

бы. Эффективность ее работы может быть отражена на картах динамики заболеваемости, например, в до- и послепрививочный периоды. Однако такие карты включаются в состав следующей группы карт.

Тематическая группа карт распространения болезней по территории (карты заболеваемости населения) занимает центральное место во всей серии, т. к. эти карты можно использовать для проведения сопряженного анализа с картами предпосылок в целях выявления причин заболеваемости, для разработки профилактических мероприятий по оздоровлению территории и для совершенствования работ сфер здравоохранения. Содержание и показатели этих карт особенно зависят от вида болезни. При картографировании соматических болезней важное значение имеет пол и возраста заболевших, а также их местожительство (город или село), так как эти характеристики влияют на уровень заболеваемости. Для таких карт необходимо рассчитывать показатели заболеваемости среди различных половозрастных групп, отдельных городов и сельских жителей по единицам административного деления территории. При составлении мы использовали способ картограмм (для отражения заболеваемости злокачественными новообразованиями) и поля плотности (для сердечно-сосудистых заболеваний).

При картографировании распространения инфекционных и паразитарных болезней (столбняк, аскаридоз) опробован ряд способов изображения (значковый, ареалов, картограммы, изолиний). Значковый способ незаменим для создания первичных карт — ареалов, кадастровых, которые затем преобразовывались в карты ареалов или полей плотности случаев заболеваний. Граница ареалов, выделенных на основе ступенчатых пунктов, в которых зарегистрированы заболевания, проводилась с известной долей субъективизма, что, следовательно, исказило объективную картину природных очагов болезней. Картограмма заболеваемости столбняком сглаживала очаги, но давала возможность проанализировать изменения заболеваемости в до- и послепрививочный периоды. Такой способ пригоден для картографирования природно-эндемических заболеваний в целях разработки планов проведения профилактических прививок среди населения. Для исследования связей заболеваемости с природными предпосылками особенно плотным значением случаев аскаридоза и столбняка в Украинском Полесье, а также по отдельным областям УССР.

Принципы разработки тематической группы карт оценки и прогноза заболеваний наименее разработаны. В комплексных исследованиях системы с различными форм заболеваний сердечно-сосудистой системы с природными факторами на основе карт полей плотности проведена оценка комплекса природных предпосылок и выявлены ведущие метеорологические факторы. Затем по точкам опорно-информационной сети, расположенным равномерно по территории УССР, составлены уравнения многомерной регрессии с учетом ведущих причинных факторов заболеваний. На основании

полученных результатов определен расчетный показатель уровня заболеваемости в этих же точках, составлена карта изолиний прогнозируемой заболеваемости. Ее сопоставление с картой фактической заболеваемости укажет пути поиска других (в данном случае социально-экономических) факторов, не учтенных в прогнозе. Такой путь решения задач медико-географического прогнозирования предпочтителен.

На основе карт прогноза могут разрабатываться рекомендательные медико-географические карты. Хотя типы рекомендательных медико-географических карт пока не разработаны, можно наметить перспективны создания карт общих рекомендаций по оздоровлению окружающей среды и частных карт рекомендаций по улучшению условий жизни людей и предупреждения эпидемиологически опасных заболеваний. Такие карты могут быть использованы специалистами различных отраслей хозяйства и планируемыми органами. Рекомендательные карты по профилактике и лечению заболеваний непосредственно предназначены для работников здравоохранения.

Рассмотренные примеры разработок карт разных типов по тематике и назначению свидетельствуют о практической значимости системного медико-географического картографирования для решения задач охраны здоровья населения.

Статья поступила в редакцию 10.02.86

УДК 628.425:519.25

Л. К. ВОИСЛАВСКАЯ

### СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТАХ

Предметы и явления местности, плановое положение которых определяется одной точкой, условным называют точечными объектами. К ним относятся: предметы местности, изображаемые на топографических картах немасштабными условными знаками; предметы местности, горизонтальная проекция которых — окружность или правильный многоугольник (кулумбы, беседки, пистеры, башни и т. д.); отметки высот и отметки урезов воды; характеристики малых рек (ширина, глубина и грунт дна).

Перечисленные выше объекты составляют значительную часть содержания топографических карт. Поэтому изучение стохастических закономерностей их размещения — необходимый этап для количественной оценки информационной емкости топографических карт.

Поскольку положение какого-либо точечного объекта нельзя предсказать заранее, число объектов  $k$ , расположенных на том или ином участке, рассматриваем как случайную величину.

Если предположить, что случайная величина  $k$  обладает свойствами стационарности, отсутствием последствии и ординарности, то наиболее вероятной моделью ее распределения будет закон Пуассона [2,4]:

$$P_k(s) = \frac{(\lambda s)^k}{k!} \exp(-\lambda s), \quad (1)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $s$  — площадь участка;  $\lambda$  — параметр, выражающий среднее число объектов на единицу площади.

Исследование фактического распределения точечных объектов выполнено экспериментально на топографических картах масштаба ряда 1:2000—1:100000. Местность, изображенная на средне- и мелкомасштабных картах, равнинная, слабо- и средне-пересеченная с довольно густой речной сетью. Встречаются отдельные небольшие леса и болота. Густота населенных пунктов среднего плана территория на 2/3 застроенная (застройка городская). Рельеф равнинный, слабо расчлененный.

Поле листа карты разделено на одинаковые квадратные или прямоугольные ячейки. В каждой ячейке подсчитывалось число объектов  $k$ . Подсчитанные таким образом количества, записанные в пересеченные строки и столбца, соответствующих положению данной ячейки на листе, образуют матрицу размещения точечных объектов. Одна из них показана на рис. 1.

В результате обработки данных эксперимента установлено, что фактическое размещение точечных объектов по площади подчинено закону Пойа, функция распределения которого выражается рекуррентными формулами [3]

$$P_0(s) = (1 + \beta_s \lambda_s)^{-\frac{1}{\beta_s}}, \quad (2)$$

$$P_k(s) = P_{k-1}(s) \frac{\lambda_s}{1 + \beta_s \lambda_s} \frac{1}{k}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

где  $s$  — площадь ячейки;  $\lambda_s$ ,  $\beta_s$  — параметры. Оценки параметров определены из выражений

$$\hat{\lambda}_s = \frac{\sum n_k k}{n},$$

$$m^2 = \frac{\sum n_k k^2}{n} - \hat{\lambda}_s^2, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$\hat{\beta}_s = \frac{m^2 / \hat{\lambda}_s - 1}{\hat{\lambda}_s}$$

где  $n_k$  — количество ячеек с числом объектов, равным  $k$ ;  $n$  — общее число ячеек в выборке;  $m$  — среднее квадратическое отклонение.

Характеристики распределения точечных объектов, полученные по опытным данным, а также критерии согласия эмпирических и теоретических распределений представлены в таблице.

|   |   |    |    |   |   |    |    |   |    |    |    |   |    |
|---|---|----|----|---|---|----|----|---|----|----|----|---|----|
| 4 | 1 | 4  | 1  | 3 | 0 | 0  | 2  | 0 | 1  | 5  | 5  | 1 | 0  |
| 2 | 0 | 3  | 1  | 7 | 0 | 0  | 0  | 1 | 0  | 4  | 6  | 1 | 1  |
| 0 | 2 | 15 | 3  | 0 | 2 | 15 | 3  | 1 | 1  | 9  | 3  | 1 | 0  |
| 2 | 6 | 4  | 0  | 0 | 2 | 3  | 3  | 0 | 0  | 10 | 5  | 1 | 0  |
| 1 | 9 | 1  | 1  | 1 | 0 | 0  | 1  | 0 | 0  | 6  | 0  | 1 | 0  |
| 1 | 2 | 0  | 0  | 0 | 1 | 9  | 2  | 1 | 0  | 0  | 3  | 1 | 1  |
| 2 | 3 | 0  | 0  | 2 | 0 | 1  | 1  | 5 | 1  | 0  | 0  | 1 | 2  |
| 1 | 0 | 4  | 1  | 3 | 7 | 0  | 2  | 2 | 0  | 1  | 0  | 0 | 1  |
| 0 | 1 | 2  | 0  | 3 | 1 | 2  | 1  | 1 | 0  | 0  | 3  | 0 | 1  |
| 0 | 0 | 1  | 1  | 1 | 7 | 11 | 1  | 0 | 11 | 5  | 3  | 1 | 1  |
| 0 | 2 | 9  | 3  | 1 | 0 | 1  | 0  | 2 | 7  | 2  | 0  | 1 | 1  |
| 1 | 0 | 3  | 15 | 1 | 1 | 2  | 1  | 1 | 2  | 2  | 4  | 2 | 1  |
| 0 | 1 | 6  | 11 | 0 | 0 | 1  | 5  | 2 | 7  | 5  | 10 | 2 | 10 |
| 1 | 0 | 0  | 16 | 0 | 0 | 1  | 1  | 2 | 0  | 6  | 1  | 4 | 6  |
| 1 | 0 | 0  | 1  | 1 | 0 | 10 | 2  | 4 | 9  | 2  | 4  | 3 | 3  |
| 1 | 0 | 0  | 1  | 1 | 0 | 15 | 21 | 2 | 3  | 1  | 2  | 3 | 3  |
| 1 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 | 15 | 21 | 2 | 3  | 1  | 2  | 3 | 3  |
| 2 | 0 | 2  | 1  | 1 | 2 | 7  | 11 | 1 | 2  | 2  | 2  | 6 | 14 |

Рис. 1. Матрица плотности размещения точечных объектов: а — территория с высокой плотностью застройки; б — застроенная и частично застроенная территория; в — территория со средней плотностью контуров; г — территория с малой плотностью контуров.

Чтобы выяснить, почему фактическое размещение точечных объектов подчинено распределению Пойа, а не распределению Пуассона, как это предполагалось ранее, выполнен модельный эксперимент. При помощи (1) смоделированы три идеальных пуассоновские последовательности объемом  $n_1=200$ ,  $n_2=100$ ,  $n_3=50$  с плотностями  $\lambda_1=3$ ,  $\lambda_2=6$ ,  $\lambda_3=9$ , которые затем объединили. При этом оказалось, что объединенная выборка имеет распределение Пойа с параметрами  $\lambda=4,71$ ,  $\beta=0,2078$ . Согласно фактического распределения с теоретическим характеризуется значением  $\chi^2_{1,2}=2,6$ . На

Характеристики распределения точечных объектов на топографических картах различных масштабов

| Характеристики                                        | Участки  |         |         |         |         |         |        |
|-------------------------------------------------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
|                                                       | 1        | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7      |
| Количество объектов                                   | 970      | 791     | 515     | 448     | 666     | 344     | 606    |
| Число ячеек $n$                                       | 210      | 210     | 224     | 289     | 255     | 112     | 100    |
| Площадь ячейки $s$ , км <sup>2</sup>                  | 4        | 2       | 1       | 0,25    | 0,25    | 0,25    | 0,01   |
| Площадь участка, км <sup>2</sup>                      | 840      | 420     | 224     | 72,2    | 63,8    | 28      | 1      |
| Средние плотности                                     |          |         |         |         |         |         |        |
| $\hat{\lambda}_n$ (точек/ячейку)                      | 4,62     | 3,77    | 2,30    | 1,55    | 2,61    | 3,07    | 6,06   |
| $\hat{\lambda}$ (точек/км <sup>2</sup> )              | 1,16     | 1,88    | 2,30    | 6,20    | 10,44   | 12,28   | 606    |
| Эмпирическая дисперсия $m^2$                          | 5,44     | 7,19    | 11,54   | 4,28    | 12,57   | 7,58    | 23,72  |
| $\hat{v}_s$                                           | 0,0387   | 0,2409  | 1,7480  | 1,1339  | 1,4595  | 0,4784  | 0,4808 |
| Критерий согласия $\chi^2$ при числе степеней свободы | 4,0      | 2,6     | 8,3     | 19,3    | 18,9    | 14,2    | 11,2   |
| Масштаб карты                                         | 1:100000 | 1:50000 | 1:50000 | 1:25000 | 1:25000 | 1:10000 | 1:2000 |

основе проведенного эксперимента можно предположить, что в данных условиях, т. е. применительно к размещению точечных объектов, распределение Пойа — стохастическая модель неоднородной выборки, состава ячейки из нескольких пуассоновских последовательностей с различными плотностями.

Действительно, анализ матрицы (см. рис. 1) позволил разделить ее на участки, где распределение точечных объектов согласуется с законом Пуассона. Аналогичные результаты получены и для других топографических карт. Выделение однородных участков проводилось путем визуальной оценки характера местности по карте.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Размещение точечных объектов на топографических картах подчиняется закону Пойа, который в данных условиях

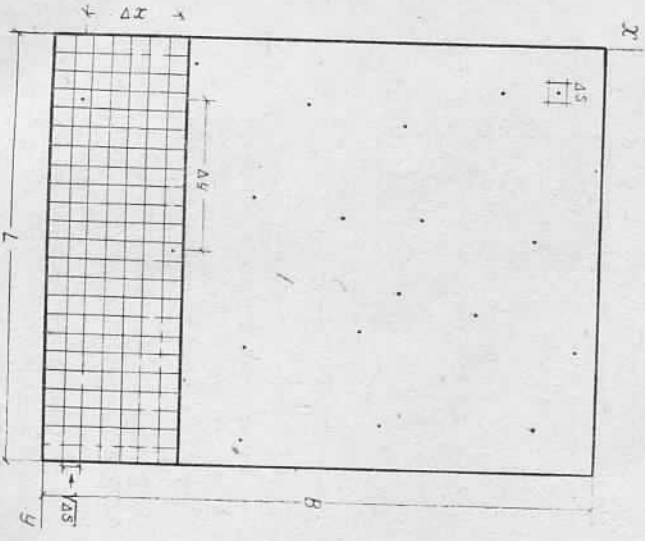


Рис. 2. Квантование и строчная развертка двумерного пространства размещения точечных объектов.

представляет композицию распределений Пуассона на отдельных участках.

2. Закон распределения точечных объектов не зависит от масштаба карты, т. е. он отражает объективные закономерности расположения этих объектов на местности.

3. Параметр распределения  $\lambda$  тесно связан с масштабом карты. Коэффициент корреляции величин  $\ln \lambda$  и  $\ln M$ , где  $M$  — знаменатель численного масштаба карты, равен — 0,97. Между средней плотностью и масштабом карты имеет место зависимость

$$\lambda = AM^{-t},$$

где  $A, t$  — параметры, обусловленные характером местности.

4. Параметр  $\beta$  не зависит от масштаба карты. Он служит мерой неоднородности (нестационарности) размещения объектов по площади.

Таким образом, базовым распределением, характеризующим расположение точечных объектов, является дискретное распределение Пуассона. На его основе получаем производные непрерывные распределения, описывающие взаимное положение объектов, упорядоченных по определенному признаку.

Рассмотрим прямоугольный участок, где точечные объекты распределены с одинаковой плотностью  $\lambda$  (рис. 2). Размеры его стороны обозначим  $B$  и  $L$ . Выделим малую квадратную площадку  $\Delta s$ , в границах которой две точки становятся практически неразличимыми. Площадка  $\Delta s$  — интервал квантования участка по площади, а отношение  $\tilde{n} = s/\Delta s$  дает нам число таких интервалов, содержащихся в площади  $s$ . Запишем выражение (1) в виде

$$P_k(V\sqrt{\Delta s} \tilde{V}\sqrt{\Delta s}) = \frac{(\lambda V\sqrt{\Delta s} \tilde{n} V\sqrt{\Delta s})^k}{k!} \exp(-\lambda V\sqrt{\Delta s} \tilde{n} V\sqrt{\Delta s}). \quad (4)$$

Величина  $l = \tilde{n} V\sqrt{\Delta s}$  представляет длину полосы шириной  $V\sqrt{\Delta s}$ , равную по площади  $s$ . Геометрически это можно представить как разделение участка на полосы-строки с последующей перестановкой начала второй строки в конец первой, начала третьей — в конец второй и т. д. до тех пор, пока весь участок не вытянется в одну линию. Благодаря построенной развертке двумерное распределение (1) можно заменить одномерным

$$P_k(l | V\sqrt{\Delta s}) = \frac{(\tilde{\lambda} l)^k}{k!} \exp(-\tilde{\lambda} l), \quad (5)$$

где  $\tilde{\lambda} = \lambda V\sqrt{\Delta s}$  — среднее число объектов на единицу длины строчной развертки.

Непрерывная случайная величина  $l$  — расстояние между точечными объектами при строчной развертке должна иметь показательное распределение с плотностью вероятностей [4]

$$f(l | V\sqrt{\Delta s}) = \tilde{\lambda} \exp(-\tilde{\lambda} l). \quad (6)$$

Положение точечного объекта определяется координатами  $x$  и  $y$ . Если список объектов расположить по возрастанию абсциссы, то с точностью до малого отрезка  $\sqrt{\Delta s}$  между приращенными координат  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и расстоянием  $l$  имеют место следующие зависимости:

$$\Delta x_{ij} = \begin{cases} \text{Int}(l_{ij}/L), & \text{если } \text{mod}(l_{ij}/L) \leq \frac{L}{2}, \\ \text{Int}(l_{ij}/L) + 1, & \text{если } \text{mod}(l_{ij}/L) > \frac{L}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{ij} &= l_{ij} - \Delta x_{ij} L, \\ l_{ij} &= \Delta x_{ij} L + \Delta y_{ij}, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция  $\text{Int}(a/b)$  — целое число, полученное делением  $a$  на  $b$ ;  $\text{mod}(a/b)$  — остаток этого деления.

Поскольку точечные объекты размещены по площади с одинаковой средней площадью  $\lambda$ , по мере увеличения размеров  $B$  и  $L$  плотность вероятностей абсцисс и ординат приближается к равномерной

$$f(x) = \frac{1}{B}, \quad f(y) = \frac{1}{L}. \quad (8)$$

Приращения  $\Delta y$  как разности равномерно распределенных величин имеют треугольное распределение Симпсона с плотностью вероятностей [1]:

$$f(\Delta y | \text{rang } x) = \begin{cases} \frac{L + \Delta y}{L^2} & \text{при } -L \leq \Delta y \leq 0, \\ \frac{L - \Delta y}{L^2} & \text{при } 0 < \Delta y \leq L, \end{cases} \quad (9)$$

где символ  $\text{rang } x$  означает, что объекты ранжированы по возрастанию  $x$ .

Используя (7), плотность вероятностей  $\Delta x$  можно определить на основании (6) и (9) как распределение функции независимых случайных аргументов  $l$  и  $\Delta y$  [2]:

$$f(\Delta x | \text{rang } x) = \frac{\lambda' \exp(-\lambda' \Delta x)}{1 - \exp(-q)}, \quad (10)$$

где  $\lambda' = \lambda L$  — средняя плотность объектов в расчете на строку длиной  $L$ ;  $q = \lambda L B$  — общее число объектов на участке. Так как при  $q \gg 6$  знаменатель в (10) практически равен единице, распределение приращений  $\Delta x$  асимптотически показательно.

Допустим, строчная развертка участка выполнена вдоль оси  $x$  и объекты ранжированы по возрастанию ординаты. Аналогичным образом можно доказать, что

$$f(\Delta x | \text{rang } y) = \begin{cases} \frac{B + \Delta x}{B^2} & \text{при } -B \leq \Delta x \leq 0, \\ \frac{B - \Delta x}{B^2} & \text{при } 0 < \Delta x \leq B, \end{cases} \quad (11)$$

$$f(\Delta y | \text{rang } y) = \frac{\lambda'' \exp(-\lambda'' \Delta y)}{1 - \exp(-q)}, \quad (12)$$

где  $\lambda'' = \lambda B$ .

Таковы основные стохастические закономерности размещения точечных объектов на топографических картах. В дальнейшем эти закономерности можно использовать для определения энтропии и создания информационной модели точечных объектов.

1. Бородачев Н. А., Абдрашитов Р. М., Веселова И. М. и др. Точность произвольства в машиностроении и приборостроении. М., 1973. 2. Венгцель Е. С. Теория вероятностей. М., 1962. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1973. 4. Румицкий Л. Э. Элементы теории вероятностей. М., 1970.

Статья поступила в редакцию 23.01.86