УДК 528.235

А. С. ЛИСИЧАНСКИЙ

ОБОБЩЕННЫЙ КЛАСС ЭКВИВАЛЕНТНЫХ АЗИМУТАЛЬНО-КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Азимутально-коническими мы называем такие картографические проекции, относительно которых азимутальные и конические являются некоторыми крайними частными случаями. Характерной особенностью такого обобщенного класса проекций является то, что их изоколы имеют форму изогнутых овалов, напоминающую форму ущербленной луны. Соответствующим выбором произвольных постоянных изоколам-овалам можно придать различную степень вытянутости и изогнутости, что делает этот класс проекций хорошо приспособляемым к очертаниям многих отображаемых областей по сравнению с азимутальной и конической проекциями.

Ниже излагаются основы теории построения обобщенного класса эквивалентных азимутально-конических проекций. При этом поверхность земли принята шаровой радиуса, равного единице. Методы эквивалентного отображения эллипсоида на шаре в картографии известны; поэтому в случае необходимости учета полярного сжатия земли, можно прибегнуть к методу двойного проектирования.

Положение точек на шаре будем выражать сферическими полярными координатами z, a косой системы, полюс которой расположен в некоторой центральной точке O изображаемой области. Азимуты a условимся считать от начального вертикала центральной точки O, перпендикулярного дуге некоторого осевого малого круга, проведенного в направлении изогнутости и вытянутости области. Переход от географических координат к сферическим полярным координатам можно осуществить по известным формулам.

Положение точек на проекции первоначально будем характеризовать посредством плоских полярных координат ϱ, δ, полюс которых лежит на изображении начального вертикала в удалении ϱ_0 от центральной точки O'. Начальный вертикал служит осью симметрии проекции и осью абсцисс плоской прямоугольной системы $xO'y$, начало которой тоже совпадает с изображением центральной точки.

Уравнения проекции в общем виде запишутся следующим образом:

$$x = \rho_0 - \rho \cos \delta, \quad y = \rho \sin \delta, \tag{1}$$

где, в свою очередь,

$$\rho = \rho(z, a), \quad \delta = \delta(z, a). \tag{2}$$

Принимая масштаб площадей p рассматриваемого класса эквивалентной проекции равным единице, условие эквивалентности запишем так:

$$\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial z} = \sin z. \tag{3}$$

Подставив сюда выражения частных производных, найденных из уравнений (1), получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial a}\frac{\partial\delta}{\partial z}-\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\delta}{\partial a}=\frac{\sin z}{\rho}. \tag{4}$$

Как уже указывали В. Витковский [1] и J. Mayer [4], равенства вида (3) или (4) можно рассматривать как уравнения. Для этого достаточно задать одну из отображаемых функций, после чего вторая из них может быть найдена путем решения дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Рассмотрим одну из таких задач.

Пусть отображающая функция $\rho(z, a)$ задана в следующем виде:

$$\rho=\sqrt{\rho_0^2+2g}, \tag{5}$$

где $g=g(z, a)$ — известная нам функция, а ρ_0 — упомянутая выше произвольная постоянная. Тогда

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{g'_z}{\rho},\quad \frac{\partial\rho}{\partial a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial a}=\frac{g'_a}{\rho},$$

и равенство (4) запишется в виде такого уравнения:

$$g'_a\frac{\partial\delta}{\partial z}-g'_z\frac{\partial\delta}{\partial a}=\sin z. \tag{6}$$

Вторую отображающую функцию $\delta=\delta\ (z, a)$ находим, решая это уравнение. Соответствующая ему система обыкновенных дифференциальных уравнений будет:

$$\frac{dz}{g'_a}=-\frac{da}{g'_z}=\frac{d\delta}{\sin z},$$

или

$$g'_z dz+g'_a da=0,\quad d\delta=F da, \tag{7}$$

где

$$F=-\frac{\sin z}{g'_z}. \tag{8}$$

Первый и второй независимые интегралы уравнения (6) имеют вид

$$g(z, a)=c_1, \tag{9}$$

$$\delta-\int F da=c_2. \tag{10}$$

Нам не нужно находить общий интеграл уравнения (6). Действительно, в силу того, что при $a=0$ (или 180°), а также при $z=0$ угол $\delta=0$, имеем $c_2=0$. Следовательно, из формулы (10) сразу получаем решение поставленной задачи в общем виде:

$$\delta=\int_{a_0}^{a_n} F da. \tag{11}$$

Из формулы (8) легко убедиться, что $\int F da$ только тогда может быть непосредственно сведен к квадратурам, когда функция $g(z, a)$

будет пропорциональна $\cos z$. В рассматриваемом нами обобщенном классе азимутально-конических проекций это, вообще говоря, не имеет места.

Теперь займемся построением такой функции $g(z, a)$, которая обобщала бы собой азимутальную и коническую проекции.

В эквивалентной азимутальной проекции с масштабом в центральной точке области, равным единице, имеем

$$\rho^2 = \rho_0^2 + 2\left(2\sin^2\frac{z}{2} - 2\sin\frac{z}{2}\rho_0\cos a\right). \qquad (12)$$

В эквивалентной конической проекции с масштабом, равным единице, на среднем малом круге области получаем

$$\rho^2 = \rho_0^2 + 2\left(2\sin^2\frac{z}{2} - \sin z\rho_0\cos a\right). \qquad (13)$$

Выражения, стоящие в скобках формул (12) и (13), соответствуют функции $g(z, a)$, содержащейся в принятой нами ранее исходной формуле радиуса-вектора точки. Из сравнения этих выражений видим, что для обобщенного класса эквивалентных азимутально-конических проекций можно принять следующий вид этой функции:

$$g = 2\sin^2\frac{z}{2} - \zeta\rho_0\cos a, \qquad (14)$$

где ζ — такая монотонная функция зенитного расстояния z и некоторой произвольной постоянной $k\,(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$, что при $k = k_1$ получаем $\zeta = 2\sin\frac{z}{2}$, то есть азимутальную проекцию, и при $k = k_2$ получаем $\zeta = \sin z$, то есть коническую проекцию. Во всех других случаях, когда $k_1 < k < k_2$, находим собственно азимутально-коническую проекцию.

В дальнейших выкладках будем исходить из следующего вида этой функции:

$$\zeta = 2\sin\frac{z}{2} - k\left(2\sin\frac{z}{2} - \sin z\right), \quad 0 \leqslant k \leqslant 1. \qquad (15)$$

Заметим, что с принятым видом функций g и ζ первообразная интеграла (11) не выражается через элементарные функции, в результате чего этот интеграл нельзя вычислить с помощью формулы Ньютона-Лейбница, и мы будем ориентироваться на определения его численным методом.

В связи с этим приходится сделать следующее замечание.

Содержащаяся в подынтегральной функции F переменная z в соответствии с равенством (9) будет зависеть от a и c_1, так как при вычислении угла δ для данной точки величина c_1, равная g, должна быть постоянной. Другими словами, фиксированные точки i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$, делящие участок интегрирования на части, соответствующие принятому постоянному шагу азимута Δa, будут лежать на сферической кривой (9), которой на проекции соответствует дуга окружности радиуса ϱ, заключенная между осью абсцисс и вычисляемой точкой.

Для вычисления значений функции F в фиксированных точках упомянутой кривой, азимуты на которые равны a_i $(a_i = a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, необходимо предварительно вычислить соответствующие им значения зенитных расстояний $z_i (z_i = z_0, z_1, z_2, \ldots z_n)$. Из формул (14) и (15) получаем такое уравнение:

$$2\sin^2\frac{z_i}{2}-\left[2\sin\frac{z_i}{2}-k\left(2\sin\frac{z_i}{2}-\sin z_i\right)\right]\rho_0\cos a_i-g=0 \quad (16)$$

или после простых преобразований находим

$$\sin^2\frac{z_i}{2}-\left[\rho_0\cos a_i-k\rho_0\cos a_i\left(1-\cos\frac{z_i}{2}\right)\right]\sin\frac{z_i}{2}-\frac{g}{2}=0. \quad (16а)$$

Искомые значения z_i можно получить из этого уравнения методом последовательных приближений.

Итак, уравнения обобщенного класса эквивалентных азимутально-конических проекций в плоских полярных координатах выражаются следующими формулами:

$$\rho=\sqrt{\rho_0^2+2g}\,,\quad \delta=\int\limits_{a_0}^{a_n}F da, \quad (17)$$

где

$$g=2\sin^2\frac{z}{2}-\zeta\rho_0\cos a,\quad F=-\frac{\sin z}{(g'_z)_i}\,,$$
$$\zeta=2\sin\frac{z}{2}-k\left(2\sin\frac{z}{2}-\sin z\right); \quad (18)$$

$$g'_z=\sin z-\zeta'\rho_0\cos a,$$
$$\zeta'=\cos\frac{z}{2}-k\left(\cos\frac{z}{2}-\cos z\right). \quad (19)$$

Остановимся теперь на вопросе характеристики искажений рассматриваемого класса проекций.

Для расчета масштабов и искажений достаточно, как известно, располагать значениями частных производных $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial a}$. Согласно уравнениям (1), они выражаются через частные производные отображаемых функций (2) следующим образом:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\delta+\rho\sin\delta\frac{\partial\delta}{\partial z},\quad \frac{\partial x}{\partial a}=-\frac{\partial\rho}{\partial a}\cos\delta+\rho\sin\delta\frac{\partial\delta}{\partial a},$$
$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\delta+\rho\cos\delta\frac{\partial\delta}{\partial z},\quad \frac{\partial y}{\partial a}=\frac{\partial\rho}{\partial a}\sin\delta+\rho\cos\delta\frac{\partial\delta}{\partial a}. \quad (20)$$

Следовательно, если мы укажем способ вычисления частных производных $\frac{\partial\rho}{\partial z}, \frac{\partial\rho}{\partial a}, \frac{\partial\delta}{\partial z}, \frac{\partial\delta}{\partial a}$, то тем самым решим поставленный вопрос.

Первые две производные получаем непосредственно из формул (5) и (14):

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{g'_z}{\rho},\quad \frac{\partial\rho}{\partial a}=\frac{g'_a}{\rho}, \quad (21)$$

где

$$g'_z=\sin z-\zeta'\rho_0\cos a,\quad g'_a=\zeta\rho_0\sin a. \quad (22)$$

Вторые две искомые производные можно найти дифференцированием определенного интеграла (11). Однако при этом необходимо учитывать, что подынтегральная функция F непосредственно выражена через переменные координаты z_i, a_i точек кривой $g(z, a)=c_1$, а так как $c_1=g$ и $g_i=g$, то

$$2\sin^2\frac{z_i}{2}-\zeta_i\rho_0\cos a_i=2\sin^2\frac{z}{2}-\zeta\rho_0\cos a, \tag{23}$$

где координаты данной точки z, a выступают в роли параметров, а величины z_i, a_i являются функциями этих параметров, причем для определения величин z_i величины a_i должны быть заданы.

Таким образом, дифференцируя определенный интеграл (11) по параметрам z и a, находим

$$\frac{\partial\delta}{\partial z}=\int\limits_{a_0}^{a_n}(F_z')_i\frac{\partial z_i}{\partial z}da,\quad \frac{\partial\delta}{\partial a}=\int\limits_{a_0}^{a_n}(F_z')_i\frac{\partial z_i}{\partial a}da, \tag{24}$$

где посредством дифференцирования равенств (8) и (25) имеем

$$\begin{gathered}(F_z')_i=-\left[\frac{g_z'\cos z-g_z''\sin z}{(g_z')^2}\right]_i,\\ \frac{\partial z_i}{\partial z}=\frac{g_z'}{(g_z')_i},\quad \frac{\partial z_i}{\partial a}=\frac{g_a'}{(g_z')_i}.\end{gathered} \tag{25}$$

Кроме того, дифференцированием формул (21) по z получаем

$$\begin{gathered}g_z''=\cos z-\zeta''\rho_0\cos a,\\ \zeta''=-\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}-k\left(\sin z-\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}\right).\end{gathered} \tag{26}$$

Замечания, сделанные ранее по поводу вычисления определенного интеграла (11), полностью относятся и к определенным интегралам (26). Для контроля вычисления производных $\frac{\partial\delta}{\partial z}$ и $\frac{\partial\delta}{\partial a}$ можно использовать равенство (6).

Вычисление самих масштабов и искажений по частным производным (22) может быть осуществлено с использованием известных в математической картографии формул. При этом следует, конечно, учитывать, что направления вертикала и альмукантарата в рассмотренном классе проекций не будут главными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витковский В. Картография (теория картографических проекций). СПб, 1907.
2. Соловьев М. Д. Картографические проекции. М., 1946.
3. Урмаев Н. А. Математическая картография. М., 1941.
4. Mayer J. Gründliche und vollständige Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten, Erlangen, 1794.

Работа поступила
15 мая 1969 года.