

ОКРУЖНОСТЬ СТАНДАРТОВ С ВНЕШНИМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

Окружность стандартов (о. с.) радиусом $O_1O_2 = \frac{1}{2}(A_0 + B_0)$

с внутренним эксцентриситетом $OO_1 = \frac{1}{2}(A_0 - B_0)$ (рис. 1) об-

ладает наибольшим объемом полезной и достоверной семантической и метрической информации по сравнению с другими известными геометрическими критериями оценки точности положения точек [1]. Однако при разработке приборов и устройств, основанных на свойствах о. с., возникают трудности, связанные с расположением точки O внутри о. с., что приводит к усложнению конструкции. Этого можно избежать в новом варианте построения и использования о. с. с внешним эксцентриситетом.

Получить такую окружность (пунктирная кривая на рис. 1) можно, проведя ее из точки O_1 радиусом $R = O_1O = \frac{1}{2}(A_0 - B_0)$,

а за эксцентриситет принять $e = O_1O_2 = \frac{1}{2}(A_0 + B_0)$. У о. с. с внешним эксцентриситетом $O_2O = B_0$ (малая полуось среднего квадратического эллипса ошибок), а $O_2O_3 = A_0$ (большая полуось).

Направление координатных осей x и y обеих о. с. располагается под углом $2\varphi_0$ к большой полуоси, причем известно, что отрезки $Oh_1 = m_x$, $Oh_2 = m_y$ соответствуют средним квадратическим ошибкам по осям координат. Поскольку треугольники Oh_1O_1 и $O_1O_2h_1'$, Oh_2O_1 и $O_1O_2h_2'$ попарно равны, то у о. с. с внешним эксцентриситетом отрезки $O_2h_1' = m_x$, $O_2h_2' = m_y$.

Доказано [1], что у о. с. с внутренним эксцентриситетом коэффициент корреляции r_{xy} между ошибками m_x и m_y (при $\beta_1 = 90^\circ$) равен $\sin \beta'$ (рис. 1, а, б). В общем виде коэффициент корреляции можно представить как

$$r_{xy} = \cos(\beta' - \beta_1). \quad (1)$$

При $2\varphi_0 < 180^\circ$ r_{xy} — величина положительная (рис. 1, а), при $2\varphi_0 > 180^\circ$ r_{xy} — отрицательная (рис. 1, б). Исходя из того что сумма углов каждого треугольника Oh_1h_2 и $O_2h_1'h_2'$ равна 360° , получаем $\beta' = 2\beta_1 - \beta_2'$ (рис. 1, а) и $\beta' = 360^\circ + 2\beta_1 - \beta_2'$ (рис. 1, б).

Отсюда, применительно к о. с. с внешним эксцентриситетом, следует

$$r_{xy} = \cos(\beta_1 - \beta_2') = \sin \beta_2' \quad (2)$$

При определении углов $2\beta_1$, β' и β_2' необходимо придерживаться правила: для коэффициента корреляции r_{ij} эти углы отсчитываются от направления i по ходу часовой стрелки до направления j . Так, в соответствии с (2) r_{yx} — величина отрицательная (рис. 1, а) и положительная (рис. 1, б), равная по модулю r_{xy} . Поэтому в общем виде

$$r_{ij} = \cos(\beta_i - \beta_j') \quad (3)$$

Проведем (рис. 1, в, г) под удвоенными дирекционными углами $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ к оси x два произвольных направления. В слу-

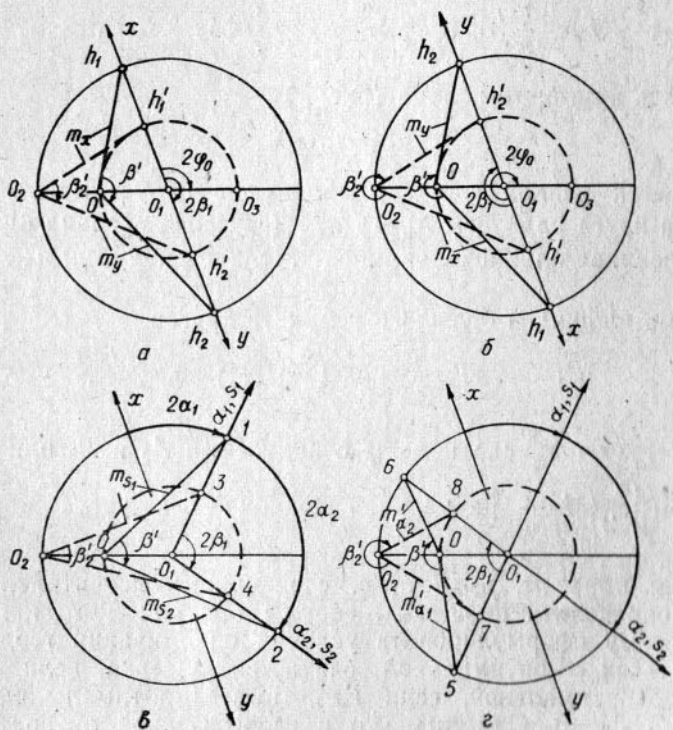


Рис. 1. Окружности стандартов с внутренним и внешним эксцентриситетами.

чае о. с. с внутренним эксцентриситетом отрезки $O-1 = m_{s_1}$ и $O-2 = m_{s_2}$ характеризуют средние квадратические ошибки положения пункта по направлениям α_1 и α_2 , а $O-5 = m_{\alpha_1'}$ и $O-6 = m_{\alpha_2'}$ по перпендикулярным к α_1 и α_2 направлениям. Причем доказано [1], что эти ошибки автоматически учитывают коэффициент корреляции r_{xy} . Исходя из равенства треугольников

$O-1-O_1$ и O_1-O_2-3 , $O-2-O_1$ и O_1-O_2-4 (рис. 1, в), $O-6-O_1$ и O_1-O_2-8 , $O-5-O_1$ и O_1-O_2-7 (рис. 1, г), имеем для о. с. с внешним эксцентриситетом $O_2-3=m_{s_1}$, $O_2-4=m_{s_2}$, $O_2-7=m'_{a_1}$, $O_2-8=m'_{a_2}$. Коэффициенты корреляции $r_{s_1 s_2}$ между сдвигами пункта по направлениям α_1 и α_2 и $r_{\alpha_1 \alpha_2}$ — по перпендикулярным к ним направлениям, вычисляются согласно (3), причем порядок определения β_1 и β_2' поясняется рис. 1, в, г.

Теоретически угол β_2' может изменяться от 0° (при $OO_1=0$, когда $A_0=B_0$) до 90° (при $OO_1=O_1O_2$, когда $B_0=0$). Если $\beta_1=90^\circ$, например, при определении $r_{s_1 \alpha_2}$, $r_{s_2 \alpha_2}$ и др., приходим к случаю на рис. 1, а, б.

Площади большого и малого кругов радиусом e и R составляют

$$F_e = \frac{\pi}{4} (A_0 + B_0)^2, \quad F_R = \frac{\pi}{4} (A_0 - B_0)^2, \quad (4)$$

а площадь кругового кольца (рис. 1)

$$F_{e-R} = \pi A_0 B_0 \quad (5)$$

оказывается равной площади эллипса с полуосями A_0 и B_0 , площади круга радиусом $M_r = \sqrt{A_0 B_0}$ (гауссова средняя ошибка) или половине площади эллипса Меле с полуосями $A_0 \sqrt{2}$ и $B_0 \sqrt{2}$.

Сумма площадей большого и малого кругов

$$F_{e+R} = \frac{\pi}{2} (A_0^2 + B_0^2) \quad (6)$$

соответствует площади подеры с полуосями A_0 и B_0 или круга радиусом $\frac{M}{\sqrt{2}}$ (M — радиальная ошибка без учета корреляции).

Таким образом, имея о. с. с внешним эксцентриситетом, можно определить площадь любого геометрического критерия и по новому сформулировать условия оптимизации геодезических засечек. A -оптимальной считается засечка, если $F_{e+R} = \min$; D -оптимальной, если $F_{e-R} = \min$; E -оптимальной, если $R=0$ или $F_R=0$. Отметим, что в геодезической литературе в качестве критерия A -оптимизации применяется радиальная ошибка M без учета коэффициента корреляции r_{xy} . На наш взгляд, в качестве такого критерия необходимо использовать радиальную ошибку M_h с учетом корреляции [2].

О. с. с внешним эксцентриситетом можно построить и без предварительного вычисления значений A_0 , B_0 и дирекционного угла φ_0 большой полуоси. Для этого достаточно знать фиксированные расстояния l_1 и l_2 и угол γ простой реальной или фиктивной засечки, которой можно эквивалентно заменить любое маркшейдерско-геодезическое построение (полигометри-

ческий ход, многократную засечку и др.). Об определении значений l_1 и l_2 подробно сказано в [1, 2]. Примем для примера $l_1=5$ см, $l_2=2$ см (рис. 2, а, в) и $l_1=2$ см, $l_2=5$ см (рис. 2, б, г), $\gamma=40^\circ$, $\alpha_1=40^\circ$. Вначале проводим две линии $O_2-1=l_1$ и $O_2-2=l_2$, угол между которыми составляет $90^\circ-\gamma$. Поделив отрезок 1-2 пополам, получим центр O_1 о. с. радиусом $O_1-1=O_2-2$. Проведя через точки O_2 и O_1 прямую линию, находим значения $B_0=1,22$ см, $A_0=5,24$ см.

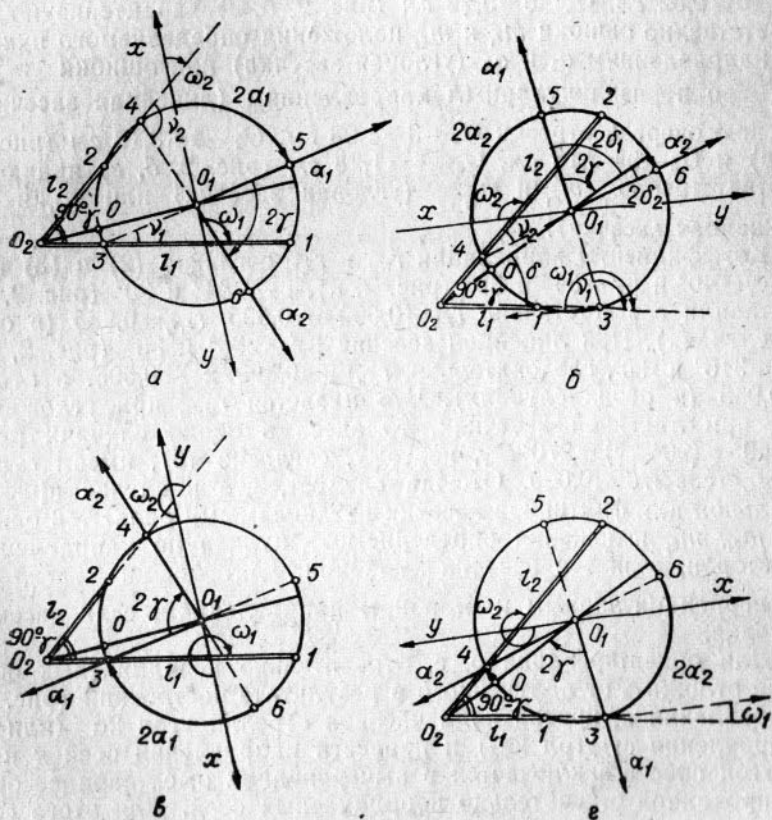


Рис. 2. Окружности стандартов для угловой (а, б) и линейной (в, г) засечек.

Находим точки 3 и 4 пересечения о. с. с фиксированными расстояниями или их продолжениями. Проводим через эти точки и центр O_1 прямые и получаем направления α_1 и α_2 угловой засечки (рис. 2, а, б) или линейной засечки (рис. 2, в, г), причем угол между ними должен быть равен 2γ . Действительно, на примере рис. 2, б, опуская доказательства, имеем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{l_2 \cos \gamma}{l_1 + l_2 \sin \gamma}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} 2\delta_1 = \frac{l_2^2 \sin 2\gamma}{l_1^2 + l_2^2 \cos 2\gamma}, \quad \operatorname{tg} 2\delta_2 = \frac{l_1^2 \sin 2\gamma}{l_2^2 + l_1^2 \cos 2\gamma},$$

$$\operatorname{tg}(2\delta_1 + 2\delta_2) = \operatorname{tg} 2\gamma.$$

Отрезки $O_2-5=5,22$ см, $O_2-6=4,32$ см (рис. 2, а, в) и $O_2-5=4,32$ см, $O_2-6=5,22$ см (рис. 2, б, г) характеризуют соответственно ошибки m_{s_1} и m_{s_2} положения определяемого пункта по направлениям α_1 и α_2 (угловая засечка) или ошибки m'_{α_1} и m'_{α_2} по перпендикулярным направлениям (линейная засечка). В свою очередь отрезки $O_2-3=1,28$ см, $O_2-4=3,18$ см (рис. 2, а, в) и $O_2-3=3,18$ см, $O_2-4=1,28$ см (рис. 2, б, г) являются соответственно m'_{α_1} и m'_{α_2} (угловая засечка) или m_{s_1} и m_{s_2} (линейная засечка).

Коэффициенты корреляции r_{xy} и $r_{s_1 s_2}$ согласно (2) и (3) при $\beta_i = \gamma = 40^\circ$ и $\beta_2' = 64^\circ$ и 30° (рис. 2, а), $\beta_2' = 44^\circ$ и 30° (рис. 2, б) составили соответственно $r_{xy} = 0,899$ и $0,695$, $r_{s_1 s_2} = 0,985$ (в обоих случаях). При линейной засечке $\beta_2' = 296^\circ$ и 30° (рис. 2, в), $\beta_2' = 316^\circ$ и 30° , следовательно, $r_{xy} = -0,899$ и $-0,695$, а $r_{\alpha_1 \alpha_2} = 0,985$ (в обоих случаях). Что касается $r_{\alpha_1 \alpha_2}$ при угловой и $r_{s_1 s_2}$ при линейной засечках, то здесь в обоих случаях $\beta_2' = 360^\circ - (90^\circ - \gamma) = 270^\circ - \gamma$, поэтому, согласно (3), имеем $r_{\alpha_1 \alpha_2} = r_{s_1 s_2} = \cos 270^\circ = 0,000$. Отсюда следует, что в случае простой реальной или фиктивной засечки независимыми являются ошибки m_{s_1} , m_{s_2} положения определяемого пункта по направлению ее сторон, если эта засечка линейная, или ошибки m'_{α_1} , m'_{α_2} по перпендикулярным к сторонам направлениям, если засечка угловая.

Для ориентирования о. с. относительно координатных осей надо отложить от полученного в результате построений (рис. 2) направления α_1 против хода часовой стрелки угол 2α (или от направления α_2 угол $2\alpha_2$) и провести направления осей x и y . Другой способ заключается в вычерчивании о. с., заранее ориентированной относительно координатных осей. Для этого следует вычислить углы ω_1 или ω_2 между направлением оси x и направлениями l_1 или l_2 (рис. 2). В случае угловой засечки

$$\omega_1 = 2\alpha_1 + \nu_1, \quad \omega_2 = 2\alpha_2 - \nu_2. \quad (8)$$

Углы ν_1 и ν_2 показаны на рис. 2, а, б и вычисляются по формулам

$$\nu_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{l_2 \cos \gamma}{l_1 - l_2 \sin \gamma}, \quad \nu_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{l_1 \cos \gamma}{l_2 - l_1 \sin \gamma}, \quad (9)$$

причем, если значение угла ν_1 или ν_2 получено со знаком минус, то перед подстановкой его в формулу (8) к этому отрицательному значению необходимо прибавить 180° . В случае линейной засечки (рис. 2, в, г) к значениям углов ω_1 и ω_2 , подсчитанных по формуле (8), следует прибавить 180° . Контролем вычислений по (8) и (9) является формула

$$\omega_1 - \omega_2 = 90^\circ - \gamma. \quad (10)$$

В простой фиктивной засечке, эквивалентно заменяющей маркшейдерско-геодезическое построение, фиксированные расстояния равны между собой, поэтому

$$\nu_1 = \nu_2 = \arctg \frac{\cos \gamma}{1 - \sin \gamma}. \quad (11)$$

По значениям l_1 , l_2 и γ можно вычислить любой элемент о. с. с внешним эксцентриситетом

$$R = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \sin \gamma}}{2}, \quad e = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \sin \gamma}}{2}, \quad (12)$$

в том числе средние квадратические ошибки координат, полуоси A_0 и B_0 , радиальную ошибку с учетом корреляции M_h и др.

Анализ формул (12) показывает: при $\gamma = 0^\circ$, $R = e = \frac{1}{2} \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$

$B_0 = 0$, $A_0 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = 2R = 2e$, а точка O_2 лежит на окружности;

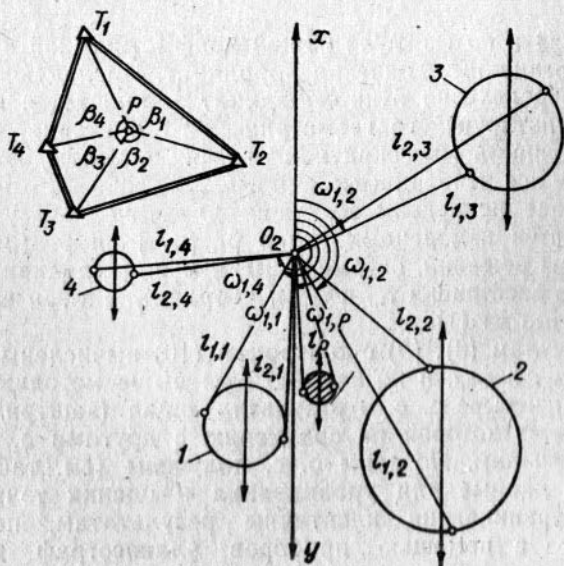


Рис. 3. К уравниванию обратной угловой засечки.

при $\gamma = 90^\circ$, $R = \frac{1}{2}(l_1 - l_2)$, $e = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ ($A_0 = l_1$, $B_0 = l_2$ (если $l_1 > l_2$) и $A_0 = l_2$, $B_0 = l_1$ (если $l_1 < l_2$)). В случае $l_1 = l_2 = l$, $R = -l\sqrt{\frac{1 - \sin \gamma}{2}}$, $e = l\sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{2}}$, $A_0 = \sqrt{2}l \cos \frac{\gamma}{2}$, $B_0 = \sqrt{2}l \sin \frac{\gamma}{2}$.

Рассмотрим пример уравнивания обратной угловой засечки, взятый из [1]. Напомним, что сущность предложенного нами способа уравнивания с использованием геометрических критериев заключается в следующем. Многократная засечка разделяется на составляющие ее отдельные простые засечки (частные решения). Для каждого частного решения вычисляют координаты x_i и y_i определяемого пункта P и вычерчивают геометрический критерий, по которому находят средние квадратические ошибки m_{x_i} , m_{y_i} , затем веса p_{x_i} , p_{y_i} координат част-

Элементы ориентирования о. с. и результаты уравнивания обратной угловой засечки

Частные решения	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$l_1, \text{см}$	$l_2, \text{см}$	$\omega_1, ^\circ$	$\omega_2, ^\circ$	$\omega_1 - \omega_2$	$m_x, \text{см}$	$m_y, \text{см}$	$x, \text{м}$	$y, \text{м}$
$T_1 - T_2 - T_3 - P$	64	128	64	18,2	18,7	208,4	182,4	26	14,5	21,8	75,105	40,794
$T_2 - T_3 - T_4 - P$	64	134	70	32,3	17,9	149,6	129,6	20	19,2	31,2	75,311	41,228
$T_3 - T_4 - T_1 - P$	134	216	82	20,1	30,7	65,5	57,5	8	28,2	23,8	75,672	40,844
$T_4 - T_1 - T_2 - P$	128	216	88	19,9	16,3	265,0	263,0	2	17,8	18,5	75,294	40,564
Результир. о. с.	46	123	77	13,9	13,9	175,5	162,5	13	12,5	15,0	75,262	40,776

ных решений и по формуле общей арифметической средней вычисляют уравненные значения координат. Последующая оценка точности определения этих координат заключается в вычерчивании результирующего геометрического критерия, характеризующего точность многократной засечки в целом, по которому определяют все необходимые данные.

В таблице приведены значения дирекционных углов $\alpha_{1,i}$ и $\alpha_{2,i}$ градиентов измеренных углов β_1 , β_2 , β_3 и β_4 (рис. 3) для всех частных решений, острые углы γ_i между градиентами, фиксированные расстояния $l_{1,i}$ и $l_{2,i}$ и координаты x_i , y_i частных решений, взятые из [1].

По формулам (8), (9) с контролем (10) вычислены ориентирные углы $\omega_{1,i}$ и $\omega_{2,i}$, и по приведенной выше методике построены (рис. 3) четыре о. с. и результирующая (заштрихованная), эксцентриситет которой по сравнению с другими о. с. должен быть наименьшим. По этим о. с. получены (см. таблицу) необходимые данные для уравнивания и оценки точности. Результаты уравнивания идентичны результатам, полученным нами ранее с помощью приборов эллипсограф и подерограф.

В заключение отметим, что геометрические критерии большой семантической и метрической насыщенности могут слу-

жить основой нового научного направления в области математической обработки геодезических измерений с использованием персональных технических средств их построения, компьютерной графики и др.

1. Шеховцов Г. А. Критерии и средства геометрической интерпретации погрешности положения точек на плоскости. Горький, 1987. С. 198. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 192—В87. 2. Шеховцов Г. А. Оценка точности засечек с помощью окружности стандартов // Геодезия и картография. 1985. № 8. С. 45—47.

Статья поступила в редколлегию 01. 04. 87
