УДК 528.34

Р. Г. ПИЛИПЮК

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ СЕТИ

Формулы передачи астрономических координат и азимута, выраженные в функциях измеренных горизонтальных углов и зенитных расстояний, приведены В. И. Рудским в работах [2, 3].

В настоящей статье рассматривается несколько иной путь решения этой же задачи на следующем примере. Пусть дана триангуляционная сеть, в которой известны астрономические координаты начального пункта φ_1, λ_1, азимут стороны *1—2*—α_{12}, а также измеренные величины горизонтальных углов a и зенитных расстояний β. Для вывода формул передачи астрономических координат и азимутов по известным и измеренным величинам воспользуемся следующим построением: проведем через смежные точки *1* и *2* триангуляционной сети линии параллельно оси вращения Земли, а также направления отвесных линий. Кроме того, в каждой из этих точек построим сферы единичного радиуса. Точки P, M, N с соответствующими индексами, полученные на поверхности каждой из единичных сфер в результате пересечения их поверхности с линиями, параллельными оси вращения Земли, отвесными линиями в точках *1* и *2*, а также направлением стороны триангуляционной сети, соединяем дугами больших кругов. В результате таких построений на поверхности сферы точки *1* образуется сферический треугольник $P_1M_1N_1$, в котором дуга $M_1P_1=90°—\varphi_1$, дуга $M_1N_1=\beta_{12}$, дуга $P_1N_1=u_{12}$, а угол при вершине $P_1=C_{12}$ (определение u, C дано в работе [1]). Аналогичный сферический треугольник $P_2M_2N_2$ образуется и на поверхности сферы точки *2*, причем дуга P_2M_2 в этом треугольнике будет равна $90°—\varphi_2$, дуга $M_2N_2=\beta_{21}$, дуга $P_2N_2=u_{21}$, а угол при вершине P_2 сферического треугольника равен C_{21}. Вертикальные плоскости $M_1N_1 1$ и $M_2N_2 2$, соответственно в первой и второй точках сети, образуют с плоскостью рассматриваемого треугольника *123* углы K_1^2 и K_2^1 [2]; в то же время плоскости $P_1N_1\,1$ и $P_2N_2\,2$ образуют с плоскостью того же треугольника углы T_1^2 и T_2^1, причем очевидно, что $T_1^2=T_2^1$ [1]. Обозначим в сферическом треугольнике $P_2M_2N_2$ угол при вершине N_2 через e_2^1, значение которого, как видно из рисунка, равно разности углов K_2^1 и T_2^1, то есть

$$|e_2^1| = K_2^1 - T_2^1. \qquad (1)$$

По формулам, приведенным в работах [2] и [1], значения углов K_2^1 и T_2^1 соответственно равны:

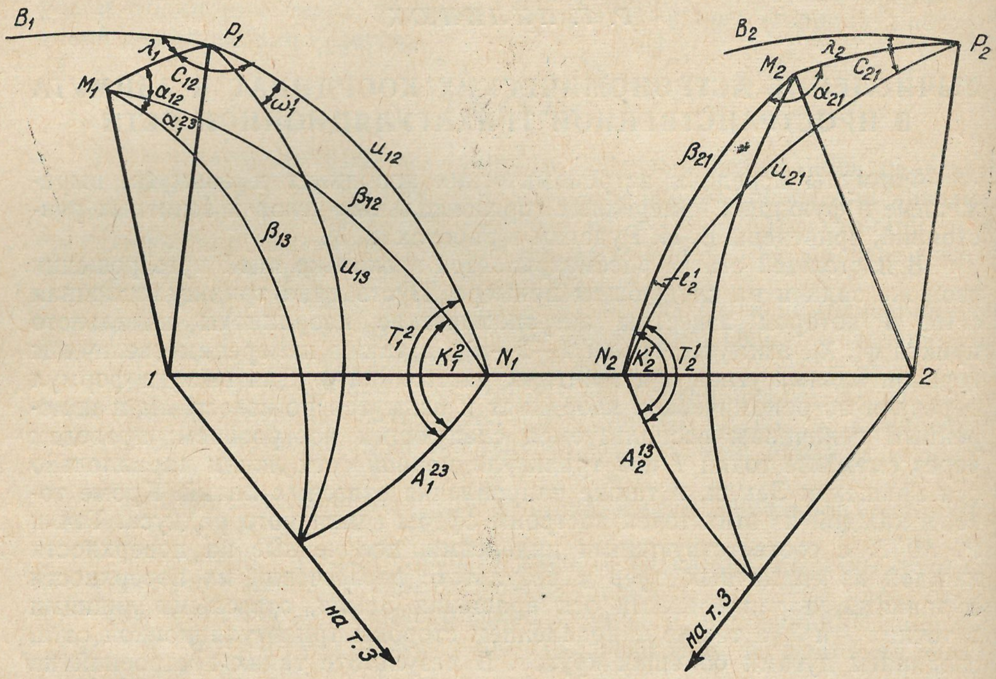
$$\operatorname{ctg} K_2^1 = \frac{\cos\beta_{23} - \cos\beta_{21}\cos A_2^{13}}{\sin a_2^{13}\sin\beta_{23}\sin\beta_{21}},$$

$$\sin T_2^1 = \sin T_1^2 = \frac{\sin u_{13}\sin\omega_1^1}{\sin A_1^{23}}$$

или

$$\cos T_2^1 = \cos T_1^2 = \frac{\cos u_{13} - \cos u_{12} \cos A_1^{23}}{\sin u_{12} \sin A_1^{23}},$$

где под углом A подразумевается значение угла в плоскости данного треугольника с вершинами в точках *1*, *2* или *3*. Значение этого угла нетрудно вычислить по измеренному в данной вершине горизонтальному углу a и зенитным расстояниям β на смежные вершины.



Из решения сферического треугольника $P_2M_2N_2$ по теореме косинусов определяем значение астрономической широты точки *2*. Получаем

$$\sin \varphi_2 = \cos \beta_{21} \cos u_{21} + \sin \beta_{21} \sin u_{21} \cos e_2^1.$$

Учитывая, что $u_{21} = 180° - u_{12}$, запишем это выражение таким образом:

$$\sin \varphi_2 = -\cos \beta_{21} \cos u_{12} + \sin \beta_{21} \sin u_{12} \cos e_2^1, \tag{2}$$

причем значение u_{12} определяется из выражения

$$\cos u_{12} = \cos \beta_{12} \sin \varphi_1 + \sin \beta_{12} \cos \varphi_1 \cos \alpha_{12}.$$

Используя теоремы синусов и косинусов сторон при решении этого же сферического треугольника $P_2M_2N_2$, получаем выражения, из которых можно определить значение обратного астрономического азимута стороны *2*—*1*—α_{21}.

Поскольку исследуемое направление может быть ориентировано различным образом, то более целесообразной будет формула, посредством которой угол a_{21} определяется через функцию тангенса, так как по знаку числителя и знаменателя этой формулы можно определить четверть, в которой находится рассматриваемое направление. Таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha_{21} = \frac{\sin u_{12} \sin e_2^1 \sin \beta_{21}}{-(\cos u_{12} + \cos \beta_{21} \sin \varphi_2)}. \tag{3}$$

Прежде чем приступить к определению астрономической долготы точки 2—λ_2, проведем вспомогательные построения на рисунке, которые заключаются в следующем: через точки P_1 и P_2 проводим дуги больших кругов P_1B_1 и P_2B_2 параллельно исходному астрономическому меридиану. В результате такого построения на поверхности сферы у точки P_1 образовался угол λ_1 (астрономическая долгота точки *1*) между дугами P_1B_1 и P_1M_1, а также угол γ_{12} (ориентирующий угол направления *1—2*, [1]) между дугой P_1B_1 и P_1N_1. Произведя подобным образом обозначения у точки P_2, мы получим сферические углы λ_2 (между дугами P_2B_2 и P_2M_2) и γ_{21} (между дугами P_2B_2 и P_2N_2). Исходя из смысла введенных величин γ_{21} и C_{21}, запишем следующее равенство:

$$\lambda_2 = \gamma_{21} - C_{21}, \tag{4}$$

или учитывая, что $\gamma_{21} = \gamma_{12} + 180°$, перепишем выражение (4) в таком виде:

$$\lambda_2 = \gamma_{12} \pm 180° - C_{21}, \tag{5}$$

Значение угла C_{21} легко определяется из решения сферического треугольника $P_2N_2M_2$, а именно:

$$\operatorname{tg} C_{21} = \frac{\sin \alpha_{21} \sin \beta_{21} \cos \varphi_2}{\cos \beta_{21} - \sin \varphi_2 \cos u_{21}}. \tag{6}$$

Формулу для определения C_{21} можно найти и в работе [1], где она записана в таком виде:

$$\operatorname{tg} C_{21} = \frac{\sin \alpha_{21} \sin \beta_{21}}{\cos \beta_{21} \cos \varphi_2 - \sin \beta_{21} \sin \varphi_2 \cos \alpha_{21}}. \tag{7}$$

При определении значения угла C следует учитывать, что формулы (6) и (7) дают возможность определить только значение табличного угла.

Ориентирующий же угол γ_{12} направления *1—2* определяется в точке *1* по исходному значению астрономической долготы λ_1 и вычисленному в этой же точке значению угла C_{12}, то есть

$$\gamma_{12} = \lambda_1 + C_{12}. \tag{8}$$

Из приведенных выше формул (5) и (8) можно сделать заключение, что разность долгот точек *1* и *2* — $\Delta\lambda_{12}$ равна разности углов C, то есть

$$\Delta\lambda_{12} = C_{12} - (C_{21} \pm 180°). \tag{9}$$

Вычисление астрономических координат последующих пунктов триангуляционной сети производится по приведенным выше формулам, записанным для каждой конкретной передачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипюк Р. Г. К вопросу о передаче координат в сети пространственной триангуляции. Республ. межведомств. науч.-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 11. Изд-во Львовского ун-та, 1970.

2. Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. Респ. межведом. науч.-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4. Изд-во Львовского ун-та, 1966.

3. Рудский В. И. К вопросу о передаче астрономических координат и азимута. Респ. межведом. науч.-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львовского ун-та, 1967.

Работа поступила
1 апреля 1969 года.