \lambda_3(C) = 0$, а след $\text{Sp } C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(C) =$

$$= \lambda_1(C) = 1. \text{ Из неравенств (16)- и равенств (12) и (30) имеем}$$

$$\lambda_1(Q_{\bar{r}}) = \lambda_2(Q_{\bar{r}}) = 1, \quad \lambda_3(Q_{\bar{r}}) = 0.$$

Выбирая в качестве неизвестных параметров отметки пунктов, получаем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_{\bar{x}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как оказалось, что $Q_{\bar{x}} = \frac{1}{3} Q_{\bar{r}}$, сразу можно записать:

$$\lambda_1(Q_{\bar{x}}) = \frac{1}{3} \lambda_1(Q_{\bar{r}}), \quad i=1, 2, 3, \text{ т. е. } \lambda_1(Q_{\bar{x}}) = \lambda_2(Q_{\bar{x}}) = \frac{1}{3},$$

$\lambda_3(Q_{\bar{x}}) = 0$. Неравенство (21) для диагональных элементов матрицы $Q_{\bar{x}}$ при этом соблюдается:

$$\frac{1}{3} \geq q_i = \frac{2}{9} \geq 0.$$

По формуле (22) составим матрицу

$$Q_{\tau}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 6 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Так как $r=2$, из (23) сразу получим:

$$\lambda_l(Q_{\tau}^{-1}) = 0, \quad l = 3, 4, 5, 6.$$

Для ненулевых собственных значений матрицы Q_{τ} можно написать:

$$\text{Sp } Q_{\tau}^{-1} = \lambda_1(Q_{\tau}^{-1}) + \lambda_2(Q_{\tau}^{-1}) = \frac{8}{3}. \quad (31)$$

Далее из неравенств (29) следует:

$$1 \leq \lambda_1(Q_{\tau}^{-1}) \leq \frac{4}{3}; \quad 1 \leq \lambda_2(Q_{\tau}^{-1}) \leq \frac{4}{3}.$$

Так как любое из чисел $\lambda_1(Q_{\tau}^{-1})$ и $\lambda_2(Q_{\tau}^{-1})$ не должно превосходить $4/3$, с учетом (31) получим

$$\lambda_1(Q_{\tau}^{-1}) = \lambda_2(Q_{\tau}^{-1}) = \frac{4}{3}.$$

Изложенная методика, таким образом, в данном примере позволила не только рассмотреть свойства собственных значений соответствующих матриц в виде неравенств, но и определить их точные значения практически без привлечения какой-либо вычислительной техники.

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967. 2. Герасименко М. Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. Владивосток, 1983. 3. Маршалл А., Олкин И. Неравенства. Теория мажоризации и ее приложения. М., 1983. 4. Тренков И. Върху характеристикните числа на корелационната матрица на наблюденията и корелационната матрица на изравнените наблюдения и неизвестните. Изв. на центр. лаб. по геодезия 1974. Кн. 14. С. 45—50. 5. Thompson R. C. Principal submatrices IX: Interlacing inequalities for singular values of submatrices // Linear Algebra and its Applications, 1972. V. 5. N 1. P. 1—12. 6. Thompson R. C., Freede L. J. On the eigenvalues of sums of Hermitian matrices // Linear Algebra and its Applications, 1971. V. 4. P. 369—376. 7. Thompson R. C., Thierston S. The eigenvalues of complementary principal submatrices of a positive definite matrix // Canadian Journal of Mathematics, 1972. V. 24. N 4. P. 658—667. 8. Тренков И. A study of the spectral properties of the matrices at an adjustment by the method of the least squares and its evolution // Results of the scientific cooperation between the Central laboratory of geodesy of the Bulgarian Academy of Sciences in Sofia and the Geodetic and Geophysical research Institute of the Hungarian Academy of Sciences in Sopron. Sopron, 1976. P. 11—60. 9. Тренков И. Une propriété du nombre de Todd des matrices normales obtenues en compensation par la méthode des moindres carrés // Bulletin geodésique, 1973. N 107. P. 85—88.

Статья поступила в редакцию 05. 01. 86

П. Д. ДВУЛИТ, Н. Д. ПОСПИЧУК

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДАМИ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Известно, что вертикальные смещения инженерных сооружений в основном зависят от физико-механических свойств грунтов и от случайных факторов: температуры, влажности грунта, изменения уровня грунтовых вод и др. [4]. В процессе эксплуатации инженерных сооружений по окончании подъема наружных фундаментов начинается осадка. Изменение осадки во времени аппроксимируют той или иной кривой, вид которой устанавливается по результатам геодезических измерений.

Вертикальные смещения прогнозируют, как правило, кривыми параболического, гиперболоического и экспоненциального типов. Подбор эмпирической формулы для прогнозирования осадки сооружений можно производить и другими методами. Однако все эти методы не дают удовлетворительных результатов. По данным прогнозирования вертикальных смещений инженерных сооружений [3—5], с помощью указанных типов уравнений можно сделать вывод, что для ближайших четырех—шести циклов наблюдений (для случая равных промежутков времени между ними) точность аппроксимации составляет 1...3 мм, что удовлетворяет практические потребности.

В данной работе для прогнозирования вертикальных смещений используем методы равномерной аппроксимации (Чебышевское приближение непрерывной функции алгебраическими многочленами или многочленами Чебышева) [1, 2]. Простейшая задача, приводящая к приближению функции, заключается в следующем: в дискретные моменты времени $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ наблюдается значение функции $f(x)$. Требуется определить ее значение при других значениях x .

Полином $S_m(x)$, наименее отклоняющийся в равномерном смысле от функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$, называется полиномом наилучшего равномерного приближения. Этот многочлен будем искать в виде

$$S_m(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m, \quad (1)$$

где A_0, A_1, \dots, A_m — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

В случае среднеквадратической аппроксимации функции $f(x)$ полиномами Чебышева аппроксимирующей многочлен имеет вид

$$S_m(x) = C_0 \cdot T_0(x) + C_1 T_1(x) + \dots + C_m \cdot T_m(x),$$

где C_0, C_1, \dots, C_m — коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева для функции $f(x)$, а T_m — полиномы Чебышева степени m , которые вычисляем по рекуррентной формуле [1]

$$T_{m+1}(x) = 2T_m(x) \cdot T_1(x) - T_{m-1}(x), \quad m=1, 2, \dots$$