УДК 528.23.24

А. Е. ФИЛИППОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Известны следующие дифференциальные формулы, выражающие поправки геодезического зенитного расстояния Z_{12} и геодезического азимута A_{12} прямой P_1P_2 как функции поправок геодезических координат B_1, L_1, H_1, B_2, L_2, H_2 ее конечных точек [1]:

$$
\begin{gathered}
s dZ_{12}=\overline{m}_1 dL_2+\overline{m}_2 dB_2+\overline{m}_3 dH_2-m_1 dL_1-m_2 dB_1-m_3 dH_1-\\
-s\cos B_1\sin A_{12}dL_1-s\cos A_{12}dB_1, \qquad (1)\\
s\sin Z_{12}dA_{12}=-\overline{n}_1 dL_2-\overline{n}_2 dB_2-\overline{n}_3 dH_2+n_1 dL_1+n_2 dB_1+n_3 dH_1+\\
+s(\sin B_1\sin Z_{12}-\cos B_1\cos A_{12}\cos Z_{12})dL_1+s\sin A_{12}\cos Z_{12}dB_1,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
m_1=(N_1+H_1)\cos B_1\sin A_{12}\cos Z_{12}, \qquad n_1=-(N_1+H_1)\cos B_1\cos A_{12},\\
m_2=(M_1+H_1)\cos A_{12}\cos Z_{12}, \qquad n_2=(M_1+H_1)\sin A_{12}, \qquad (2)\\
m_3=-\sin Z_{12}, \qquad n_3=0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\overline{m}_1=(N_2+H_2)\cos B_2[-\sin A_{21}\sin Z_{21}\operatorname{ctg} Z_{12}+\cos B_1\operatorname{cosec} Z_{12}\sin(L_2-L_1)],\\
\overline{m}_2=(M_2+H_2)[-\cos A_{21}\sin Z_{21}\operatorname{ctg} Z_{12}-\sin B_1\cos B_2\operatorname{cosec} Z_{12}+\\
+\cos B_1\sin B_2\operatorname{cosec} Z_{12}\cos(L_2-L_1)], \qquad (3)\\
\overline{m}_3=-\cos Z_{21}\operatorname{ctg} Z_{12}-\cos B_1\cos B_2\operatorname{cosec} Z_{12}\cos(L_2-L_1)-\\
\sin B_1\sin B_2\operatorname{cosec} Z_{12},
\end{gathered}
$$

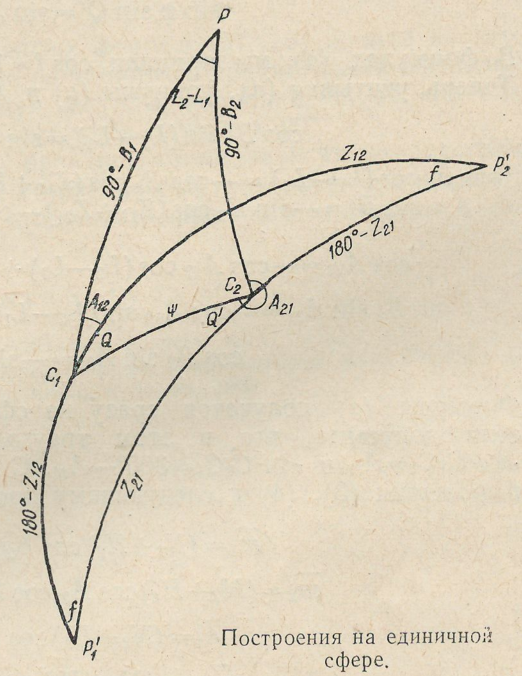
$$
\begin{gathered}
\overline{n}_1=(N_2+H_2)\cos B_2[-\cos A_{12}\cos(L_2-L_1)+\sin A_{12}\sin B_1\sin(L_2-L_1)],\\
\overline{n}_2=(M_2+H_2)\{\cos A_{12}\sin B_2\sin(L_2-L_1)+\\
+\sin A_{12}[\cos B_1\cos B_2+\sin B_1\sin B_2\cos(L_2-L_1)]\}, \qquad (4)\\
\overline{n}_3=-\cos A_{12}\cos B_2\sin(L_2-L_1)+\sin A_{12}[\cos B_1\sin B_2-\\
-\sin B_1\cos B_2\cos(L_2-L_1)].
\end{gathered}
$$

В этих формулах $M=a(1-e^2)(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}$ и $N=a(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}$ — главные радиусы кривизны поверхности отсчетного эллипсоида с параметрами a, e^2; Z_{21} и A_{21} — зенитное расстояние в азимут направления P_2P_1 в точке P_2; s — длина прямой P_1P_2. Формулы используются для составления уравнений поправок при уравнивании сети пространственной триангуляции косвенным методом.

В настоящем сообщении мы хотим показать, как можно значительно упростить довольно громоздкие выражения для коэффициентов $\overline{m}_i$, $\overline{n}_i$

$(i=1, 2, 3)$, имея в виду расстояния между пунктами порядка длин сторон треугольников триангуляции.

Через центр вспомогательной единичной сферы проведем прямые, соответственно параллельные малой оси отсчетного эллипсоида, нормалям к его поверхности в точках P_1 и P_2, направлениям P_1P_2 и P_2P_1. Точки пересечения этих прямых с единичной сферой $(P, C_1, C_2, P_2', P_1')$ соединим дугами больших кругов, как показано на рисунке. Пусть $\sphericalangle P_2C_1C_2=Q$, $\sphericalangle P_1'C_2C_1=Q'$, $\smile C_1C_2=\psi$. Через f обозначим сферический угол $C_1P_2'C_2$ (или $\sphericalangle C_1P_1'C_2$), равный углу между взаимными нормальными плоскостями в точках P_1 и P_2. Остальные обозначения на рисунке вытекают из выполненного построения и самого определения геодезических координат точки, геодезического азимута и геодезического зенитного расстояния прямой.



Построения на единичной сфере.

Из сферического треугольника C_1C_2P

$$\cos B_1 \sin(L_2-L_1) = -\sin(A_{21}+Q')\sin\psi = -\sin A_{21}\sin\psi\cos Q' - \cos A_{21}\sin\psi\sin Q',$$

$$\cos B_1\cos(L_2-L_1) = \cos\psi\cos B_2 - \sin\psi\sin B_2\cos(A_{21}+Q') = \cos\psi\cos B_2 - \sin B_2\cos A_{21}\sin\psi\cos Q' + \sin B_2\sin A_{21}\sin\psi\sin Q', \quad (a)$$

$$\sin B_1 = \sin B_2\cos\psi + \cos B_2\sin\psi\cos(A_{21}+Q') = \sin B_2\cos\psi + \cos B_2\cos A_{21}\sin\psi\cos Q' - \cos B_2\sin A_{21}\sin\psi\sin Q',$$

$$\begin{aligned} &\cos(A_{21}+Q') = -\cos(A_{12}+Q)\cos(L_2-L_1) + \sin(A_{12}+Q)\sin(L_2-L_1)\sin B_1,\\ &-\sin(A_{21}+Q')\sin B_2 = \cos(A_{12}+Q)\sin(L_2-L_1) + \sin(A_{12}+Q)\cos(L_2-L_1)\sin B_1,\\ &-\sin(A_{21}+Q')\cos B_2 = \sin(A_{12}+Q)\cos B_1. \end{aligned} \quad (b)$$

Умножив все члены равенств (b) на $\sin\psi$ и раскрыв синусы и косинусы сумм, получаем

$$\begin{aligned} &\cos A_{21}\sin\psi\cos Q' - \sin A_{21}\sin\psi\sin Q' =\\ &= -\cos A_{12}\cos(L_2-L_1)\sin\psi\cos Q + \sin A_{12}\cos(L_2-L_1)\sin\psi\sin Q +\\ &+ \sin A_{12}\sin(L_2-L_1)\sin B_1\sin\psi\cos Q +\\ &+ \cos A_{12}\sin(L_2-L_1)\sin B_1\sin\psi\sin Q,\\ &-\sin A_{21}\sin B_2\sin\psi\cos Q' - \cos A_{21}\sin B_2\sin\psi\sin Q' =\\ &= \cos A_{12}\sin(L_2-L_1)\sin\psi\cos Q - \sin A_{12}\sin(L_2-L_1)\sin\psi\sin Q + \quad (c)\\ &+ \sin A_{12}\cos(L_2-L_1)\sin B_1\sin\psi\cos Q +\\ &+ \cos A_{12}\cos(L_2-L_1)\sin B_1\sin\psi\sin Q, \end{aligned}$$

$$-\sin A_{21}\cos B_2\sin\psi\cos Q'-\cos A_{21}\cos B_2\sin\psi\sin Q'=$$
$$=\sin A_{12}\cos B_1\sin\psi\cos Q+\cos A_{12}\cos B_1\sin\psi\sin Q.$$

Из сферических треугольников $C_1C_2P_2'$ и $C_1C_2P_1'$ находим

$$\begin{gathered}\cos\psi=-\cos Z_{12}\cos Z_{21}+\sin Z_{12}\sin Z_{21}\cos f\approx-\cos(Z_{12}+Z_{21}),\\ \sin\psi\cos Q=-\cos Z_{21}\sin Z_{12}-\sin Z_{21}\cos Z_{12}\cos f\approx-\sin(Z_{12}+Z_{21}),\\ \sin\psi\sin Q=\sin Z_{21}\sin f\approx 0,\\ \sin\psi\cos Q'=-\cos Z_{12}\sin Z_{21}-\sin Z_{12}\cos Z_{21}\cos f\approx-\sin(Z_{12}+Z_{21}),\\ \sin\psi\sin Q'=\sin Z_{12}\sin f\approx 0.\end{gathered}\tag{d}$$

В формулах (d) мы приняли $\cos f=1$, $\sin f=0$, так как угол f мал. Теперь, учитывая (d), формулы (a) и (c), записываем так:

$$\begin{gathered}\cos B_1\sin(L_2-L_1)=\sin A_{21}\sin(Z_{12}+Z_{21}),\\ \cos B_1\cos(L_2-L_1)=-\cos B_2\cos(Z_{12}+Z_{21})+\sin B_2\cos A_{21}\sin(Z_{12}+Z_{21}),\\ \sin B_1=-\sin B_2\cos(Z_{12}+Z_{21})-\cos B_2\cos A_{21}\sin(Z_{12}+Z_{21}),\\ \cos A_{21}=-\cos A_{12}\cos(L_2-L_1)+\sin A_{12}\sin(L_2-L_1)\sin B_1,\\ \sin B_2\sin A_{21}=-\cos A_{12}\sin(L_2-L_1)-\sin A_{12}\cos(L_2-L_1)\sin B_1,\\ \cos B_2\sin A_{21}=-\sin A_{12}\cos B_1.\end{gathered}\tag{e}$$

Формулы (e) получатся сразу из сферического треугольника C_1C_2P, если допустить, что в этом треугольнике $\smile C_1C_2=(Z_{12}+Z_{21})-180°$, $\measuredangle PC_1C_2=A_{12}$ и $\measuredangle PC_2C_1=360°-A_{21}$. С помощью (e) нетрудно привести выражения (3), (4) к следующему простому виду:

$$\bar{m}_1=(N_2+H_2)\cos B_2\sin A_{21}\cos Z_{21},$$
$$\bar{m}_2=(M_2+H_2)\cos A_{21}\cos Z_{21},\quad \bar{m}_3=-\sin Z_{21},\tag{5}$$
$$\bar{n}_1=(N_2+H_2)\cos B_2\cos A_{21},$$
$$\bar{n}_2=-(M_2+H_2)\sin A_{21},\quad \bar{n}_3=0.\tag{6}$$

Введем обозначения

$$du_2=\frac{(N_2+H_2)\cos B_2}{\rho''}dL_2'',\quad dv_2=\frac{(M_2+H_2)}{\rho''}dB_2'',\quad dw_2=dH_2,$$

где du_2, dv_2, dw_2 — малые линейные смещения точки P_2 вдоль координатных линий геодезической системы. Тогда погрешность поправок dZ_{12} и dA_{12}, если при их вычислении вместо формул (3), (4) использовать формулы (5), (6), будет соответственно порядка $f''\dfrac{dp}{s}$ и $f''\dfrac{dp}{s\sin Z_{12}}$, где $dp=du_2$, dv_2, dw_2.

Угол f между взаимными нормальными плоскостями можно выразить следующей формулой

$$\sin f=e^2(N_1\sin B_1-N_2\sin B_2)\frac{\cos B_2\sin A_{21}}{(N_1+H_1)\sin Z_{12}},\tag{7}$$

откуда с точностью, достаточной при вычислениях в триангуляции, нетрудно получить

$$f''=\frac{e^2 s\cos^2 B_m\sin 2A_m}{2a}\rho''.\tag{8}$$

В последней формуле $B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2)$, $A_m=\frac{1}{2}(A_{12}+A_{21}\pm 180^\circ)$, s — расстояние по прямой между точками.

При $s=40$ *км*, $B_m=0^\circ$, $A_m=45^\circ$ из формулы (8) следует $f\approx 4''$. При тех же данных и $dp=1$ *м* получим для оценки ошибок поправок dZ_{12}, dA_{12}, вызванных погрешностью формул (5) и (6), следующие величины:

$$\Delta(dZ_{12})=f''\frac{dp}{s}\approx 0'',0001,$$

$$\Delta(dA_{12})=f''\frac{dp}{s}\operatorname{cosec} Z_{12}\approx 0'',0001\operatorname{cosec} Z_{12}.$$

Как видим, точность приближенных формул (5), (6) вполне достаточна, так как азимуты и зенитные расстояния в триангуляции вычисляются максимум до тысячных долей секунды, поправки du, dv, dw редко превышают 1 *м*, а зенитные расстояния близки к 90°.

Ошибки $\Delta(dZ_{12})$, $\Delta(dA_{12})$ практически не зависят от расстояния s между пунктами, так как от s практически не зависит отношение f/s.

Формулы (6) без вывода и оценки погрешности приведены в работе Дюфура [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hotine M. A primer of non-classical geodesy. A.I.G. Venice, 1959.
2. Dufour H. Étude de la compensation du réseau européen dans l'optique de la géodésie tridimensionnelle. Bulletin géodésique, № 68, 1963.

Работа поступила
15 марта 1969 года.