УДК 528.3

Д. И. МАСЛИЧ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕФРАКЦИИ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

При определении положения объектов, недоступных для установки инструмента, решающее значение на точность измерения вертикальных и горизонтальных углов приобретает учет рефракции, который возможен инструментальным или метеорологическим методами. Инструментальный метод пока не вышел из стадии лабораторных разработок. Разработке теории и методов определения рефракции с использованием измеренных метеоэлементов атмосферы посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученых [1—3, 5, 11]. Однако при этом должны быть известны среднеинтегральные значения градиентов метеоэлементов вдоль всей трассы, которые получить практически очень сложно. Принимаемые средние значения метеоэлементов позволяют установить лишь приближенное значение рефракции.

Предлагаем новый метод определения рефракции с учетом динамики атмосферы и уравнений Эйлера для световой кривой. Некоторые вопросы этого метода изложены в [6, 7, 10]. Состояние динамики атмосферы описано системой дифференциальных уравнений [4, 8]. Так как общее решение данных уравнений очень сложно, то для наших целей ограничим систему этих уравнений. Для однородной подстилающей поверхности в случае постоянного изменения теплопередачи система принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left[a(z)\frac{dT}{dz}\right]=A,\rho g+\frac{dp}{dz}=0, \tag{1}$$

где A — постоянная; a — коэффициент температуропроводности; T, p, ρ — температура, давление и плотность воздуха; g — составляющая ускорения силы тяжести по вертикали; z — высота над подстилающей поверхностью.

Будем считать, что коэффициент турбулентности изменяется по линейному закону [8], т. е.

$$a(z)=a_1z+a_2, \tag{2}$$

где a_1, a_2 — некоторые коэффициенты, определяемые экспериментально. Решая систему уравнений (1), (2) при начальных условиях

$$T|_{z=0}=T_0,\ \frac{dT}{dz}_{z=0}=T_0',\ P|_{z=0}=P_0, \tag{3}$$

где T_0' — вертикальный температурный градиент, и учитывая уравнение Менделеева-Клайперона

$$\rho=\rho\mu/RT, \tag{4}$$

где μ — масса моля; R — газовая постоянная, получаем T и ρ в виде следующих зависимостей:

$$T=\frac{Az}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}\left(T_0'-\frac{A}{a}\right)\ln\left|\frac{a_1}{a_2}z+1\right|+T_0; \tag{5}$$

$$\rho=\frac{\mu p_0}{RT_0}e^{\frac{\mu g}{R}}\int\frac{dz}{T}. \tag{6}$$

Показатель преломления воздуха можно получить из формулы Даля—Гладстона

$$n=1+c\rho, \tag{7}$$

где c — постоянная, зависящая от длины волны распространяющегося излучения. Подставляя вместо ρ его значение (6), после преобразований получаем

$$n(z)=1-\frac{cAR}{a_1\mu g}+\frac{ca_2}{a_1}(A-T_0'a_1)v(z)\int\frac{e^{\frac{\mu g}{R}}}{a_1z+a_2}dz+$$

$$+c\left(\frac{p_0\mu}{RT_0}+\frac{AR}{a_1\mu g}\right)v(z), \tag{8}$$

где
$$v(z) = e^{-\frac{\mu g}{R} z}.$$

Исходя из принципа Ферма, траекторию распространения светового луча будем определять как экстремаль функционала [9]

$$t = \int_{x_0}^{x} n(z) \sqrt{1 + z'^2}\, dx, \tag{9}$$

в которой $n(z)$ выражается формулой (8).

Уравнением Эйлера, соответствующим функционалу (9), является

$$nz'' = n_z'(1 + z'^2). \tag{10}$$

Так как в общем случае это уравнение не решается, будем искать его решение в виде разложения в ряд Тейлора в окрестностях точек разбиения на участки при следующих граничных условиях:

$$z_{\,|\,x=0} = z_0, \quad z'_{\,|\,x=0} = \operatorname{ctg} \xi. \tag{11}$$

В результате получим

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} x + \frac{z''(0)}{2!} x^2 + \cdots, \tag{12}$$

где

$$z''(0) = \frac{n'(0)}{n(0) \sin^2 \xi};$$

$$z'''(0) = \left(\frac{n''(0)}{n'(0)} + \frac{n'(0)}{n(0)} \right) z''(0)\, z'(0); \tag{13}$$

. . . .

Здесь ξ — измеряемое зенитное расстояние.

Величины, зависящие от показателя преломления n, являющегося функций z, находим из выражений:

$$n(0) = 1 + \frac{c p_0 \mu}{R T_0},$$

$$n'(0) = -\frac{c \mu p_0}{R T_0^2} \left(\frac{g \mu}{R} + T_0' \right),$$

$$n''(0) = \frac{c \mu p_0}{R T_0^3} \left[\frac{a_1}{a_2} \left(T_0' - \frac{A}{a_1} \right) \left(\frac{g \mu}{R} + T_0' \right) \left(\frac{g \mu}{R} + 2 T_0' \right) \right].$$

. . . . (14)

Как видно из формул (13) и (14), коэффициенты ряда (12) — функции метеопараметров T_0, T_0', p_0, a_1, a_2 и зенитного расстояния ξ.

Коэффициент турбулентности можно получить также из непосредственных градиентных измерений. Метод этот приближенный, но удобен для практического использования, тем более, что он вычисляется совместно с определением вертикального градиента температуры. Рассмотрим вывод формул для случая, когда уравнение турбулентной теплопроводности можно представить в виде

$$\frac{d}{dz}\left[(a_1 z + a_2)\frac{dT}{dz}\right] = 0. \tag{15}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда Тейлора

$$T = T_0 + T_0'(z - z_0) + T_0''\frac{(z - z_0)^2}{2!} + T_0'''\frac{(z - z_0)^3}{3!} + \cdots \tag{16}$$

Значения производных, входящих в ряд (16), можно представить в виде

$$T'' = -\frac{a_1}{a_2 + a_1(z - z_0)}T',$$

$$T''' = 2\frac{a_1^2}{[a_2 + a_1(z - z_0)]^2}T',$$

$$T^{IV} = -6\frac{a_1^3}{[a_2 + a_1(z - z_0)]^3}T',$$

. . . .

$$T^{(k)} = (k-1)!(-1)^{k-1}\frac{a_1^{k-1}}{[a_2 + a_1(z - z_0)]^{k-1}}T'. \tag{17}$$

Производные (17) в начальной точке $z = z_0$ запишем в виде

$$T_0'' = -\frac{a_1}{a_2}T_0', \quad T_0''' = 2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 T_0'.$$

. . . .

$$T_0^{(k)} = (k-1)!\,(-1)^{k-1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{k-1}T_0'. \tag{18}$$

Таким образом, мы получили все производные, необходимые для определения уравнения температуры. Применяя признак Даламбера, можно показать, что ряд (16) будет сходящимся, если

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)(z - z_0) < 1, \tag{19}$$

откуда

$$(z - z_0) < \frac{a_1}{a_2}. \tag{20}$$

Чтобы получить этот ряд сходящимся для любой разности высот, необходимо как и раньше разбить разность высот $(z-z_0)$ на такие интервалы, для которых ряд (16) будет сходящимся.

Пусть в результате эксперимента мы получили значения температуры на некоторых высотах z_0, z_1 и z_2, при этом высоты выбраны так, чтобы выполнялось условие (20). Тогда, ограничиваясь тремя членами разложения в ряд, можем записать

$$T_1 = T_0 + T'_0 (z_1 - z_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)(z_1 - z_0)^2 T'_0,$$

$$T_2 = T_0 + T'_0 (z_2 - z_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)(z_2 - z_0)^2 T'_0, \qquad (21)$$

Вычисленные $\Delta\xi$ и фактические $\Delta\xi_0$ значения вертикальной рефракции

Дата	Время	Измеренное зенитное расстояние $\xi=89°$	T_0, град. К	T'_0, °К/м	Рефракция	
					вычисленная $\Delta\xi$	фактическая $\Delta\xi_0$
31.07	11^h52^m	57′07,0″	294,28°	1,072	67,38″	46,00″
	12 03	57 06,8	294,53	0,789	53,86	46,2
	13 36	56 46,1	296,36	0,491	86,56	66,9
	13 58	56 18,6	297,99	1,073	156,23	94,4
	18 47	57 03,4	296,42	0,782	47,34	49,6
	18 58	57 03,4	296,73	0,782	47,34	49,6
	19 07	57 33,3	296,61	0,307	17,57	19,7
	20 00	57 26,6	295,48	0,651	38,17	26,[illegible]
01.08	9 20	57 19,2	294,81	0,797	40,40	33,8
	17 33	57 06,7	292,30	1,126	71,86	46,3
04.08	10 10	56 59,2	296,35	1,447	84,84	53,8
	10 12	57 11,1	295,86	0,839	50,01	41,9
19.08	16 59	56 50,7	290,52	1,102	100,33	62,3
21.08	11 43	57 06,4	293,10	0,905	79,18	46,4

где T_0, T_1, T_2 — температуры соответственно на высотах z_0, z_1 и z_2. Таким образом, мы получили два уравнения с двумя неизвестными T_0' и a_1/a_2. Решая эти уравнения, получаем следующие формулы для определения вертикального градиента температуры T_0' и значений, определяющих коэффициент турбулентности a_1/a_2:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2[\Delta T_2(z_1 - z_0) - \Delta T_1 (z_2 - z_0)]}{(z_1 - z_0)^2 \Delta T_2 - (z_2 - z_0)^2 \Delta T_1}; \qquad (22)$$

$$T'_0 = \frac{\Delta T_1}{(z_1 - z_0) - \dfrac{1}{2}\dfrac{a_1}{a_2}(z_1 - z_0)^2}. \qquad (23)$$

Здесь

$$\Delta T_1 = T_1 - T_0; \ \Delta T_2 = T_2 - T_0. \qquad (24)$$

Вычисления по этим формулам и результатам экспериментальных исследований дают значения коэффициента турбулентности примерно такие же, которые были получены при определении турбулентного отношения с использованием уравнения световой кривой.

Таким образом, установив в начальной точке температуру, давление, вертикальный градиент температуры и коэффициент турбулентности по измеренному зенитному расстоянию ξ и дальности x, можем вычислить значение вертикальной составляющей рефракции $\Delta\xi$. Для небольших расстояний без учета наклона местности в системе координат XOZ значение $\Delta\xi$ составляет

$$\Delta\xi = \operatorname{arcotg}\left(\frac{z}{x} - \frac{x}{2R_з}\right) - \xi, \qquad (25)$$

где $R_з$ — средний радиус Земли в точке наблюдения.

Для проверки изложенных теоретических соображений вычислена вертикальная рефракция $\Delta\xi$ по материалам экспериментальных измерений зенитного расстояния на линии длиной $x = 764{,}96$ м, расположенной в южном степном районе вдоль шоссе, покрытого асфальтом, с разностью отметок концов линии $z = 0{,}467$ м в период июль-начало августа. Зенитные расстояния измерены теодолитом ОТ-02, а температура на разных высотах — психрометром Ассмана.

Результаты приведены в таблице, где вычисленные значения рефракции $\Delta\xi_0$ получены по данным геометрического нивелирования вдоль используемой линии.

Как видно из сравнения, разность вычисленных и фактических значений $\Delta\xi$ составляет около 30%. Это свидетельствует о правильности принятых в основу теоретических предпосылок и полученных формул. Чтобы иметь более правильные результаты, необходимо уточнить определение коэффициента турбулентности.

1. *Алексеев А. В., Кабанов М. В., Куштин И. Ф.* Оптическая рефракция в земной атмосфере. Новосибирск, 1982. 2. *Изотов А. А., Пеллинен Л. П.* Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования // Тр. ЦНИИГАиК. 1955. Вып. 102. С. 214. 3. *Йордан В., Эггерт О., Кнейссль М.* Руководство по высшей геодезии. М., 1963. Т. 2. 4. *Лайхтман Д. Л.* Физика пограничного слоя атмосферы. Л., 1961. 5. *Маслич Д. И.* Определение рефракции при наблюдении высоких объектов в атмосфере // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1970. Вып. 11. С. 59—66. 6. *Маслич Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И.* и др. Определение уравнений световой кривой и углов рефракции в атмосфере // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1980. Вып. 32. С. 90—96. 7. *Маслич Д. И., Хижак Л. С., Дидух И. И.* и др. Определение вертикальной рефракции над равнинной однородной поверхностью и инверсионный период // Тез. докл. V Всесоюз. симпоз. по распределению лазерного излучения в атмосфере. Томск, июнь 1979 г. Томск, 1979. Т. 2. С. 184—187. 8. *Матвеев Л. Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Л., 1965. 9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М., 1957. Т. 4. 10. *Хижак Л. С., Маслич Д. И., Дидух И. И.* Приближенный метод нахождения уравнения световой кривой при определении рефракции // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1981. Вып. 34. С. 81—88. 11. *Moritz H.* Zur Geometrie der Refraction // Österr. Z. Vermessungswessen. 1962. Bd. 50. N 1. S. 71.

Статья поступила в редколлегию 17. 12. 85