где

$$\gamma_e = 978\,032{,}952 \text{ мГал};$$

$$\gamma_{e\phi} = \gamma_e (1 + 0{,}005319 \sin^2\varphi + 0{,}000100 \sin^4\varphi - -0{,}000212 \sin^6\varphi + 0{,}000088 \sin^8\varphi), \quad (5)$$

где

$$\gamma_e = 978\,033{,}368 \text{ мГал}.$$

В заключение отметим, что полученные нами геометрия нетрадиционной Нормальной Земли [2] и развиваемое ею «нормальное» гравитационное поле, описанное здесь, дают пока лишь общую качественную картину, связанную с выделением из фигуры реальной Земли и ее гравитационного поля их главных частей, соответствующих предположениям теории гидростатически равновесных фигур планет. Как отмечено в [1], это существенно для геофизики (при интерпретации планетарных и региональных свойств планеты) и для геодезии (для уменьшения «возмущающего» потенциала Земли).

Установление количественных соотношений, вытекающих из концепции построения нетрадиционной Нормальной Земли, требует дальнейшего обсуждения и исследований, в первую очередь связанных с отбором исходной информации.

1. *Мещеряков Г. А.* О Нормальной Земле // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 43. С. 64—71. 2. *Мещеряков Г. А., Агеев Н. Ф.* Предварительный вариант нетрадиционной Нормальной Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 44. С. 58—63. 3. *Cunningham L. E.* On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // Celest. Mech. 1970. V. 2. P. 207—216. 4. *Lerch F. J., Putney B. H., Wagner C. A., Klosko S. M.* Goddard Earth Models for Oceanographic Applications (GEM10B and 10C). Presented at the Marine Geodesy Symposium. Miami. 1980. 5. *Moritz H.* Geodetic Reference System 1980 in the Geodesist's Handbook 1980 // Bulletin Geodesique. 1980. V. 54. № 3. P. 395—405. 6. *Reigber C. H., Müller H., Rizos Ch.* et al. An Improved GRIM3 Earth Gravity Model (GRIM3B) // Proceedings of the IAG Symposia. 1983. V. 1. P. 388—415.

Статья поступила в редколлегию 08. 01. 86

УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В [2] получены формулы, определяющие обратный вес любой линейной функции в геодезической сети, уравненной коррелатным и параметрическим методами. При уравнивании учитывали ошибки исходных данных и определяли поправки не только в измеренные величины, но и в исходные данные. В формуле обратного веса па-

раметрического метода [2] не учтено слагаемое, зависящее от корреляционной матрицы Q_μ ошибок исходных данных.

Приведем вывод точной формулы для вычисления обратного веса. Уравненные значения измеренных величин вычисляют по формуле [2]

$$l_1 = l - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} L - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} L + L, \quad (1)$$

где l — матрица-столбец измеренных величин в геодезической сети с корреляционной матрицей Q,

$$N = N_{22} + Q_\mu^{-1} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} N_{12}; \; N_{11} = B^{\text{т}} Q^{-1} B; \; N_{12} = B^{\text{т}} Q^{-1} B_\mu;$$

$$N_{22} = B_\mu^{\text{т}} Q^{-1} B_\mu; \; R^{\text{т}} = B_\mu^{\text{т}} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} B^{\text{т}}; \; L = M_0 + B_\mu M - l;$$

L — матрица-столбец свободных членов параметрических уравнений; B — прямоугольная матрица коэффициентов; M — матрица-столбец исходных данных с корреляционной матрицей Q_μ; M_0 — некоторая матрица приближенных исходных данных; Q^{-1}, Q_μ^{-1} — обратные матрицы; т — знак транспонирования матриц; B_μ — прямоугольная матрица коэффициентов исходных данных в параметрическом уравнении.

Как известно [1], корреляционная матрица любой линейной матричной функции $F = F_0 + A_0 l$, где F_0 и A_0 — постоянные параметры, а l — матрица-столбец измерений, определяется формулой

$$Q_F = A_0 Q_l A_0^{\text{т}}. \quad (2)$$

Пользуясь правилом (2) и формулой (1), нетрудно получить Q_{l_1} — корреляционную матрицу уравненных величин l_1. Для ясности вывода сначала в (1) подставим вместо свободного члена его значение

$$l_1 = l - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q (M_0 + B_\mu M - l) - - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} (M_0 + B_\mu M - l) + M_0 + B_\mu M - l. \quad (3)$$

Затем в (3) выделим слагаемые, зависящие от l и от M:

$$BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} \cdot l, \; RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} \cdot l,$$

$$(E - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1}) B_\mu \cdot M. \quad (4)$$

Теперь по (2) из выражений (4) находим корреляционную матрицу уравненных значений l_1:

$$Q_{l_1} = BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} + RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} RN^{-1} R^{\text{т}} + CQ_\mu C^{\text{т}}, \quad (5)$$

где $C = (E - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1}) B_\mu$; E — единичная матрица.

Пусть надо найти обратный вес уравненной функции $F(l_1)$. Приведем функцию к линейному виду относительно уравненной величины l_1:

$$F\{l + (l_1 - l)\} = F(l) + (l_1 - l)\frac{\partial F}{\partial l} + \cdots \approx F_0 + f l_1, \quad (6)$$

где $f = \dfrac{\partial F}{\partial l}$; l — измеренное значение.

Применяя (2), (6) и (5), получаем окончательную формулу обратного веса любой линейной функции в параметрическом методе уравнивания

$$\frac{1}{P_F} = f^{\text{т}} BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} f + f^{\text{т}} RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} RN^{-1} R^{\text{т}} f + f^{\text{т}} CQ_{\mu} C^{\text{т}} f. \quad (7)$$

В качестве примера оценим по формуле (7) уравненное превышение h_2 и уравненную высоту H_2 нивелирной сети, изображенной на рисунке. В данной сети два исходных пункта, три определяемых и пять измеренных превышений. Пусть корреляционные матрицы измерений и исходных данных равны единичным матрицам пятого

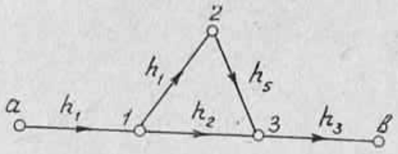

Схема нивелировки.

и второго порядков. Ниже приведены уравнения поправок параметрического метода, необходимые матрицы и результаты вычислений по формуле (7):

$$V_1 = \delta H_1 - \delta H_a + (H_1 - H_a - h_1),$$
$$V_2 = -\delta H_1 + \delta H_3 + (H_3 - H_1 - h_2),$$
$$V_3 = \delta H_3 + \delta H_b + (H_b - H_3 - h_3),$$
$$V_4 = -\delta H_1 + \delta H_2 + (H_2 - H_1 - h_4),$$
$$V_5 = -\delta H_2 + \delta H_3 + (H_3 - H_2 - h_5).$$

или в матричном виде

$$BX + B_{\mu}\delta M + L = V, \quad (8)$$

где V, X, δM — поправки в измеренные превышения и высоты определяемых и исходных пунктов соответственно

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{\mu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^{\text{т}} B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(B^{\text{т}} B)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu}^{\text{т}} B_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$N = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad N_{12}^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$R = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$BN^{-1} B^{\text{т}} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$RN^{-1} R^{\text{т}} = \frac{1}{4 \cdot 14}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 6 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad BN_{11}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix};$$

Результаты вычислений

$$\begin{array}{rcc}
 & 1/P_{h_2} = ? & 1/P_{H_2} = ? \\
f^{\text{т}} = & (0\;1\;0\;0\;0) & (1\;0\;0\;1\;0) \\
f^{\text{т}} B^{\text{т}} N_{11}^{-1} Bf = & 0{,}50 & 1 \\
f^{\text{т}} RN^{-1} R^{\text{т}} RN^{-1} R^{\text{т}} f = & \dfrac{96}{4^2 \cdot 14^2} = 0{,}03 & \dfrac{24}{14^2} = 0{,}12 \\
f^{\text{т}} C \cdot C^{\text{т}} f = & \dfrac{2}{7^2} = 0{,}04 & \dfrac{8}{7^2} = 0{,}16 \\
1/P_F = & 0{,}57 & 1{,}28
\end{array}$$

Таким образом, формула (7) уточняет аналогичную формулу в [2], так как обратные веса уравненного превышения h_2 и уравненной высоты H_2 составляют

$$1/P_{h_2} = 0{,}50 + 0{,}03 + 0{,}04 = 0{,}57,$$
$$1/P_{H_2} = 1 + 0{,}12 + 0{,}16 = 1{,}28,$$

что совпадает с оценками коррелатного метода, полученными в [2].

1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. М., 1979.
2. *Монин И. Ф.* Совместное уравнивание измерений и исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 41. С. 94.

Статья поступила в редколлегию 23. 10. 85