УДК 550.83

А. Л. ЦЕРКЛЕВИЧ, Ю. П. ДЕЙНЕКА

ОЦЕНКА ЛАТЕРАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПЛОТНОСТИ В ВЕРХНЕМ СЛОЕ ЗЕМЛИ

Потребность в разработке новых методов обнаружения полезных ископаемых ставит перед исследователями задачу построения комплексной геолого-геофизической модели коры и верхней мантии. При решении этой задачи возникает необходимость постановки и решения обратной задачи гравиметрии (ОЗГ) с учетом сферичности планеты.

Ниже рассматриваем однопараметрическую обратную задачу определения латеральных плотностных неоднородностей в слое Земли, охватывающем ее кору и верхнюю мантию.

Постановка задачи и алгоритм ее решения. Будем решать указанную ОЗГ в классе выбранной модели, которой является сферическая четырехугольная (треугольная) усеченная пирамида однородной плотности. Разобъем шаровой слой Земли на $\{S_i\}$, $i=\overline{1, N}$ сферических четырехугольных (в полярных областях треугольных) усеченных соприкасающихся пирамид, ограниченных координатными поверхностями Θ_{1i}, Θ_{2i}, λ_{1i}, λ_{2i}, r_{1i}, r_{2i}. Пусть исходной информацией для данной задачи служат значения аномального вертикального градиента потенциала притяжения $\Delta \bar{V}_j^r$, усредненные по прямоугольным трапециям на поверхности планеты. Требуется определить среднюю плотность δ_i для каждой сферической усеченной пирамиды при условии, что число искомых плотностей равно числу задаваемых значений $\Delta \bar{V}_i^r$ (равномощная обратная задача [1]).

Вертикальный градиент потенциала притяжения i-й сферической усеченной пирамидой произвольной точки пространства P можно описать соотношением

$$V^r(R_p, \Theta_p, \lambda_p) = f\bar{\delta}_i \int\limits_{r_{1i}}^{r_{2i}} \int\limits_{\Theta_{1i}}^{\Theta_{2i}} \int\limits_{\lambda_{1i}}^{\lambda_{2i}} \frac{r^2 (R_p - r\cos\psi)}{\rho^3} \sin\Theta d\Theta\, d\lambda dr, \tag{1}$$

где

$$\rho = (R_p^2 + r^2 - 2rR_p\cos\psi)^{1/2}, \tag{2}$$

$$\cos\Psi = \cos\Theta_p\cos\Theta + \sin\Theta_p\sin\Theta\cos(\lambda_p - \lambda). \tag{3}$$

Величину $(R_p - r\cos\psi)/\rho^3$, входящую в подынтегральное выражение (1), выгодно разложить в ряд по полиномам Лежандра

$$(R_p - r\cos\Psi)/\rho^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, r^n P_n(\cos\Psi)/R_p^{n+2}. \tag{4}$$

Учитывая разложение (4), формулу для вертикального градиента потенциала от суммарного притяжения N сферических усеченных пирамид на произвольную точку P представим в таком окончательном виде:

$$V^r(R_p, \Theta_p, \lambda_p) = f\sum_{i=1}^{N} \bar{\delta}_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(n+3)} \frac{R^{n+3} - (R-h)^{n+3}}{R^{n+2}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n} [\bar{R}'_{nm}(\Theta_p, \lambda_p)\bar{R}_{nm}(\Theta_i, \lambda_i) + \bar{S}'_{nm}(\Theta_p, \lambda_p)\bar{S}_{nm}(\Theta_i, \lambda_i)], \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{matrix} \bar{R}'_{nm}(\Theta_p, \lambda_p) \\ \bar{S}'_{nm}(\Theta_p, \lambda_p) \end{matrix}\right\} = \bar{P}_{nm}(\cos\Theta_p) \begin{matrix} \cos m\lambda_p \\ \sin m\lambda_p, \end{matrix} \tag{6}$$

$$\left.\begin{matrix} \bar{R}_{nm}(\Theta_i, \lambda_i) \\ \bar{S}_{nm}(\Theta_i, \lambda_i) \end{matrix}\right\} = \iint\limits_{\sigma_i} \bar{P}_{nm}(\cos\Theta_i)\sin\Theta \begin{matrix} \cos m\lambda_i \\ \sin m\lambda_i \end{matrix} d\Theta_i d\lambda_i. \tag{7}$$

Здесь принято $r = R_p = R$ — средний радиус планеты; h — высота пирамиды; σ_i — площадь основания на поверхности планеты i-й пирамиды; $P_{nm}(\cos\Theta)$ — нормированные присоединенные полиномы Лежандра, $\bar{P}_{nm}(\cos\Theta)$ и $\int\limits_{\Theta_{1i}}^{\Theta_{2i}} P_{nm}(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta$ удобно вычислять по рекуррентным соотношениям [8].

Значения аномального вертикального градиента потенциала притяжения $\Delta\bar{V}_j^r$, усредненного по прямоугольным трапециям σ_j на поверхности планеты, определим из соотношения

$$\Delta\bar{V}_j^r = \frac{fM}{R^2\sigma_j}\sum_{n=2}^{N}(n+1)\sum_{m=0}^{n}[\bar{c}^*_{nm}\bar{R}'_{nm}(\Theta_j,\lambda_j)+\bar{s}_{nm}\bar{S}'_{nm}(\Theta_j,\lambda_j)], \qquad (8)$$

где c^*_{nm}, $\bar{s}_{nm}$ — гармонические коэффициенты, характеризующие модель гравитационного поля планеты, представляемую в виде разложения потенциала притяжения по шаровым функциям; fM — планетоцентрическая постоянная.

Таким образом, на основании заданной совокупности сферических усеченных пирамид $\{S_i\}$ и значений $\{\Delta\bar{V}_j^r\}$, i, $j=1, N$ можем записать систему линейных уравнений для определения $\bar{\delta}_i$

$$\sum_{i=1}^{N} V^r_{ji}\bar{\delta}_i = \Delta\bar{V}^r_j. \qquad (9)$$

Для удобства представим систему уравнений (9) в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax=b, \qquad (10)$$

где $x\in H_1$ — искомый элемент; $b\in H_2$ — заданный элемент; A — произвольный (линейный вполне непрерывный) оператор; H_1 и H_2 — некоторые конечномерные гильбертовы пространства. Уравнение (10) для рассматриваемой обратной однослойной гравиметрической задачи однозначно разрешимо относительно x [1, 4]. Однако в большинстве случаев вследствие присутствия ошибок ε и η правой части и оператора система (10) несовместима, т. е. разрешима не для всех $b\in H_2$. Поэтому вместо задачи (10) ставим задачу поиска квадратического приближения к элементу b, т. е. элемент x определяем из условия минимума функционала

$$f(x) = \| Ax - b)\|^2_{H_2} \qquad (11)$$

Задача (11) обычно некорректно поставлена и для ее решения необходимо применять специальные алгоритмы. К таковым относятся алгоритмы, основанные на использовании сглаживающего параметрического функционала А. Н. Тихонова, итеративной регуляризации [3] и сингулярного разложения матрицы коэффициентов системы уравнений [6]. Среди отмеченных алгоритмов достаточно эффективен метод итераций с усреднением Бакушинского—Страхова [2]. Этот метод позволяет построить экономичную в вычислительном отношении схему решения уравнения (10).

Рассмотрим последовательность

$$\bar{x}_m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} x_k, \quad m=0,1,2,\cdots, \qquad (12)$$

где x_k определяется итерационным процессом Гаусса—Зейделя:

$$x_0 \in H_1,$$

$$x_k = x_{k-1} - (D+L)^{-1}[A^* b - A^* A x_{k-1}], \quad k = 1, 2, \cdots. \quad (13)$$

Здесь D означает диагональ матрицы A^*A и L — ее нижнюю треугольную часть. Последовательность (12) сильно сходится к одному из решений x уравнения (10) (в зависимости от x_0 при $\varepsilon=\eta=0$). Если же $\varepsilon=0$ ($\eta=0$), то при $m=m(\varepsilon)$ таком, что

$$\frac{m(\varepsilon)}{2}\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad (14)$$

имеем $\|\bar{x}_m - x\| \to 0$, т. е. схема (12), (13) при выполнении асимптотики (14) порождает регуляризующий алгоритм. Останов процесса итераций выполняется по поправке

$$\|\bar{x}_m - \bar{x}_{m-1}\| \leqslant \varepsilon. \quad (15)$$

Следует отметить, что если для обратной задачи удается найти гармоническое решение, то его необходимо принять в качестве нулевого приближения x_0. Такой выбор x_0 позволяет определить истинное математическое решение уравнения (10), составленного в пределах области неопределенности исходной обратной задачи.

Определение горизонтальных плотностных неоднородностей в коре и верхней мантии Земли. Апробирование описанного алгоритма решения ОЗГ выполнялось на примере определения горизонтальных плотностных неоднородностей в слое Земли, охватывающем ее кору и верхнюю мантию до глубины 420 км. Средняя плотность в этом слое вычислена по данным о распределении плотности в модели PEM—A [7] и составила $\bar{\delta} = 3{,}3864$ г/см^3. Весь верхний слой Земли разбивали по равномерной географической разграфке на 126 сферических усеченных четырехугольных и 36 треугольных пирамид, ограниченных координатными поверхностями с шагом $\Delta\Theta^0 = \Delta\lambda^0 = 20^0$. Для вычисления значений ΔV_j^r использовали модель гравитационного поля Земли GEM—10 B [9], усеченную до девятого порядка в соответствии с размерами оснований сферических пирамид на поверхности планеты. При этом за нормальное поле принято поле гидростатически равновесной Земли [5], т. е. коэффициенты $\bar{c}^*_{20}$, $\bar{c}^*_{40}$ и $\bar{c}^*_{60}$, используемые в (8), вычислялись как $\bar{c}^*_{20} = \bar{c}_{20} + J_2$, $\bar{c}^*_{40} = \bar{c}_{40} + J_4$, $\bar{c}^*_{60} = c_{60} + J_6$, где J_2, J_4 и J_6 — зональные коэффициенты, характеризующие гидростатически равновесную планету. С учетом исходной информации и принятого деления верхнего слоя Земли на сферические усеченные пирамиды составлена система линейных уравнений вида (9), которую решали с применением алгоритма (12)—(15) с заданием нулевого гармонического приближения x_0. Устойчивость решения системы (10) проверяли посредством задания датчиком случайных чисел возмущений порядка $\eta \leqslant 5 \cdot 10^{-6}$ м/с² и $\varepsilon \leqslant 1 \times \times 10^{-5}$ м/с² ($\sim 4\%$ максимального значения $\Delta \bar{V}_j'$). В результате численных экспериментов по решению уравнения (10) получены стабильные результаты.

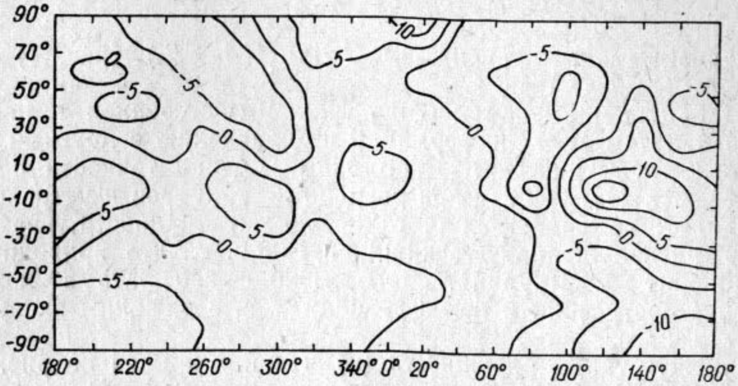
В таблице приведены значения плотностных неоднородностей в объеме усеченных сферических пирамид, вычисленные в гармоническом приближении и из решения уравнения (10). Поскольку известно [4], что значения плотностных неоднородностей, получаемые в гармоническом приближении, геологиче-

Значения плотностных неоднородностей в объеме сферических усеченных пирамид

№ п/п	$\overline{\Delta\delta}_i^{G} \cdot 10^{-4}$ г/см³	$\overline{\Delta\delta}_i \cdot 10^{-4}$ г/см³	№ п/п	$\overline{\Delta\delta}_i^{G} \cdot 10^{-4}$ г/см³	$\overline{\Delta\delta}_i \cdot 10^{-4}$ г/см³	№ п/п	$\overline{\Delta\delta}_i^{G} \cdot 10^{-4}$ г/см³	$\overline{\Delta\delta}_i \cdot 10^{-4}$ г/см³	№ п/п	$\overline{\Delta\delta}_i^{G} \cdot 10^{-4}$ г/см³	$\overline{\Delta\delta}_i \cdot 10^{-4}$ г/см³	№ п/п	$\overline{\Delta\delta}_i^{G} \cdot 10^{-4}$ г/см³	$\overline{\Delta\delta}_i \cdot 10^{-4}$ г/см³
1	2	130	33	−22	−36	65	−1	0	97	29	60	129	13	20
2	11	−27	34	24	49	66	−24	−54	98	51	100	130	8	20
3	0	−38	35	27	39	67	9	30	99	41	84	131	−9	−1
4	−10	−39	36	8	12	68	10	37	100	20	41	132	−29	−38
5	−16	−29	37	9	7	69	−31	−70	101	−1	−2	133	−44	−74
6	−17	−12	38	−1	−12	70	−4	−6	102	16	45	134	−50	−92
7	−13	−2	39	−21	−37	71	27	56	103	2	9	135	−48	−86
8	−71	−6	40	−31	−53	72	20	41	104	22	59	136	−42	−72
9	−6	−18	41	−51	−117	73	22	37	105	33	80	137	−37	−65
10	−6	−39	42	−16	−33	74	9	7	106	−5	−11	138	−34	−58
11	−12	−66	43	19	49	75	−7	−13	107	6	22	139	−27	−40
12	−21	−86	44	−26	−62	76	−45	−101	108	12	25	140	−13	−10
13	−25	−78	45	−33	−59	77	21	39	109	6	10	141	−8	1
14	−18	−33	46	−20	−47	78	76	167	110	10	20	142	−10	−12
15	0	29	47	−31	−71	79	71	136	111	15	40	143	−12	−19
16	20	74	48	−23	−41	80	52	110	112	3	9	144	−17	−16
17	29	76	49	−15	−19	81	27	51	113	−31	−65	145	−1	100
18	28	52	50	−47	−94	82	32	75	114	−44	−91	146	2	21
19	−5	−12	51	−40	−77	83	34	73	115	−28	−54	147	2	12
20	−18	−40	52	16	13	84	17	47	116	−8	−7	148	−1	−9
21	−32	−61	53	19	35	85	23	46	117	−3	9	149	−18	−39
22	−48	−96	54	4	1	86	45	97	118	−13	−10	150	−34	−74
23	−53	−109	55	16	29	87	23	54	119	−22	−27	151	−48	−106
24	−28	−50	56	19	49	88	5	12	120	−14	−12	152	−58	−122
25	−7	−17	57	−4	−9	89	36	76	121	−17	−29	153	−60	−120
26	−13	−43	58	−26	−59	90	34	66	122	−6	−8	154	−58	−105
27	−9	−16	59	−6	−3	91	22	51	123	−6	−4	155	−52	−86
28	0	20	60	19	23	92	2	3	124	−24	−39	156	−43	−68
29	−6	7	61	34	63	93	14	26	125	−6	−11	157	−32	−49
30	−26	−32	62	7	4	94	−4	−5	126	−3	−1	158	−20	−31
31	−51	−95	63	8	11	95	−32	−36	127	−13	−37	159	−11	−19
32	−58	−119	64	18	40	96	3	0	128	3	16	160	−6	−12
												161	−4	−7
												162	−4	5

Примечание: Сферические координаты центров прямоугольных трапеций заданы по равномерной сетке через 20°. Координаты центра первой трапеции равны $\theta^0 = 10^0$, $\lambda^0 = 19^0$.

ски безсодержательны, то в таблице они приведены лишь для сравнения со значениями аномальных плотностей, вычисляемых посредством решения уравнения (10). На рисунке показаны в виде изолиний распределения аномальных горизонтальных плотностных неоднородностей $\Delta\bar{\delta}_i$, которые наглядно иллюстрируют глобальные вариации латерального неоднородного распределения плотности верхнего слоя Земли, охватывающего кору и верхнюю мантию до глубины 420 км.



Горизонтальные неоднородности плотности в верхнем слое Земли толщиной 420 км. Изолинии проведены через $5 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

1. *Алексидзе М. А.* Решение некоторых основных задач гравиметрии. Тбилиси, 1985. 2. *Бакушинский А. Б., Страхов В. Н.* О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 181—185. 3. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. К., 1986. 4. Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е. А. Мудрецовой. М., 1981. 5. *Ефимов А. Б., Трубицын В. П.* Гравитационные аномалии и равновесная фигура Земли // Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики. К., 1982. С. 7—11. 6. *Лоусон Н., Уенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. М., 1986. 7. *Dziewonski A. M., Heles A. L., Lapwood E. R.* Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data // Phys. Earth Planet. Inter. 1975. V 10. P. 12—48. 8. *Gerstl M.* On the recorsive computation of the integrales of the associated Legendre functions // Manuscr. geod. 1980. V. 5. N 3. P. 181—199. 9. *Lerch F. J.* Coddard Earth models for oceanographic applications (GEM 10 R and 10 C) // Mar. Geod. 1981. V. 5. N 2. P. 145—187.

Статья поступила в редколлегию 03. 04. 87