УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В [2] получены формулы, определяющие обратный вес любой линейной функции в геодезической сети, уравненной коррелатным и параметрическим методами. При уравнивании учитывали ошибки исходных данных и определяли поправки не только в измеренные величины, но и в исходные данные. В формуле обратного веса параметрического метода [2] не учтено слагаемое, зависящее от корреляционной матрицы Q_μ ошибок исходных данных.

Приведем вывод точной формулы для вычисления обратного веса. Уравненные значения измеренных величин вычисляют по формуле [2]

$$l_1 = l - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} L - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} L + L, \qquad (1)$$

где l — матрица-столбец измеренных величин в геодезической сети с корреляционной матрицей Q,

$$N = N_{22} + Q_\mu^{-1} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} N_{12};\ N_{11} = B^{\text{т}} Q^{-1} B;\ N_{12} = B^{\text{т}} Q^{-1} B_\mu;$$

$$N_{22} = B_\mu^{\text{т}} Q^{-1} B_\mu;\ R^{\text{т}} = B_\mu^{\text{т}} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} B^{\text{т}};\ L = M_0 + B_\mu M - l;$$

L — матрица-столбец свободных членов параметрических уравнений; B — прямоугольная матрица коэффициентов; M — матрица-столбец исходных данных с корреляционной матрицей Q_μ; M_0 — некоторая матрица приближенных исходных данных; Q^{-1}, Q_μ^{-1} — обратные матрицы; т — знак транспонирования матриц; B_μ — прямоугольная матрица коэффициентов исходных данных в параметрическом уравнении.

Как известно [1], корреляционная матрица любой линейной матричной функции $F = F_0 + A_0 l$, где F_0 и A_0 — постоянные параметры, а l — матрица-столбец измерений, определяется формулой

$$Q_F = A_0 Q_l A_0^{\text{т}}. \qquad (2)$$

Пользуясь правилом (2) и формулой (1), нетрудно получить Q_{l_1} — корреляционную матрицу уравненных величин l_1. Для ясности вывода сначала в (1) подставим вместо свободного члена его значение

$$l_1 = l - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q (M_0 + B_\mu M - l) -$$
$$- RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} (M_0 + B_\mu M - l) + M_0 + B_\mu M - l. \qquad (3)$$

Затем в (3) выделим слагаемые, зависящие от l и от M:

$$BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} \cdot l,\ RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} \cdot l,$$
$$(E - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1}) B_\mu \cdot M. \qquad (4)$$

Теперь по (2) из выражений (4) находим корреляционную матрицу уравненных значений l_1:

$$Q_{l_1} = BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} + RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} RN^{-1} R^{\text{т}} + CQ_\mu C^{\text{т}}, \qquad (5)$$

где $C = (E - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1}) B_\mu$; E — единичная матрица.

Пусть надо найти обратный вес уравненной функции $F(l_1)$. Приведем функцию к линейному виду относительно уравненной величины l_1:

$$F\{l + (l_1 - l)\} = F(l) + (l_1 - l)\frac{\partial F}{\partial l} + \cdots \approx F_0 + f l_1, \qquad (6)$$

где $f = \dfrac{\partial F}{\partial l}$; l — измеренное значение.

Применяя (2), (6) и (5), получаем окончательную формулу обратного веса любой линейной функции в параметрическом методе уравнивания

$$\frac{1}{P_F} = f^{\mathrm{T}} B N_{11}^{-1} B^{\mathrm{T}} f + f^{\mathrm{T}} R N^{-1} R^{\mathrm{T}} Q^{-1} R N^{-1} R^{\mathrm{T}} f + f^{\mathrm{T}} C Q_{\mu} C^{\mathrm{T}} f. \quad (7)$$

В качестве примера оценим по формуле (7) уравненное превышение h_2 и уравненную высоту H_2 нивелирной сети, изображенной на рисунке. В данной сети два исходных пункта, три определяемых и пять измеренных превышений. Пусть корреляционные матрицы измерений и исходных данных равны единичным матрицам пятого

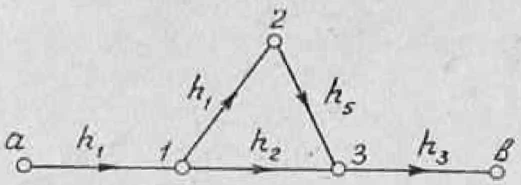

Схема нивелировки.

и второго порядков. Ниже приведены уравнения поправок параметрического метода, необходимые матрицы и результаты вычислений по формуле (7):

$$V_1 = \delta H_1 - \delta H_a + (H_1 - H_a - h_1),$$
$$V_2 = -\delta H_1 + \delta H_3 + (H_3 - H_1 - h_2),$$
$$V_3 = \delta H_3 + \delta H_b + (H_b - H_3 - h_3),$$
$$V_4 = -\delta H_1 + \delta H_2 + (H_2 - H_1 - h_4),$$
$$V_5 = -\delta H_2 + \delta H_3 + (H_3 - H_2 - h_5).$$

или в матричном виде

$$BX + B_{\mu}\delta M + L = V, \quad (8)$$

где V, X, δM — поправки в измеренные превышения и высоты определяемых и исходных пунктов соответственно

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad B_{\mu} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad B^{\mathrm{T}} B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(B^{\mathrm{T}} B)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu}^{\mathrm{T}} B_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$N = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad N_{12}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$R=\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$BN^{-1}B^{\mathrm{T}}=\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 5 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & 5 \end{Vmatrix},$$

$$RN^{-1}R^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4\cdot 14}\begin{Vmatrix} 9 & 6 & 9 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 6 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad BN_{11}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{Vmatrix};$$

Результаты вычислений

	$1/P_{h_2}=?$	$1/P_{H_2}=?$
$f^{\mathrm{T}}=$	$(0\ 1\ 0\ 0\ 0)$	$(1\ 0\ 0\ 1\ 0)$
$f^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}N_{11}^{-1}Bf=$	0,50	1
$f^{\mathrm{T}}RN^{-1}R^{\mathrm{T}}RN^{-1}R^{\mathrm{T}}f=$	$\frac{96}{4^2\cdot 14^2}=0{,}03$	$\frac{24}{14^2}=0{,}12$
$f^{\mathrm{T}}C\cdot C^{\mathrm{T}}f=$	$\frac{2}{7^2}=0{,}04$	$\frac{8}{7^2}=0{,}16$
$1/P_F=$	0,57	1,28

Таким образом, формула (7) уточняет аналогичную формулу в [2], так как обратные веса уравненного превышения h_2 и уравненной высоты H_2 составляют

$$1/P_{h_2}=0{,}50+0{,}03+0{,}04=0{,}57,$$

$$1/P_{H_2}=1+0{,}12+0{,}16=1{,}28,$$

что совпадает с оценками коррелатного метода, полученными в [2].

1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. М., 1979.
2. *Монин И. Ф.* Совместное уравнивание измерений и исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 41. С. 94.

Статья поступила в редколлегию 23. 10. 85