

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ L_p -ОЦЕНОК

Метод L_p -оценок включает в себя методы наименьших квадратов (МНК), наименьших модулей, равномерных приближений. Уравнивание этим методом сводится к решению систем параметрических или условных уравнений при условии минимума суммы произведений модулей остаточных уклонений в p -й степени

$$\sum_i q_i |v_i|^p \rightarrow \min, \quad p \geq 1, \quad (1)$$

где q_i — вес результатов измерений.

Вероятностное обоснование использования метода L_p -оценок вытекает из метода максимального правдоподобия Фишера (ММП), в случае его применения к семейству распределений

$$Y(\xi) = \frac{c_p}{2\Delta_p} \exp\left(-\frac{1}{p\Delta_p} |\xi - \xi_0|^p\right), \quad (2)$$

где c_p, Δ_p — параметры, зависящие от p . Несложно показать, что поиск наилучших оценок ММП при ошибках, имеющих плотность (2), приводит к условию метода L_p -оценок (1). Методика поиска оптимального значения p при уравнивании геодезических построений включает: проведение предварительного статистического анализа ошибок измерений или величин, косвенным образом связанных с ними (например, невязок треугольников триангуляции и т. п.); установление эмпирического закона распределения ошибок и согласование параметров теоретического закона (2) с эмпирическим; определение p при условии минимума критерия согласия теоретического и эмпирического распределений. Наиболее подходящим для этого представляется критерий χ^2 Пирсона.

Вычислительная сторона метода L_p -оценок в настоящее время достаточно хорошо изучена. Основой его является итеративный метод наименьших квадратов (ИМНК).

Остановимся на основных моментах применения ИМНК для отыскания L_p -оценок при уравнивании геодезических измерений.

Условие (1), преобразованное следующим образом

$$\sum_i q_i |v_i|^{p-2} v_i^2 \rightarrow \min,$$

очевидно, можно рассматривать как условие МНК с неизвестной весовой матрицей

$$C = Q|V|^{p-2},$$

уточняемой в процессе применения ИМНК. Рекуррентный алгоритм уравнивания методом L_p -оценок приводится ниже отдельно для параметрического и условного способа.

Вопросы оценки точности получаемых результатов в данной работе не рассматриваются.

Параметрический способ. Если задана система параметрических уравнений $AX+B=V$ с весовой матрицей Q , то уравнивание рассматриваемым методом сводится к следующим этапам:

I. При $1 \leq p < 2$.

1. Нахождение приближенного решения (например, по МНК)

$$\hat{X} = -(A^T Q A)^{-1} A^T Q B;$$

$$V = A \hat{X} + B.$$

2. Вычисление элементов весовой матрицы

$$c_{ij} = \begin{cases} q_i \cdot v_i |^{p-2}, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

3. Нахождение неизвестных X и V

$$X = -(A^T C A)^{-1} A^T C B;$$

$$V = A X + B. \quad (4)$$

4. По остаточным уклонениям V с использованием (3) вычисляется новое значение матрицы C , а затем новое решение по (4). Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится условие

$$\frac{\|x_n - x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность решения. Сходимость такого процесса доказана в [2].

II. $p > 2$.

Этапы 1, 2 и 3 остаются теми же, что и при $1 \leq p < 2$. Полученное на третьем этапе значение x_n корректируется по формуле

$$x_n = (1-G)x_{n-1} + \hat{x}_n,$$

где

$$G = \frac{1}{p-1}.$$

Затем процесс повторяется, начиная со второго этапа. При этом используются остаточные уклонения, соответствующие новым значениям x_n . При достижении заданной точности решения процесс итераций прекращается. Данная модификация ИМНК введена Флетчером, Грантом и Хебденом [3].

Коррелятный способ. Пусть задана система условных уравнений $BV+W=0$ с весовой матрицей Q . Решение методом L_p -оценок в этом случае включает:

1. При $1 \leq p < 2$.

1. Нахождение приближенного МНК-решения

$$V = Q^{-1}B^TK;$$
$$K = (BQ^{-1}B^T)^{-1}W.$$

2. Вычисление элементов весовой матрицы по (3).

3. Нахождение коррелят K и поправок V

$$K = (BC^{-1}B^T)^{-1}W;$$
$$V = C^{-1}B^TK. \quad (5)$$

4. Проверка условия

$$\frac{\|k_{n+1} - k_n\|}{\|k_n\|} < \varepsilon. \quad (6)$$

При невыполнении (6) этапы 2 и 3 повторяются с использованием последних полученных значений K и V .

II. При $p > 2$.

Пункты 1, 2 и 3 аналогичны описанным выше.

4. Для обеспечения сходимости процесса итераций выполняется корректировка полученных коррелят

$$K = (1-G)K + \hat{G}K,$$

после чего вычисляется матрица

$$R = CV = A^TK.$$

Элементы новой весовой матрицы C запишем так:

$$c_{ij} = \begin{cases} |r_i|^{\frac{p-2}{p-1}}, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

Рекуррентный процесс повторяется до достижения заданной точности коррелят.

5. Окончательные значения вероятнейших поправок в измеренные величины вычисляются по (5).

Данный процесс эквивалентен методу Ньютона поиска условного минимума функции. Сходимость ИМНК в этом случае гарантируется теоремой 3 из [3].

В таблице приведены результаты уравнивания геодезического четырехугольника [1] методом L_p -оценок. Для проверки описанного алгоритма решение выполнялось при различных значениях p коррелятным и параметрическим способом по методу L_p -оценок с точностью $\varepsilon = 0,001$. Правильность приведенных выше формул подтвердилась получением тождественных результатов (в пределах заданной точности) при уравнивании сети обоими способами метода L_p -оценок*.

* Следует заметить, что предварительный статистический анализ в данном примере не проводился из-за отсутствия у автора необходимых данных.

**Результаты уравнивания геодезического четырехугольника
методом L_p -оценок**

№ угл.	Параметрический метод с уклонениями V при p			Коррелятивный метод с поправками V при p		
	1	2	3	1	2	3
	Число итераций			Число итераций		
	2	1	4	3	1	30
1	-0,011	+0,093	+0,204	-0,011	+0,093	+0,204
2	+0,007	+0,083	-0,156	+0,007	-0,083	-0,156
3	+0,628	+0,723	+0,764	+0,628	+0,723	+0,764
4	0,038	-0,107	-0,213	+0,038	-0,107	+0,213
5	-0,927	+0,852	+0,780	+0,927	-0,853	+0,780
6	-1,273	-1,083	-0,959	-1,273	-1,083	-0,959
7	-0,392	0,576	0,733	-0,392	0,576	0,733
8	-0,524	-0,634	-0,712	-0,524	-0,634	-0,712

Таким образом, использование адаптивного метода уравнивания (метода L_p -оценок) для целей геодезии позволяет видоизменить в зависимости от статистических свойств ошибок измерений требование, предъявляемое к условию, при котором выполняется уравнивание. Получаемые при этом оценки будут несмещенными, состоятельными и эффективными, а сам алгоритм, включающий статистический анализ, согласование теоретического и эмпирического распределений ошибок и вычисление оценок, достаточно просто реализуемым на ЭВМ.

Список литературы: 1. Мониц И. И. Единый алгоритм составления условий уравниваний в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофото съемка, 1980, вып. 35. 2. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. — М.: Сов. радио, 1976. 3. Fletcher R., Grant J. A., Hebden M. D. The calculation of linear best L_p -approximations. — Computer Journal, 1971, v. 14, № 3.