

Г. А. ШЕХОВЦОВ

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОКРУЖНОСТИ СТАНДАРТОВ

Предлагаем методику и результаты моделирования корреляции координат узловой точки [1, 2] (применительно к различного типа геодезическим засечкам) с использованием новой геометрической интерпретации погрешности положения точки на плоскости в виде окружности стандартов.

Под окружностью стандартов понимается окружность, диаметр которой равен сумме малой  $B_0$  и большой  $A_0$  полуосей эллипса

ошибок (рис. 1, а, б). Точка  $O_1$  является центром этой окружности, а точка  $O$  делит ее диаметр на две части  $B_0$  и  $A_0$ . Если известен дирекционный угол  $\varphi_0$  большой оси эллипса, то, проведя под углом  $2\varphi_0$  к диаметру окружности линию  $h_1h_2$ , получаем направление оси  $X$ . Противоположное направление будет соответствовать оси  $Y$ . Тогда отрезки  $Oh_1 = \sigma_x$ ,  $Oh_2 = \sigma_y$  — стандарты по осям координат, а  $\sin(1+2) = r_{xy}$  — теоретическое значение коэффициента корреляции, характеризующего связь между сдвигами определяемого

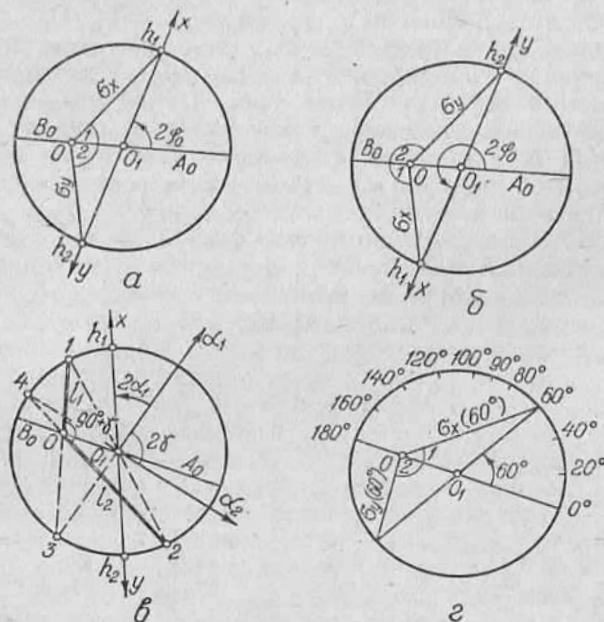


Рис. 1. Окружность стандартов.

пункта по осям координат. Аналогичным образом можно найти стандарты по любым двум взаимно перпендикулярным направлениям  $\varphi$  и  $(\varphi \pm 90)^\circ$  и соответствующий им коэффициент корреляции.

Эти свойства окружности стандартов выявлены при работе с опытным образцом прибора, предназначенного для построения подеры эллипса погрешностей [3]. В этом приборе имеются градуированный базис, поворотный номограммный диск и два переставных фиксатора, помещенные в прорези шатунов двух шарнирных параллелограммов. Для оценки точности простой (однократной) засечки фиксаторы должны быть закреплены на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от оси вращения диска, а базис установлен на отсчет угломерной шкалы, равный  $90^\circ + \gamma$  (здесь  $\gamma$  — острый угол засечки или его дополнение до  $180^\circ$ , если угол засечки тупой). При вращении диска точка пересечения шатунов параллелограммов

опишет на нем окружность стандартов. Значения  $l_1$  и  $l_2$  зависят от типа засечки и от точности измерения ее угловых и линейных элементов, и для таких засечек, как прямая угловая, азимутальная, обратная угловая, комбинированная, линейная и линейно-угловая, они вычисляются по формулам, приведенным в описании к [3]. Учитывая конструктивные особенности прибора, первоначально предназначавшегося лишь для построения подеры эллипса, необходимо в дальнейшем при построении окружности стандартов в качестве  $l_1$  и  $l_2$  использовать значения, подсчитанные по формулам [3], но поделенные на  $\sin \gamma$ .

Окружность стандартов можно также получить и ориентировать относительно координатных осей путем элементарных геометрических построений. Для этого (рис. 1, в) проводим две линии  $O-1=l_1$  и  $O-2=l_2$ , угол между которыми составляет  $90^\circ + \gamma$ . Поделив отрезок  $1-2$  пополам, получаем точку  $O_1$  — центр окружности стандартов радиуса  $O_1-1=O_1-2$ . Проведя через точки  $O$  и  $O_1$  диаметр этой окружности, имеем значения  $B_0$  и  $A_0$ . Продолжив отрезки  $1-O$  и  $2-O$  до пересечения в точках  $3$  и  $4$  с окружностью и проведя линии  $3-O_1$  и  $4-O_1$ , получают два направления угловой засечки  $a_1$  и  $a_2$ , угол между которыми составляет  $2\gamma$ . Теперь достаточно от направления, например  $3-O_1$ , отложить против хода часовой стрелки удвоенный дирекционный угол  $2a_1$  и провести линию  $h_1h_2$ , которая зафиксирует положение координатных осей  $X$  и  $Y$ . В случае линейной засечки направления  $a_1$  и  $a_2$  на схеме (рис. 1, в) следует изменить на  $180^\circ$ , тогда точки  $h_1$  и  $h_2$  поменяются местами так же, как и оси  $X$  и  $Y$ .

Отметим, во-первых, что здесь и далее речь идет об однократных засечках. Однако изложенные выше правила можно применять для анализа и многократных засечек после их эквивалентной замены на однократные по методике [4]. Во-вторых, если при построениях увеличить или уменьшить длины отрезков  $l_1$  и  $l_2$  в некоторое число раз, то в такое же число раз увеличатся или уменьшатся все линейные элементы окружности стандартов. При этом масштаб построений не влияет на значения ее угловых элементов, например, на значение коэффициента корреляции.

Целью наших исследований являлось следующее:

1. Графическое определение стандартов  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  при различных соотношениях  $l_1$  и  $l_2$ , различных значениях  $\gamma$  и  $\varphi_0$  и сравнение их с теоретическими значениями.

2. Исследование зависимости коэффициента корреляции от соотношения  $l_1$  и  $l_2$ , угла засечки  $\gamma$  и ориентировки большой оси  $A_0$  относительно оси  $X$ , а также сравнение коэффициентов корреляции, полученных графически, с теоретическими их значениями.

3. Определение степени влияния коэффициента корреляции на значение стандарта положения пункта (на радиальную ошибку).

Рассматривались модели засечек с углами  $\gamma=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$  и  $90^\circ$ . Каждая модель исследовалась при различных соотношениях точностей угловых и линейных измерений  $K = l_1 : l_2 = 5 : 10, 5 : 6, 5 : 5, 5 : 4, 5 : 3$  и  $5 : 2$  (размерность чисел в сантиметрах). Такой выбор  $\gamma, K$  и абсолютных значений  $l_1$  и  $l_2$

обусловлен задачей получения более полной картины, удобством пользования прибором [3] и его габаритами. Причем для различного вида засечек  $K$  выражается следующими соотношениями: прямая угловая, азимутальная или комбинированная засечки:

$$K = \frac{m_{\alpha_2} q_1}{m_{\alpha_1} q_2}; \quad (1)$$

обратная угловая засечка:

$$K = \frac{m_{\beta_2} q_{\beta_1}}{m_{\beta_1} q_{\beta_2}}; \quad (2)$$

линейная засечка:

$$K = \frac{m_{s_2}}{m_{s_1}}; \quad (3)$$

линейно-угловая засечка:

$$K = \frac{m_{\alpha_2} m_{s_2} \sqrt{m_{\alpha_1}^2 - q_1^2 m_{s_1}^2}}{m_{\alpha_1} m_{s_1} \sqrt{m_{\alpha_2}^2 - q_2^2 m_{s_2}^2}}. \quad (4)$$

В этих формулах  $m_{\alpha, \beta, s}$  — средние квадратические ошибки измеренных направлений  $\alpha_i$ , углов  $\beta_i$  или длин сторон  $s_i$  засечки, а  $q_i, \beta_i$  — градиенты направлений или углов.

Для указанных моделей засечек были построены 54 окружности стандартов. По ним (рис. 1, з) для различных значений  $2\varphi_0 = 20, 40, 60, 80, 90, 100, 120, 140$  и  $160^\circ$  определялись графически с точностью до 0,1 мм 432 значения  $\sigma_x$  и 432 значения  $\sigma_y$ . Значения  $2\varphi_0$  в пределах  $180 \dots 360^\circ$  не фигурируют потому, что здесь  $\sigma_x$  переходят в  $\sigma_y$ , а  $\sigma_y$  переходят в  $\sigma_x$ , уже найденные для  $2\varphi_0 = 0 \dots 180^\circ$ . Затем по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{l_2^2}{2} (K^2 + 1 + \cos 2\varphi_0 \sqrt{K^4 + 2K^2 \cos 2\gamma + 1 \cos^2 \gamma + 1}), \\ \sigma_y^2 &= \frac{l_2^2}{2} (K^2 + 1 - \cos 2\varphi_0 \sqrt{K^4 + 2K^2 \cos 2\gamma + 1 \cos^2 \gamma + 1}) \end{aligned} \quad (5)$$

подсчитаны теоретические значения стандартов. По разностям между измеренными графически и вычисленными значениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  подсчитывались средние квадратические ошибки  $m_{\sigma_x}$  и  $m_{\sigma_y}$ , характеризующие точность графических определений, которые для каждого конкретного случая представлены в табл. 1, где также показаны пределы изменения  $\sigma_x$  (или  $\sigma_y$ ) и средние относительные ошибки.

Из табл. 1 видно, что средние квадратические ошибки  $m_{\sigma_x}$  и  $m_{\sigma_y}$  одинаковы и находятся в пределах  $0,1 \dots 0,6$  мм или в среднем изменяются от 0,46 до 0,19 мм в зависимости от соотношения  $l_1 : l_2$ , а средняя относительная ошибка находится в пределах  $1 : 140 \dots 1 : 172$ . Данные табл. 1 свидетельствуют о том, что гра-

фический способ определения стандартов  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  практически дает те же результаты, что и аналитический, поэтому округность стандартов может служить в качестве надежного критерия оценки точности положения точки на плоскости.

Для всех моделей засечек измерены 432 значения углов ( $l+2$ ) и найдены их синусы, которые соответствуют коэффициентам корреляции (рис. 1, 2). По этим данным построены графики зависимости  $r_{xy}$  от углов  $\gamma$  и  $2\varphi_0$  для каждого соотношения  $l_1:l_2$ .

Таблица 1  
Средние квадратические ошибки графического определения стандартов, мм

$\gamma, \dots^\circ$	$l_1:l_2$											
	5:10		5:6		5:5		5:4		5:3		5:2	
	$m_{\sigma_x}$	$m_{\sigma_y}$	$m_{\sigma_x}$	$m_{\sigma_y}$	$m_{\sigma_x}$	$m_{\sigma_y}$	$m_{\sigma_x}$	$m_{\sigma_y}$	$m_{\sigma_x}$	$m_{\sigma_y}$	$m_{\sigma_x}$	$m_{\sigma_y}$
10	0,22	0,22	0,30	0,30	0,35	0,35	0,41	0,38	0,26	0,27	0,16	0,15
20	0,38	0,38	0,32	0,32	0,29	0,29	0,12	0,20	0,26	0,25	0,14	0,14
30	0,48	0,48	0,23	0,24	0,21	0,20	0,12	0,13	0,32	0,30	0,14	0,14
40	0,33	0,33	0,25	0,25	0,15	0,18	0,21	0,21	0,23	0,21	0,20	0,20
50	0,53	0,53	0,23	0,23	0,41	0,42	0,22	0,23	0,29	0,28	0,18	0,18
60	0,50	0,50	0,28	0,29	0,32	0,32	0,19	0,16	0,18	0,18	0,22	0,22
70	0,55	0,55	0,44	0,42	0,30	0,29	0,28	0,25	0,08	0,15	0,16	0,16
80	0,55	0,55	0,34	0,34	0,34	0,34	0,17	0,17	0,13	0,09	0,23	0,23
90	0,46	0,47	0,22	0,23	0,25	0,25	0,13	0,13	0,17	0,17	0,35	0,35
Средние	0,46		0,30		0,30		0,22		0,22		0,19	
Пределы изменения $\sigma_x$ ( $\sigma_y$ )	24,5—109,6		15,0—77,5		14,0—69,8		12,5—63,3		11,1—57,0		9,8—53,0	
Средняя относительная ошибка	1:146		1:154		1:140		1:172		1:154		1:165	

представленные на рис. 2. Кривые приведены для углов  $\gamma=10, 30, 50, 70$  и  $90^\circ$  и напоминают собой синусоиду. Каждая кривая, как и всякая синусоида, пересекает ось абсцисс в точках  $0,180$  и  $360^\circ$ , а в точках  $90$  и  $270^\circ$  она имеет соответственно максимум и минимум. Изучение этих графиков позволяет констатировать:

1. Коэффициент корреляции существенно зависит от дирекционного угла большой оси эллипса, причем он положителен, если  $2\varphi_0$  находится в пределах  $0 \dots 180^\circ$  и отрицателен, если  $2\varphi_0 > 180^\circ$ .

2. Если  $2\varphi_0=90$  или  $270^\circ$ , то коэффициент корреляции будет иметь максимальное по абсолютной величине значение для данной округности стандартов. В случае  $2\varphi_0=0$  или  $180^\circ$  значения стандартов совпадают с большой и малой полуосями эллипса, а коэффициент корреляции равен нулю, что подтверждает известное положение о взаимной независимости полуосей эллипса.

3. При изменении  $2\varphi_0$  от  $0$  до  $180^\circ$  коэффициент корреляции приобретает два одинаковых положительных значения для углов

Рис. 2. Графики зависимости коэффициента корреляции от  $\gamma$  и  $2\varphi_0$  для различных соотношений  $f_1 : f_2$ .

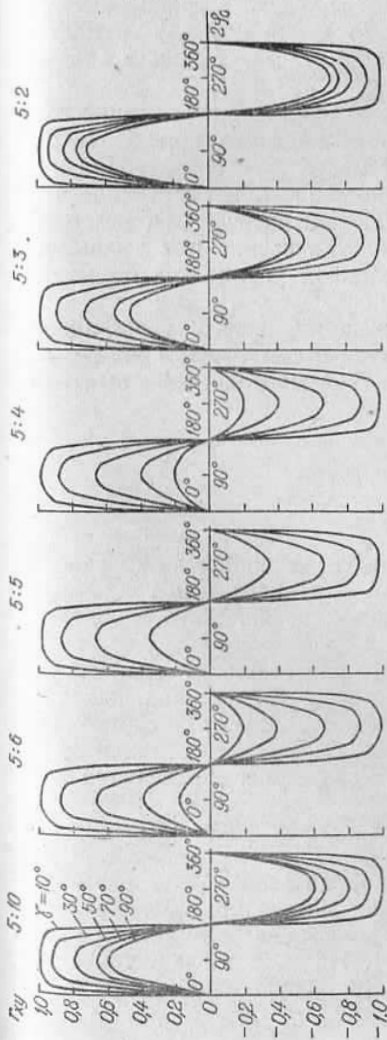
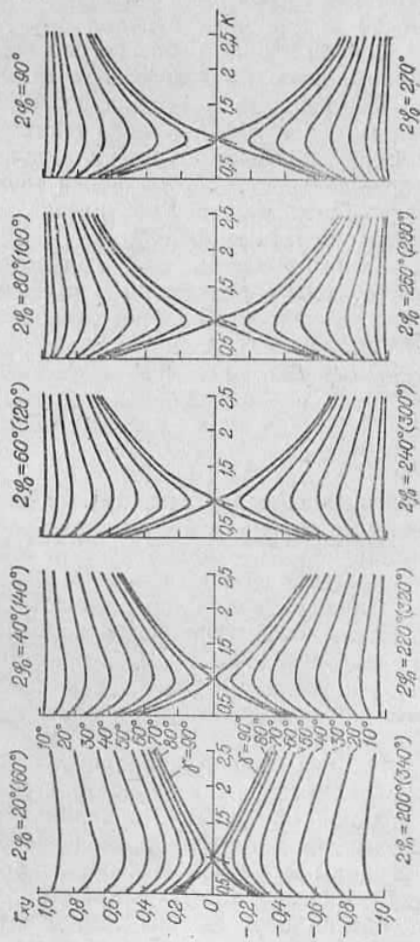


Рис. 3. Графики зависимости коэффициента корреляции от соотношения  $K$  для различных  $\gamma$  и  $2\varphi_0$ .



$2\varphi_{0i}$  и  $(180^\circ - 2\varphi_{0i})$ . При изменении  $2\varphi_0$  от  $180$  до  $360^\circ$  коэффициент корреляции приобретает два одинаковых отрицательных значения для углов  $2\varphi_{0j}$  и  $(180 + 360^\circ - 2\varphi_{0j})$ .

Для большей наглядности построены графики зависимости коэффициента корреляции от  $K$  для различных  $\gamma$  и  $2\varphi_0$ , представленные на рис. 3. Эти графики позволяют сделать следующие выводы:

1. Величина угла засечки  $\gamma$  оказывает существенное влияние на значение коэффициента корреляции. Например, с увеличением угла засечки  $r_{xy}$  уменьшается по абсолютной величине, и наоборот. При этом, чем меньше угол засечки, тем меньше изменение  $r_{xy}$  в зависимости от  $2\varphi_0$ . Так, для  $\gamma = 10^\circ$  значение  $r_{xy}$  практически не изменяется при любых  $2\varphi_0$  и  $K$ , в то время как для  $\gamma = 90^\circ$  эти изменения (при  $K = 2,5$  и  $2\varphi_0 = 90$  или  $270^\circ$ ) могут быть в пределах от  $0,0$  до  $\pm 0,7$  по сравнению с  $K = 1,0$ .

2. При прочих равных условиях коэффициент корреляции имеет минимальное по абсолютной величине значение при  $K = 1$ . Если  $\gamma = 90^\circ$ ,  $K = 1$ , то  $r_{xy} = 0,0$ , т. е. имеет место случай изотропии и инвариантности относительно систем координат, когда эллипс и его подера трансформируются в круг, а эксцентриситет  $OO_1$  (см. рис. 1) окружности стандартов равен нулю. Увеличение или уменьшение  $K$  по сравнению с  $K = 1$  влечет за собой увеличение по модулю коэффициента корреляции.

Таким образом, для получения наименьшего коэффициента корреляции  $r_{xy}$  необходимо стремиться к тому, чтобы угол  $\gamma$  простой засечки или засечки эквивалентной многократной был равен  $90^\circ$ , а  $K = 1$ .

По формуле

$$r_{xy} = \frac{(A_0^2 - B_0^2) \sin 2\varphi_0}{2\sigma_x \sigma_y} \quad (6)$$

подсчитаны теоретические значения коэффициента корреляции, которые сравнивали с их значениями, определенными графическим путем. Средние квадратические ошибки графического определения  $r_{xy}$  представлены в табл. 2.

Данные табл. 2 показывают, что погрешность графического определения коэффициента корреляции ничтожно мала, находится в пределах  $0,000 \dots 0,017$  и практически не зависит от соотношения  $l_1 : l_2$  и углов  $\gamma$  и  $2\varphi_0$ . Следовательно, окружность стандартов может служить доступным и надежным средством определения коэффициента корреляции.

На практике для сравнительных оценок точности положения определяемых пунктов часто пользуются кругом радиуса  $M$  (радиальной ошибкой). Радиальная ошибка продолжает оставаться предметом дискуссии в геодезической литературе [5]. На возникающие при ее использовании противоречивые результаты указывают многие работы, например [6]. На наш взгляд, такие противоречия обусловлены тем, что радиальную ошибку вычисляют по формуле

$$M_1 = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}, \quad (7)$$

совершенно не учитывая при этом форму эллипсов ошибок определяемых пунктов и их ориентировку относительно координатных осей. Формула (7) справедлива лишь тогда, когда направление осей эллипса ошибок совпадает с направлением координатных осей. В любом другом случае погрешности определения координат пунктов являются корреляционно зависимыми, поэтому формула радиальной ошибки должна включать член, содержащий коэффициент корреляции

$$M_2 = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}, \quad (8)$$

причем (8) с учетом (5), (6) можно представить в виде

$$M_2 = l_2 \sqrt{K^2 + 1 + \sin 2\varphi_0 \sqrt{K^4 + 2K^2 \cos 2\gamma + 1}}. \quad (9)$$

Таблица 2

Средние квадратические ошибки графического определения коэффициента корреляции

$\gamma \dots^\circ$	$l_1:l_2 (K)$					
	5:10 (0,5)	5:6 (0,833)	5:5 (1,0)	5:4 (1,25)	5:3 (1,667)	5:2 (2,5)
10	0,004	0,003	0,002	0,006	0,004	0,003
20	0,004	0,012	0,013	0,005	0,004	0,008
30	0,013	0,007	0,003	0,002	0,007	0,011
40	0,004	0,007	0,004	0,008	0,004	0,005
50	0,006	0,005	0,017	0,010	0,005	0,009
60	0,003	0,003	0,008	0,014	0,004	0,006
70	0,009	0,005	0,004	0,004	0,008	0,008
80	0,003	0,006	0,003	0,006	0,005	0,006
90	0,004	0,006	0,000	0,008	0,008	0,008
Средние	0,006	0,006	0,008	0,008	0,006	0,007

По формулам (7) и (9) подсчитаны 432 значения радиальной ошибки без учета и с учетом коэффициента корреляции. Причем значения радиальной ошибки  $M_1$  не зависят от углов  $\gamma$  и  $2\varphi_0$ , а зависят только от  $l_1$  и  $l_2$ . Получается, что две засечки, у которых одинаковы  $l_1$  и  $l_2$ , но у одной  $\gamma=10^\circ$ , а у другой  $\gamma=90^\circ$ , дадут одну и ту же  $M_1$ , следовательно, они равнозначны, что на самом деле не так.

На рис. 4 представлены графики зависимости радиальной ошибки  $M_2$  для трех значений  $2\varphi_0$  и для  $\gamma=10$  и  $90^\circ$ , которых достаточно для того, чтобы проследить закономерности ее изменения. На графиках пунктирной линией показан характер изменения радиальной ошибки  $M_1$  в зависимости от  $K$ . Анализ этих графиков позволяет отметить следующее:

1. Изменение угла засечки  $\gamma$  вызывает изменение радиальной ошибки  $M_2$ , причем при прочих равных условиях наибольшие изменения соответствуют  $K=1$ .



2. Для  $K=1$  и  $\gamma=90^\circ$  радиальные ошибки  $M_1$  и  $M_2$  равны между собой и не зависят от угла  $2\varphi_0$ . При этом при  $K>1$  значение  $M_2$  остается практически постоянным и не зависит от  $K$ .

3. Изменение угла  $2\varphi_0$  существенно влияет на значение  $M_2$ , и это влияние достигает своего максимума при  $2\varphi_0=90$  или  $270^\circ$ .

В результате проведенных исследований можно сделать вы-

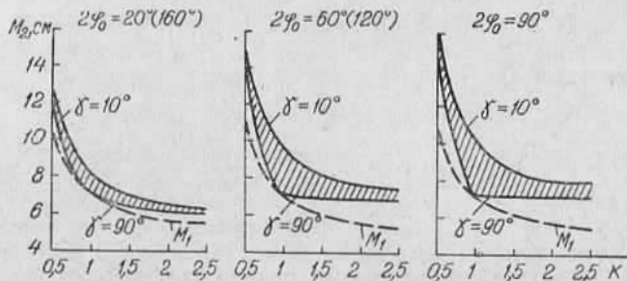


Рис. 4. Графики зависимости  $M_2$  от углов  $\gamma$  и  $2\varphi_0$  для различных  $K$ .

вод, что округность стандартов является простым, надежным, доступным и информативным критерием оценки точности геодезически определяемых пунктов, источником получения и одним из способов хранения большого объема полезной информации. На ее основе можно создать простые устройства, позволяющие механизировать и автоматизировать оценку точности положения геодезических пунктов с применением теории погрешностей зависимых измерений.

1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. — М.: Недра, 1979. — 303 с. 2. *Киселев М. И.* О влиянии способа угловой привязки и соотношения точностей угловых и линейных измерений на корреляцию координат узлового пункта полигонометрической сети. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, вып. 3, с. 27—33. 3. *Шеховцов Г. А.* А. с. 971 680 (СССР). Прибор для построения подеры эллипса погрешностей. — Опубл. в Б. И., 1982, № 41, с. 88. 4. *Шеховцов Г. А.* Метод замены многократных геодезических засечек на эквивалентные им простые. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37, с. 108—116. 5. *Шеховцов Г. А.* О критериях оценки точности и оптимизации засечек. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1984, вып. 2, с. 17—22. 6. *Никифоров Б. И.* О радиальной ошибке места. — Геодезия и картография, 1983, № 7, с. 18—21.