

О ТОЧНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ В СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ, ПРОЛОЖЕННЫХ МЕЖДУ АЗИМУТАЛЬНО-ДАЛЬНОМЕРНЫМИ ХОДАМИ

Точность рядов трилатерации из треугольников, в которых дирекционные углы имеются не только на концах, но и в середине рядов, изучали К. Арнольд [5] и А. В. Заводовский [1]. При этом К. Арнольд рассматривал ряды с дирекционными углами промежуточных сторон, а А. В. Заводовский — связующих. Несмотря на это, оба исследователя пришли к заключению, что на точность пунктов ряда трилатерации эффективно действуют дирекционные углы, находящиеся на его концах. А дирекционные углы, имею-

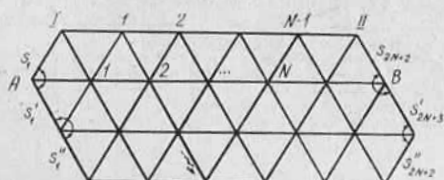


Рис. 1. Схема трехкратного ряда.

щиеся в середине, мало повышают точность пунктов. Исследования точности пунктов двух- и трехкратных рядов треугольников с измеренными сторонами при разном количестве и расположении исходных дирекционных углов показали, что в них значительно повышают точность пунктов дирекционные углы только крайних связующих сторон [3]. Поэтому представляет интерес изучение точности сетей с дирекционными углами крайних связующих сторон.

Рассмотрим сети трилатерации из треугольников, в которых исходные дирекционные углы имеют все крайние связующие стороны. Так, в сети из трех рядов (рис. 1) примем, что исходные дирекционные углы имеют стороны $s_1, s'_1, s_2, s_{2N+2}, s'_{2N+3}, s''_{2N+2}$. Поскольку длины этих сторон, как и всех остальных, измерены, то можно сказать, что на левом и правом краях сети имеем своеобразные азимутально-дальномерные ходы.

Исследования проведем в сетях трилатерации из трех, пяти и семи рядов равносторонних треугольников. Точность положения пунктов будем характеризовать поперечным и продольным сдвигами. Вычисление сдвигов проведем для всех пунктов, расположенных в верхней половине сети. Так, в сети из трех рядов определим сдвиги пунктов диагонали $I II$ относительно пункта I и пунктов диагонали AB относительно пункта A (см. рис. 1). В сети из пяти рядов оценим положение пунктов диагоналей III, AB и CD (рис. 2), а в сети из семи рядов — пунктов диагоналей III, AB, CD и EF (рис. 3). Число оцениваемых пунктов на каждой диагонали, кроме крайней (III), составляет $N+1$, а на крайней оно

равно N . Таким образом, в трехкратных рядах определяли сдвиги $2N+1$ пунктов, в пятикратных — $3N+2$, а в семикратных — $4N+3$. Благодаря симметричности исследуемых сетей результаты оценки точности пунктов, полученные для верхней половины сети, можно распространить и на ее нижнюю часть.

Для вычисления обратных весов сдвигов пунктов составлены все возникающие в сети условные уравнения и весовые функции.

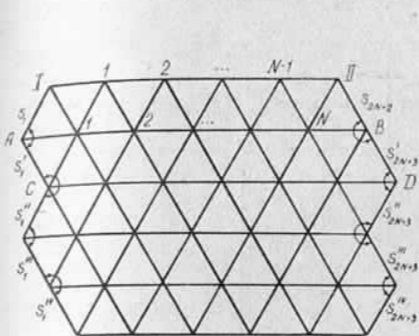


Рис. 2. Схема пятикратного ряда.

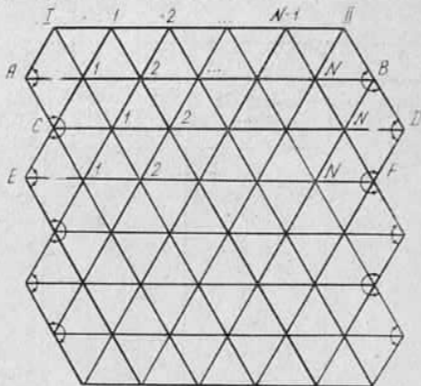


Рис. 3. Схема семикратного ряда.

В исследуемых сетях возникает $N(n-1)$ условных уравнений фигур и $2n-1$ условных уравнений дирекционных углов. Здесь n — число рядов треугольников в сети, а N — число центральных систем в ее одном сдвоенном ряду. Условные уравнения центральных систем и дирекционных углов несмежных сторон, а также весовые функции сдвигов пунктов составлены, как в [2]. Условные уравнения дирекционных углов смежных сторон представляют собой условия суммы углов, имеющих между этими сторонами.

Обнаруженные закономерности образования элементов матриц нормальных уравнений и векторов нормальных весовых функций позволили составить программу, формирующую их на ЭВМ для сетей с разным числом рядов и разным числом центральных систем в одном сдвоенном ряду. На ЭВМ ЕС-1022 вычислены обратные веса, а по ним — средние квадратические сдвиги оцениваемых пунктов сетей из трех, пяти и семи рядов с $N=5, 10, 15, 20$ и 25 в каждом из них. Это позволило проследить влияние числа фигур в ряду и количества рядов на точность положения пунктов сетей трилатерации между азимутально-дальномерными ходами.

На ЭВМ вычислены также сдвиги пунктов аналогичных свободных сетей, т. е. сетей без избыточных дирекционных углов. Сравнение полученных результатов позволяет выявить эффект действия исходных дирекционных углов на точность положения пунктов. Оказалось, что общие закономерности накопления ошибок положения пунктов и влияния дирекционных углов на точность пунктов сохраняются в сетях с разным числом фигур. Поэтому для приме-

ра в табл. 1—3 приведены сдвиги (в числителе — поперечные, а в знаменателе — продольные) оцениваемых пунктов, а также их изменения в процентах, вызванные наличием исходных дирекционных углов, в сетях из трех, пяти и семи рядов с $N=10$, т. е. с числом треугольников в одном ряду, равным 21—22. Кроме того, в табл. 1 приведены сдвиги пунктов свободного трехкратного ряда

Таблица 1

Сдвиги пунктов трехкратного ряда с $N=10$ в см
 $\mu=1$ см

К	Диагональ I II			Диагональ AB		
	свободная сеть	сеть с дирекционными углами	изменения, %	свободная сеть	сеть с дирекционными углами	изменения, %
1	2,0	1,4	30	1,3	1,0	23
	0,9	0,9	0	0,9	0,8	11
2	3,3	1,8	45	2,6	1,4	46
	1,3	1,2	8	1,2	1,0	17
3	4,7	2,3	51	4,0	1,9	53
	1,6	1,4	13	1,3	1,1	15
4	6,1	2,9	52	5,4	2,5	54
	1,8	1,5	15	1,5	1,2	20
5	7,6	3,5	54	6,8	3,1	54
	1,9	1,6	16	1,6	1,3	19
6	9,2	4,1	55	8,4	3,8	55
	2,1	1,7	19	1,6	1,4	15
7	10,8	4,7	56	10,0	4,4	56
	2,3	1,8	22	1,7	1,5	12
8	12,5	5,2	58	11,7	5,0	57
	2,4	1,8	25	1,8	1,6	11
9	14,6	5,7	60	13,4	5,5	59
	2,6	1,8	31	1,9	1,6	16
10	16,1	5,9	63	15,1	5,8	62
	2,7	1,9	30	2,0	1,7	18
11				17,0	5,9	65
				2,1	1,7	19

для иллюстрации изменений, вызванных дирекционными углами. В табл. 4 имеются сдвиги концов диагоналей сетей, состоящих из трех, пяти и семи рядов, при разном числе фигур в одном ряду, а также их изменение по сравнению со свободными сетями.

Из проведенных исследований следует.

1. Точность положения пунктов в сетях трилатерации, проложенных между азимутально-дальномерными ходами, значительно выше, чем в свободных сетях. Так, точность наиболее слабых

Сдвиги пунктов пятикратного ряда с $N=10$, проложенного между азимутально-дальномерными ходами, и их изменения по сравнению со сдвигами пунктов свободной сети $\mu=1$ см

К	Диагонали					
	I II		AB		CD	
	сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, см	изменения, %
1	1,4	31	1,0	26	1,2	40
	0,9	9	0,8	21	0,9	22
3	2,0	57	1,7	56	1,8	61
	1,3	15	1,1	19	1,1	21
5	2,6	65	2,4	65	2,5	66
	1,5	19	1,3	18	1,3	18
7	3,2	69	3,0	69	3,2	69
	1,6	24	1,4	19	1,4	16
9	3,8	72	3,6	71	3,8	72
	1,6	32	1,5	20	1,5	15
10	3,9	76	3,9	72	3,9	74
	1,7	34	1,5	22	1,5	15
11			4,0	75	3,9	77
			1,5	26	1,5	18

пунктов, т. е. концов диагоналей, в сетях из трех рядов в два раза выше, в сетях из пяти и семи рядов — в три-четыре раза выше, чем в свободных сетях.

2. Исходные дирекционные углы сильнее уменьшают поперечные сдвиги, чем продольные. Это влечет за собой уменьшение примерно в два раза соотношения поперечного и продольного сдвигов пунктов. В семикратных рядах с $N=5$ соотношение сдвигов не превышает 2, а с $N=25$ (51—52 треугольника в ряду) — 4. В аналогичных свободных сетях они составляют соответственно 5 и 16.

3. Относительное уменьшение поперечных сдвигов пунктов под действием исходных дирекционных углов слабо зависит от числа фигур в ряду и от числа рядов в сети. Так, в трехкратном ряду с дирекционными углами поперечные сдвиги концов диагоналей в среднем уменьшились на 64, в пятикратном — на 73 и в семикратном — на 79%.

4. Действие исходных дирекционных углов на поперечные сдвиги пунктов усиливаются с увеличением номера пункта. Таким образом, можем сказать, что дирекционные углы ослабляют зависимость поперечных сдвигов пунктов от их номеров, т. е. от удаления пунктов от края сети.

Сдвиги пунктов семикратного ряда с $N=10$, проложенного между азимутально-дальномерными ходами, и их изменения по сравнению со сдвигами пунктов свободной сети $\mu=1$ см

К	Диагонали							
	III		AB		CD		EF	
	сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, см	изменения, %
1	1,4	32	1,0	26	1,2	40	1,2	62
	0,8	10	0,8	17	0,9	0	1,0	10
3	1,9	59	1,7	64	1,7	63	1,6	71
	1,2	18	1,1	20	1,1	19	1,1	19
5	2,3	69	2,1	69	2,2	71	2,0	75
	1,4	21	1,2	19	1,2	17	1,2	17
7	2,7	74	2,6	74	2,6	75	2,5	77
	1,5	27	1,4	20	1,4	16	1,3	15
9	2,9	75	3,0	76	3,0	77	2,9	79
	1,5	27	1,5	22	1,4	15	1,4	16
10	3,1	76	3,2	77	3,2	78	3,1	80
	1,5	31	1,5	24	1,5	17	1,4	18
11			3,2	79	3,1	81	3,2	81
			1,4	29	1,4	20	1,4	22

Полученные результаты позволяют сделать заключение, что точность сетей трилатерации можно существенно повысить определением дирекционных углов крайних сторон. Оценка точности сетей трилатерации, проложенных между азимутально-дальномерными ходами, в которых азимутальные и линейные измерения равноточны, т. е. $m_a/\rho = m_s/S$, показала, что в них точность положения пунктов ухудшается всего на несколько процентов по сравнению с такими же сетями с исходными дирекционными углами. При этом сохраняются общие закономерности распределения погрешностей положения пунктов. Поэтому все вышесделанные выводы можно отнести также к сетям, проложенным между азимутально-дальномерными ходами, при условии, что точность определения дирекционных углов не ниже точности измерения сторон сети.

Стороны сетей трилатерации можно измерить радио- и светодальномерами. Современные светодальномеры позволяют измерять длины сторон с относительной ошибкой 1:350000...1:400000. Построенные ими сплошные сети по точности не будут уступать аналогичным сетям триангуляции 2-го класса. Для достижения еще более высокой точности по краям сети необходимо проложить

Сдвиги концов диагоналей сетей, проложенных между азимутально-дальномерными ходами, и их изменения по сравнению со свободной сетью
 $\mu = 1 \text{ см}$

		Диагонали							
		I II		A B		C D		E F	
N		сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, %	изменения, %	сдвиги, см	изменения, %	сдвиги, см	изменения, см
Трехкратный ряд									
5		2,9	64	2,9	59				
		1,4	28	1,3	17				
10		5,9	63	5,9	65				
		1,9	30	1,7	19				
15		10,0	60	9,8	62				
		2,1	33	2,0	14				
20		14,8	59	14,5	60				
		2,5	34	2,3	13				
25		20,2	58	19,8	60				
		2,8	34	2,6	13				
Пятикратный ряд									
5		2,0	73	2,3	74	2,0	75		
		1,4	33	1,2	23	1,0	30		
10		3,9	76	4,0	75	3,9	77		
		1,7	34	1,5	26	1,5	18		
15		6,1	73	6,1	72	6,0	74		
		1,9	34	1,7	27	1,7	16		
20		8,5	73	8,6	72	8,5	73		
		2,2	35	2,0	27	2,0	13		
25		11,2	72	11,5	71	11,4	72		
		2,4	35	2,2	27	2,2	12		
Семикратный ряд									
5		1,9	74	2,1	68	2,0	70	2,1	72
		1,3	27	1,1	29	1,1	26	1,1	26
10		3,1	76	3,2	79	3,1	81	3,1	81
		1,5	31	1,4	29	1,4	20	1,4	22
15		4,6	78	4,6	79	4,5	80	4,7	80
		1,8	31	1,6	28	1,6	20	1,6	19
20		6,2	79	6,3	78	6,2	79	6,3	79
		2,0	32	1,8	28	1,8	20	1,8	15
25		7,9	80	8,2	78	8,1	79	8,2	79
		2,3	32	2,1	28	2,0	20	2,0	13

азимутальные ходы, в которых азимуты должны определяться точностью $0,5''$.

В сетях трилатерации, построенных радиодальномерами, обеспечивающими измерения сторон с относительной ошибкой $1:200\,000$, точность положения пунктов в два раза ниже аналогичной сети триангуляции, в которой углы измерены со среднеквадратической ошибкой $0,9''$, т. е. сети триангуляции 2-го класса [4]. Прокладывая по краям сети трилатерации азимутальные ходы, в которых азимуты измеряются с ошибкой $1,0''$, можно достигнуть в ней точности положения пунктов не ниже, чем в сети триангуляции 2-го класса, т. к. такой ход повышает точность положения пунктов в три раза.

Как указывалось выше, условные уравнения дирекционных углов смежных сторон представляют собой условия суммы углов между этими сторонами. Поэтому полученные результаты можно распространить также на сети, в которых имеются только два исходных дирекционных угла, по одному с одной и другой стороны сети (например, стороны s_1 и s_{2N+2}) и $2n$ исходных углов (они показаны на рисунках).

Такой подход к проведенным исследованиям открывает еще один, более простой способ повышения точности сетей трилатерации, построенных радиодальномерами. Он заключается в определении на основании астрономических наблюдений дирекционных углов четырех сторон, находящихся в углах сети, и в измерении с точностью $1,0''$ углов между крайними сторонами. Следовательно, сеть трилатерации создается между двумя радиодальномерными полигонометрическими ходами, каждый из которых опирается на стороны с дирекционными углами, определенными астрономическим путем. Такая сеть по точности не будет уступать аналогичной сети триангуляции 2-го класса.

Данные таблиц, в которых сдвиги определены по средней квадратической ошибке измеренной стороны, равной 1 см, можно рассматривать также, как соотношения сдвигов и средних квадратических ошибок измеренных сторон. Это позволяет определять по таблицам сдвиги пунктов сетей при любой точности измерения сторон.

1. Заводовский А. В. Оценка точности линейных триангуляций // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. геодез. 1959. № 5. С. 3—33. 2. Костецкая Я. М. К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1967. Вып. 6. С. 25—41. 3. Костецкая Я. М., Герасимов Ю. В. О точности сетей трилатерации с исходными дирекционными углами // Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982. Вып. 35. С. 57—64. 4. Судков С. Г. Дальнейшее развитие схемы и программы построения государственной геодезической сети СССР // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1960. Вып. 1. С. 17—27. 5. Arnold K. Zur Fehlertheorie der streckenmessender Triangulation. Berlin, 1952.

Статья поступила в редколлегию 30.12.83