УДК 528.21/22

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, Н. Ф. АГЕЕВ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ВАРИАНТ НЕТРАДИЦИОННОГО НОРМАЛЬНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

В нашей предыдущей статье [2] по методике [1] построены и описаны три предварительных варианта (НЗ$^{(180)}_{GEM\,10\,C}$, НЗ$^{(36)}_{GEM\,10B}$, НЗ$^{(36)}_{GRIM\,3\,B}$) сфероидальной Нормальной Земли (СНЗ) и эллипсоидальной Нормальной Земли (ЭНЗ), в качестве исходной информации для которых использованы параметры моделей гравитационного поля планеты соответственно GEM10C [4], GEM10B [4], GRIM3B [6] и значение потенциала силы тяжести на эллипсоиде GRS-80 [5].

В [2] отдано предпочтение НЗ $^{(180)}_{10\,C}$ как наиболее полной, поскольку при ее вычислении использовались четные зональные гармонические коэффициенты $C_{2n,\,0}$ модели гравитационного поля Земли GEM10C [4], где они даны до 180-го порядка. Геометрические параметры неуровенного эллипсоида, сфероида и потенциал силы тяжести на последнем получены из двух приближений. Приведем их значения:

$$a_e = 6378137{,}0 \text{ м}, \quad a_{сф} = 6378135{,}6 \text{ м},$$
$$\alpha_e = 1:298{,}207, \quad \alpha_{сф} = 1:298{,}174, \tag{1}$$
$$U_0 = 62636860{,}87 \text{ м}^2\cdot\text{с}^{-2}.$$

Переходя здесь к построению нетрадиционного нормального поля, отметим сначала, что на первых порах имеет, очевидно, смысл ограничить его (построение) сравнительно невысоким порядком, взяв, например, N не более 12 или 20. Это вызвано, во-первых, погрешностями стоксовых постоянных планеты, принимаемых в качестве исходной информации, а во-вторых, характером решаемой задачи. Вычисление нормальной силы тяжести γ вынуждены будем далее выполнять дифференцированием функции, заданной приближенно (ряда геопотенциала, коэффициенты которого найдены эмпирически) с последующим суммированием получаемого ряда. А такие задачи являются некорректными, поэтому воспользуемся простейшим способом учета этого обстоятельства: возьмем в указанном ряде частичную сумму ограниченного (сравнительно небольшого) числа членов, которую и примем за искомую силу тяжести. Необходимость такого простого подхода на начальном этапе исследования проблемы следует как из методических соображений, так и из результатов выполненного численного эксперимента, показавшего, что при увеличении N от 2 до 20 γ монотонно возрастает примерно на 10...15 мГал*, затем плавно убывает при последующем увеличении гармоник до N=34—36, а далее (при N=38—180) определяется неустойчиво с колебаниями в пределах 20 мГал. Для последующих вычислений, имеющих цель отработки методики, примем N=36.

* мГал — известная в практике гравиметрии внесистемная единица; 1 мГал=10^{-5} м/с^2.

Нормальное поле должно быть представлено значениями потенциала силы тяжести и ускорения силы тяжести на исходных поверхностях — на сфероиде и аппроксимирующем его эллипсоиде. Так как СНЗ — поверхность уровенная, то значение потенциала U_0 на ней постоянно (см. (1)), а на неуровенном эллипсоиде потенциал U вычисляем известным образом:

$$U = V + Q,$$

где

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 - \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2k} I_{2k} P_{2k}(\cos v)\right], \tag{2}$$
$$Q = \frac{\omega^2 r^2}{2}\sin^2 v.$$

Как известно, для вычисления ускорения силы тяжести надо найти производные ее потенциальной функции. Для того, чтобы избежать сингулярностей, появляющихся на полюсах при использовании сферических координат, воспользуемся при вычислениях производных алгоритмом Канингхема [3], в соответствии с чем нормальную силу тяжести γ будем находить по следующей формуле:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2}, \tag{3}$$

причем

$$\frac{\partial V}{\partial X} = fM\sum_{n=0}^{N} a_e^n I_n v_{n+1,1}, \tag{3а}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = fM\sum_{n=0}^{N} a_e^n I_n w_{n+1,1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial Z} = fM\sum_{n=0}^{N} (n+1)\, a_e^n I_n v_{n+1,0},$$

где

$$v_{n+1,1} = \frac{2n+1}{n}\frac{z}{r^2}v_{n,1} - \frac{n+1}{n}\frac{1}{r^2}v_{n-1,1}, \quad (n \geqslant 2)$$
$$v_{n+1,0} = \frac{2n+1}{n+1}\frac{z}{r^2}v_{n,0} - \frac{n}{n+1}\frac{1}{r^2}v_{n-1,0}, \quad (n \geqslant 1)$$
$$w_{n+1,1} = \frac{2n+1}{n}\frac{z}{r^2}w_{n,1} - \frac{n+1}{n}\frac{1}{r^2}w_{n-1,1}, \quad (n \geqslant 2)$$
$$v_{0,0} = \frac{1}{r}, \quad v_{1,0} = \frac{z}{r^3}, \quad v_{1,1} = \frac{x}{r^3}, \quad v_{2,1} = \frac{3xz}{r^5},$$
$$w_{0,0} = 0, \quad w_{1,0} = 0, \quad w_{1,1} = \frac{y}{r^3}, \quad w_{2,1} = \frac{3yz}{r^5}. \tag{3б}$$

Таблица радиусов-векторов и параметров поля нетрадиционной Нормальной Земли

Широта φ, °	Радиусы-векторы $r_{эл}$ ЭНЗ, м	$\Delta r = r_{эл} - r_{сф}$, м	Потенциал силы тяжести $U_{эл}$ на ЭНЗ, $м^2 \cdot с^{-2}$	Ускорение силы тяжести $\gamma_{эл}$ на ЭНЗ, 10^5 м·с$^{-2}$	$\Delta\gamma = \gamma_{эл} - \gamma_{сф}$, 10^5 м·с$^{-2}$	$\delta\gamma = \gamma_{эл} - \gamma_{GRS-80}$, 10^5 м·с$^{-2}$
0	6 378 137,0	1,3	62 636 848,23	978 032,952	—0,416	0,275
1	78 130,5	1,3	848,18	78 034,546	—0,408	0,297
2	78 110,8	1,3	848,02	78 039,323	—0,413	0,357
3	78 078,1	1,4	847,74	78 047,263	—0,422	0,444
4	78 032,4	1,3	847,31	78 058,341	—0,413	0,541
5	77 973,7	1,3	846,71	78 072,524	—0,413	0,626
6	77 902,1	1,5	845,94	78 089,777	—0,468	0,685
7	77 817,8	1,5	845,01	78 110,072	—0,476	0,707
8	77 720,7	1,7	843,98	78 133,392	—0,525	0,702
9	77 611,0	1,9	842,96	78 159,734	—0,590	0,694
10	77 488,9	2,1	842,07	78 189,111	—0,633	0,728
11	77 354,5	2,1	841,45	78 221,543	—0,657	0,858
12	77 208,0	2,0	841,23	78 257,044	—0,616	1,138
13	77 049,5	1,9	841,49	78 295,610	—0,599	1,607
14	76 879,3	1,7	842,24	78 337,204	—0,539	2,274
15	76 697,5	1,6	843,41	78 381,750	—0,495	3,110
16	76 504,4	1,6	844,82	78 429,129	—0,478	4,051
17	76 300,3	1,5	846,30	78 479,195	—0,472	5,005
18	76 085,3	1,5	847,64	78 531,794	—0,474	5,879
19	75 859,7	1,5	848,68	78 586,787	—0,456	6,596
20	75 623,9	1,3	849,37	78 644,073	—0,397	7,119
21	75 378,1	1,1	849,75	78 703,599	—0,327	7,465
22	75 122,6	1,0	849,98	78 765,362	—0,297	7,702
23	74 857,7	0,9	850,29	78 829,391	—0,278	7,933
24	74 583,7	0,9	850,92	78 895,721	—0,265	8,269
25	74 301,1	0,9	852,06	78 964,362	—0,269	8,801
26	74 010,1	0,9	853,81	79 035,274	—0,265	9,571
27	73 711,1	0,7	856,12	79 108,354	—0,214	10,561
28	73 404,4	0,4	858,82	79 183,437	—0,109	11,693
29	73 090,5	—0,1	861,66	79 260,317	0,016	12 850
30	72 769,7	—0,4	864,38	79 338,778	0,125	13,908
31	72 442,4	—0,7	866,75	79 418,622	0,225	14,763
32	72 109,1	—1,0	868,64	79 499,702	0,304	15,362
33	71 770,0	—1,0	870,06	79 581,926	0,324	15,712
34	71 425,8	—1,1	871,13	79 665,256	0,325	15,874
35	71 076,7	—1,0	872,04	79 749,687	0,310	15,943
36	70 723,1	—1,0	873,02	79 835,218	0,313	16,020
37	70 365,6	—1,3	874,25	79 921,823	0,401	16,185
38	70 004,6	—1,5	875,88	80 009,436	0,477	16,476
39	69 640,5	—1,8	877,91	80 097,948	0,549	16,887
40	69 273,7	—2,1	880,32	80 187,211	0,639	17,382
41	68 904,8	—2,3	883,02	80 277,066	0,720	17,906
42	68 534,0	—2,7	885,92	80 367,361	0,823	18,417
43	68 162,0	—2,9	888,94	80 457,964	0,906	18,892
44	67 789,2	—3,1	892,04	80 548,774	0,964	19,340
45	67 417,9	—3,3	895,20	80 639,706	1,022	19,786
46	67 042,7	—3,7	898,37	80 730,674	1,131	20,254
47	66 670,1	—4,1	901,49	80 821,576	1,261	20,752
48	66 298,4	—4,5	904,42	80 912,275	1,394	21,253
49	65 928,1	—4,8	906,96	81 002,601	1,485	21,699
50	65 559,7	—5,0	908,89	81 092,362	1,548	22,006
51	65 193,7	—5,1	910,00	81 181,367	1,558	22,091
52	64 830,4	—5,0	910,15	81 269,448	1,552	21,897
53	64 470,3	—4,9	909,27	81 356,480	1,511	21,405

Широта φ, °	Радиусы-векторы $r_{эл}$ ЭНЗ, м	$\Delta r = r_{эл} - r_{сф}$, м	Потенциал силы тяжести $U_{эл}$ на ЭНЗ, $м^2 \cdot с^{-2}$	Ускорение силы тяжести $\gamma_{эл}$ на ЭНЗ, 10^5 м·с$^{-2}$	$\Delta\gamma = \gamma_{эл} - \gamma_{сф}$, 10^5 м·с$^{-2}$	$\delta\gamma = \gamma_{эл} - \gamma_{GRS-80}$, 10^5 м·с$^{-2}$
54	64 113,8	—4,7	907,41	81 442,385	1,437	20,646
55	63 761,5	—4,4	904,70	81 527,123	1,343	19,686
56	63 413,6	—4,0	901,33	81 610,673	1,248	18,605
57	63 070,7	—3,7	897,46	81 693,000	1,142	17,476
58	62 733,1	—3,4	893,26	81 774,044	1,042	16,339
59	62 401,3	—2,8	888,82	81 853,708	0,875	15,199
60	62 075,6	—2,5	884,19	81 931,871	0,781	14,032
61	61 756,5	—2,1	879,43	82 008,407	0,639	12,812
62	61 444,3	—1,6	874,63	82 083,217	0,495	11,533
63	61 139,4	—0,6	869,92	82 156,241	0,185	10,229
64	60 842,2	—0,3	865,52	82 227,467	0,094	8,980
65	60 553,0	0,6	861,63	82 296,910	—0,177	7,890
66	60 272,2	0,2	858,41	82 364,578	—0,057	7,053
67	60 000,2	—0,3	855,90	82 430,432	0,105	6,514
68	59 737,2	0,6	853,99	82 494,354	—0,185	6,237
69	59 483,5	0,8	852,40	82 556,142	—0,234	6,099
70	59 239,6	1,3	850,72	82 615,529	—0,417	5,909
71	59 005,6	1,4	848,58	82 672,235	—0,428	5,461
72	58 781,8	1,8	845,69	82 726,032	—0,548	4,597
73	58 568,6	1,9	842,01	82 776,804	—0,592	3,267
74	58 366,2	2,4	837,79	82 824,581	—0,730	1,568
75	58 174,7	2,6	833,55	82 869,538	—0,795	—0,268
76	57 994,6	3,0	829,96	82 911,940	—0,938	—1,915
77	57 825,9	3,2	827,67	82 952,060	—0,998	—3,046
78	57 668,8	3,5	827,17	82 990,089	—1,075	—3,421
79	57 523,6	3,3	828,57	83 026,051	—1,005	—2,968
80	57 390,5	3,1	831,57	83 059,766	—0,963	—1,823
81	57 269,6	2,8	835,50	83 090,872	—0,876	—0,306
82	57 160,9	2,4	839,47	83 118,897	—0,730	1,145
83	57 064,8	1,7	842,56	83 143,371	—0,518	2,093
84	56 981,2	1,5	844,09	83 163,944	—0,470	2,219
85	56 910,4	1,4	843,78	83 180,483	—0,445	1,413
86	56 852,3	1,9	841,84	83 193,106	—0,582	—0,185
87	56 807,0	2,3	838,89	83 202,154	—0,695	—2,215
88	56 774,6	2,9	835,82	83 208,104	—0,903	—4,188
89	56 755,2	3,1	833,53	83 211,436	—0,967	—5,614
90	56 748,7	3,7	832,69	83 212,503	—1,149	—6,133

Примечание: В таблице даны радиусы-векторы ЭНЗ и параметры развиваемого ею поля. Для получения одноименных величин СНЗ (сфероида) приведены соответствующие им разности. Потенциал силы тяжести на сфероиде $U_0 = 62636860{,}87$ $м^2 \cdot с^2$.

Значения нормальных ускорений силы тяжести на СНЗ и ЭНЗ с параметрами (1), вычисленные по формулам (3), (3а), (3б), приведены в таблице, в которой также представлены радиусы-векторы этих поверхностей.

Приближенные значения (с погрешностью относительно табличных данных менее ±5 мГал) ускорения силы тяжести на неуровенном эллипсоиде сфероиде можно найти по следующим формулам типа «нормальных»;

$$\gamma_{эл} = \gamma_e (1 + 0{,}005316 \sin^2\varphi + 0{,}000137 \sin^4\varphi - 0{,}000273 \sin^6\varphi + 0{,}000116 \sin^8\varphi), \quad (4)$$

где

$$\gamma_e = 978\,032{,}952 \text{ мГал};$$

$$\gamma_{сф} = \gamma_e (1 + 0{,}005319 \sin^2\varphi + 0{,}000100 \sin^4\varphi - -0{,}000212 \sin^6\varphi + 0{,}000088 \sin^8\varphi), \quad (5)$$

где

$$\gamma_e = 978\,033{,}368 \text{ мГал}.$$

В заключение отметим, что полученные нами геометрия нетрадиционной Нормальной Земли [2] и развиваемое ею «нормальное» гравитационное поле, описанное здесь, дают пока лишь общую качественную картину, связанную с выделением из фигуры реальной Земли и ее гравитационного поля их главных частей, соответствующих предположениям теории гидростатически равновесных фигур планет. Как отмечено в [1], это существенно для геофизики (при интерпретации планетарных и региональных свойств планеты) и для геодезии (для уменьшения «возмущающего» потенциала Земли).

Установление количественных соотношений, вытекающих из концепции построения нетрадиционной Нормальной Земли, требует дальнейшего обсуждения и исследований, в первую очередь связанных с отбором исходной информации.

1. *Мещеряков Г. А.* О Нормальной Земле // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 43. С. 64—71. 2. *Мещеряков Г. А., Агеев Н. Ф.* Предварительный вариант нетрадиционной Нормальной Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 44. С. 58—63. 3. *Cunningham L. E.* On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // Celest. Mech. 1970. V. 2. P. 207—216. 4. *Lerch F. J., Putney B. H., Wagner C. A., Klosko S. M.* Goddard Earth Models for Oceanographic Applications (GEM10B and 10C). Presented at the Marine Geodesy Symposium. Miami. 1980. 5. *Moritz H.* Geodetic Reference System 1980 in the Geodesist's Handbook 1980 // Bulletin Geodesique. 1980. V. 54. № 3. P. 395—405. 6. *Reigber C. H., Müller H., Rizos Ch.* et al. An Improved GRIM3 Earth Gravity Model (GRIM3B) // Proceedings of the IAG Symposia. 1983. V. 1. P. 388—415.

Статья поступила в редколлегию 08. 01. 86

УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В [2] получены формулы, определяющие обратный вес любой линейной функции в геодезической сети, уравненной коррелатным и параметрическим методами. При уравнивании учитывали ошибки исходных данных и определяли поправки не только в измеренные величины, но и в исходные данные. В формуле обратного веса параметрического метода [2] не учтено слагаемое, зависящее от корреляционной матрицы Q_μ ошибок исходных данных.

Приведем вывод точной формулы для вычисления обратного веса. Уравненные значения измеренных величин вычисляют по формуле [2]

$$l_1 = l - BN_{11}^{-1} B^{т} Q^{-1} L - RN^{-1} R^{т} Q^{-1} L + L, \quad (1)$$

где l — матрица-столбец измеренных величин в геодезической сети с корреляционной матрицей Q,

$$N = N_{22} + Q_\mu^{-1} - N_{12}^{т} N_{11}^{-1} N_{12};\ N_{11} = B^{т} Q^{-1} B;\ N_{12} = B^{т} Q^{-1} B_\mu;$$

$$N_{22} = B_\mu^{т} Q^{-1} B_\mu;\ R^{т} = B_\mu^{т} - N_{12}^{т} N_{11}^{-1} B^{т};\ L = M_0 + B_\mu M - l;$$

L — матрица-столбец свободных членов параметрических уравнений; B — прямоугольная матрица коэффициентов; M — матрица-столбец исходных данных с корреляционной матрицей Q_μ; M_0 — некоторая матрица приближенных исходных данных; Q^{-1}, Q_μ^{-1} — обратные матрицы; т — знак транспонирования матриц; B_μ — прямоугольная матрица коэффициентов исходных данных в параметрическом уравнении.

Как известно [1], корреляционная матрица любой линейной матричной функции $F = F_0 + A_0 l$, где F_0 и A_0 — постоянные параметры, а l — матрица-столбец измерений, определяется формулой

$$Q_F = A_0 Q_l A_0^{т}. \quad (2)$$

Пользуясь правилом (2) и формулой (1), нетрудно получить Q_{l_1} — корреляционную матрицу уравненных величин l_1. Для ясности вывода сначала в (1) подставим вместо свободного члена его значение

$$l_1 = l - BN_{11}^{-1} B^{т} Q (M_0 + B_\mu M - l) - - RN^{-1} R^{т} Q^{-1} (M_0 + B_\mu M - l) + M_0 + B_\mu M - l. \quad (3)$$

Затем в (3) выделим слагаемые, зависящие от l и от M:

$$BN_{11}^{-1} B^{т} Q^{-1} \cdot l,\ RN^{-1} R^{т} Q^{-1} \cdot l,$$

$$(E - BN_{11}^{-1} B^{т} Q^{-1} - RN^{-1} R^{т} Q^{-1}) B_\mu \cdot M. \quad (4)$$

Теперь по (2) из выражений (4) находим корреляционную матрицу уравненных значений l_1:

$$Q_{l_1} = BN_{11}^{-1} B^{т} + RN^{-1} R^{т} Q^{-1} RN^{-1} R^{т} + CQ_\mu C^{т}, \quad (5)$$

где $C = (E - BN_{11}^{-1} B^{т} Q^{-1} - RN^{-1} R^{т} Q^{-1}) B_\mu$; E — единичная матрица.

Пусть надо найти обратный вес уравненной функции $F(l_1)$. Приведем функцию к линейному виду относительно уравненной величины l_1:

$$F\{l + (l_1 - l)\} = F(l) + (l_1 - l) \frac{\partial F}{\partial l} + \cdots \approx F_0 + f l_1, \quad (6)$$

где $f = \dfrac{\partial F}{\partial l}$; l — измеренное значение.