$$m_Y^2 = \frac{Y^2}{B^2} m_B^2 + \frac{5Y^2}{f^2} m_f^2 + \frac{Y^4}{B^2 f^2} m_p^2 + \frac{Y^4 l^2}{4B^2 f^2} m_\varkappa^2 + \\ + \frac{2Y^4 \sin^2 \varkappa}{B^2 f^2} m_z^2 + \frac{2Y^4}{B^2 f^2} m_{F_x}^2; \tag{4}$$

$$m_z^2 = \frac{Y^2 l^2}{4B^2 f^2} m_B^2 + \frac{2Y^2 l^2}{f^4} m_f^2 + \frac{Y^2 \sin^2 \varkappa}{f^2} m_x^2 + \frac{Y^4 l^2}{4B^2 f^4} m_p^2 + \\ + \frac{Y^4 l^4}{8B^2 f^4} m_\varkappa^2 + \frac{Y^2}{f} m_z^2 + \frac{Y^4 l^2}{2B^2 f^4} m_{F_x}^2 + \frac{Y^2}{f^2} m_{F_z}^2. \tag{5}$$

Анализ (3)—(5) показывает, что максимальное влияние при одинаковых параметрах стереокиносъемки на точность определения координат имеют следующие члены:

$$\frac{Y^2 l}{2B f^2} m_p, \quad \frac{Y^2}{Bf} m_p, \quad \frac{Y^2 l}{2B f^2} m_p, \tag{6}$$

где l — размер киноснимка; m_p — средняя квадратическая ошибка измерения продольного параллакса.

Для дальнейшего анализа установим доминирующие влияния отношений всех членов в выражениях (3)—(5) к своим максимальным согласно (6). Эти отношения для масштабов съемки 1:M 1:2 000—1:4000 и отстояний 250 . . . 500 м находятся в следующих пределах:

для абсцисс

$$\frac{1}{Mm_p} m_B = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}, \quad \frac{1 \cdot 5\,B}{Ym_p} m_f = \frac{1}{10} - \frac{1}{20},$$

$$\frac{2B}{Ml\,m_p} m_x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad \frac{2B}{Mm_p} m_\varkappa = \frac{1}{5} - \frac{1}{10},$$

$$\frac{YB\varkappa}{Mlm_p} m_z = \frac{1}{100} - \frac{1}{200}, \quad \frac{YB}{Mlm_p} m_{F_x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4};$$

для ординат

$$\frac{l}{2Ym_p} m_B = \frac{1}{50} - \frac{1}{100}, \quad \frac{2B}{Ym_p} m_f = \frac{1}{5} - \frac{1}{10},$$

$$\frac{l}{1 \cdot 4\, m_p} m_\varkappa = \frac{1}{10}, \quad \frac{1 \cdot 4\varkappa}{m_p} m_z = \frac{1}{50}, \quad \frac{1 \cdot 4}{m_p} m_{F_x} = 1;$$

для аппликат

$$\frac{1}{Mm_p} m_B = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}, \quad \frac{3B}{Y\,m_p} m_f = \frac{1}{5} - \frac{1}{10},$$

$$\frac{2B\varkappa}{Ml\,m_p} m_x = \frac{1}{150} - \frac{1}{300}, \quad \frac{2}{3m_p} m_\varkappa = \frac{1}{100},$$

$$\frac{2B}{Ml\,m_p} m_z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1 \cdot 5}{m_p} m_{F_x} = 1. \quad \frac{2B}{Ml\,m_p} m_{F_z} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8},$$

Используя полученные соотношения, опустим члены-аргументы в (3)—(5), оказывающие менее трети влияния на функции — ошибки определения координат. Тогда выражения для средних квадратических ошибок определения координат по стереопаре киноснимков можно представить следующим образом:

$$m_X^2 = \frac{Y^2}{f^2} m_x^2 + \frac{Y^4 l^2}{4B^2 f^4} m_p^2 + \frac{5Y^2}{f^2} m_{F_x}^2,$$

$$m_Y^2 = \frac{Y^4}{B^2 f^2} m_p^2 + \frac{2Y^4}{B^2 f^2} m_{F_x}^2,$$

$$m_Z^2 = \frac{Y^2}{f^2} m_z^2 + \frac{Y^4 l^2}{4B^2 f^4} m_p^2 + \frac{Y^4 l^2}{2B^2 f^4} m_{F_x}^2 + \frac{Y^2}{f^2} m_{F_z}^2. \tag{7}$$

Перейдя к масштабу киносъемки M и координатам киноснимка x, z, после преобразования (7) получаем формулы для оценки точности определения координат по стереопаре киноснимков, удобные для практического использования:

$$m_X = M \sqrt{m_X^2 + \frac{x^2}{p^2} m_p^2 + 5m_{F_x}^2},$$

$$m_Y = Mf \sqrt{\frac{1}{p^2} (m_p^2 + 2m_{F_x}^2)},$$

$$m_Z = M \sqrt{m_z^2 + \frac{z^2}{p^2} (m_p^2 + 2m_{F_x}^2) + m_{F_z}^2}.$$

1. *Блюмин М. А.* Учет влияния элементов ориентирования киносъемочных камер // Геодезия и фотограмметрия в горном деле. М., 1981. С. 64—67. 2. *Лобанов А. Н.* Фототопография. М., 1983.

Статья поступила в редколлегию 30. 10. 85

УДК 528.72/73+528.11

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ

УРАВНИВАНИЕ В ФОТОГРАММЕТРИИ С УЧЕТОМ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Проблема ошибок исходных данных в уравнительных вычислениях разрабатывается и дискутируется давно [2, 6] и с обобщением метода наименьших квадратов на зависимые измерения по существу получила свое теоретическое решение. О важности этой проблемы для фотограмметрии отмечалось на многих симпозиумах и встречах, в том числе на Международном фотограмметрическом конгрессе [1]. Ряд объективных обстоятельств пока что не позволяет в полной мере использовать в фотограмметрии мощный аппарат уравнивания зависимых измерений, и главная причина состоит в недостаточном теоретическом освещении проблемы применительно к фотограмметрическим построениям [10, 11].

Используя критерий ничтожных погрешностей, в [8] показаны условия безошибочности исходных данных при решении частных фотограмметрических задач. Вместе с тем углубленное изучение состава исходных данных в фотограмметрии позволяет трактовать исходную систему уравнений поправок [8]

$$v_2 = \Delta z, \qquad v_1 = B\Delta z + A\Delta x + L \tag{1}$$

как один из частных случаев уравнивания в фотограмметрии. Полагая, что читатель ознакомлен с работами [8, 9], отметим, что допущение $B = \pm E$ (E — единичная матрица) позволило исключить процедуру обращения матрицы нормальных уравнений и показать наглядно и просто условия безошибочности исходных данных — координат опорных точек в фототриангуляции.

Прежде всего покажем типы исходных данных в топографической (аэро- и наземной) и прикладной фотограмметрии.

1. Элементы, характеризующие вид проекции (например, для фотоснимка — элементы внутреннего ориентирования и калибровочные параметры).

2. Элементы внешнего ориентирования: углы наклона для снимка, координаты для фотостанции.

3. Координаты опорных точек (планово-высотные, плановые или высотные опорные точки).

4. Данные, относящиеся к фотостанции: расстояния до точек объекта, превышения над точками объекта, горизонтальные углы и направления, вертикальные направления и углы, азимуты направлений на точки объекта.

5. Данные, относящиеся к базису фотографирования: его длина, превышение между фотостанциями, дирекционный угол базиса.

6. Данные, относящиеся к пространству (плоскости) объекта съемки: линейные и угловые величины, характеризующие взаимное положение точек объекта и геометрические характеристики его фигур.

7. Комбинированные данные, полученные в точках объекта для связи «точка объекта—фотостанция» (например, горизонтальные углы, измеренные в точке объекта между направлениями на фотостанцию и другую точку объекта).

Способы получения этих данных весьма многочисленны, а точность зависит от совокупности факторов и априори почти всегда может быть установлена. В обобщенном виде представим их в таблице.

В предположении, что уравнивание ведется параметрическим способом, запишем уравнения поправок для перечисленных типов

исходных данных. Поскольку в качестве определяемых параметров всегда (или почти всегда) выступают координаты определяемых точек, а данные вида расстояний, углов, превышений и т. п. всегда можно выразить через пространственные координаты точек объекта, имеем:

для углов:	$v_\psi = \delta\psi \qquad\qquad\qquad + L_\psi;$	(2)
для координат фотостанций:	$v_S = \delta S \qquad\qquad + L_S;$	(3)
для опорных точек:	$v_\Gamma = \qquad \delta\Gamma + L_\Gamma;$	(4)
для данных, отнесенных к фотостанции		
расстояний:	$v_d = R_d\delta S + P_d\delta\Gamma + L_d,$	(5)
горизонтальных углов:	$v_\beta = R_\beta\delta S + P_\beta\delta\Gamma + L_\beta,$	
вертикальных направлений:	$v_\gamma = R_\gamma\delta S + P_\gamma\delta\Gamma + L_\gamma,$	
превышений:	$v_h = R_h\delta S + P_h\delta\Gamma + L_h,$	
азимутов:	$v_a = R_a\delta S + P_a\delta\Gamma + L_a$	
для данных, отнесенных к базису		
превышений:	$v_{\Delta H} = R_{\Delta H}\delta S + L_{\Delta H},$	(6)
длины базиса:	$v_Б = R_Б\delta S + L_Б,$	
азимута:	$v_\alpha = R_a\delta S + L_\alpha$	
для данных об объекте съемки		
расстояний между точками объекта:	$v_d' = P_d'\delta\Gamma + L_d',$	(7)
горизонтальных углов:	$v_{\beta'} = P_\beta'\delta\Gamma + L_\beta',$	
вертикальных направлений:	$v_\gamma' = P_\gamma'\delta\Gamma + L_\gamma',$	
превышений:	$v_h' = P_h'\delta\Gamma + L_h',$	
азимутов:	$v_a' = P_a'\delta\Gamma + L_a'$	
для комбинированных данных горизонтальных углов:	$v_\beta'' = R_\beta''\delta S + P_\beta''\delta\Gamma + L_\beta''.$	(8)

В случае использования коллинеарной модели объекта для фотограмметрических измерений запишем линеаризованные уравнения

$$v_1 = C_1\delta Э + D_1\delta\psi + R_1\delta S + P_1\delta\Gamma + L_1, \tag{9}$$

где $\delta Э$ — вектор отыскиваемых поправок к элементам проекции; $\delta\psi$ — вектор поправок к углу наклона снимков; δS — вектор поправок к линейным элементам внешнего ориентирования; $\delta\Gamma$ — вектор поправок к пространственным координатам точек; C_1, D_1, R_1, P_1 — частные производные, вид которых всегда известен.

Во всех формулах (2)—(8) свободные члены L_h вычисляют как разности начальных значений искомых величин и измеренных значений. Очевидно, что при их совпадении в начальной итерации (ведь все уравнения (5) —(9) получают линеаризацией соответствующих нелинейных исходных уравнений $L_h = 0$.

Для совокупности уравнений (2)—(9) запишем обобщенную систему уравнений поправок

$$\begin{aligned} v_2 &= F\Delta z \qquad\quad + L_2, \text{ вес } P_2 \\ v_1 &= B\Delta z + A\Delta x + L_1, \text{ вес } P_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Из сопоставления (10) и (1) вытекают частные случаи уравнивания применительно к задачам фотограмметрии.

1. Матрицы $F=E$, если в качестве исходных данных выступают только элементы внешнего ориентирования и опорные точки, т. е. используются уравнения (2)—(4).

2. Матрица $B=\pm E$, если уравнения коллинеарности, а значит, и (9) заменить уравнениями функциональной связи геодезических и пространственных фотограмметрических координат

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^{\Gamma} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}^{\Gamma} + M_{\alpha_0 \omega_0 \varkappa_0} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \lambda \tag{11}$$

и соответствующей им системой уравнений поправок. Тогда из обобщенной модели типа (10) получим модель

$$\begin{aligned} v_2 &= \Delta z \\ v_1 &= \Delta z + A\Delta x + L, \end{aligned} \tag{12}$$

которая в силу указанных в [8] обстоятельств очень удобна для практического использования, несколько позже мы к ней вернемся.

Приведем теперь решение системы (10) по методу наименьших квадратов. Получим систему нормальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} (F^T P_2 F + B^T P_1 B)\,\Delta z + B^T P_1 A\,\Delta x + F^T P_2 L_2 + B^T P_1 L_1 &= 0, \\ A^T P_1 B\;\Delta z + A^T P_1 A\,\Delta x + A^T P_1 L_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Переписав матрицу коэффициентов из (13) в блочном виде

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

и применив для получения матрицы весовых коэффициентов обращение матрицы R по формуле Фробениуса, имеем

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11}^{-1} + R_{11}^{-1} R_{12} N R_{21} R_{11}^{-1} & - R_{11}^{-1} R_{12} N \\ - N R_{21} R_{11}^{-1} & N \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где

$$N = (R_{22} - R_{21} R_{11}^{-1} R_{12})^{-1}. \tag{15}$$

Для уравненного вектора x (отыскиваемых параметров) матрица весовых коэффициентов принимает вид

$$Q_x = N = (A^T P_1 A - A^T P_1 B (F^T P_2 F + B^T P_1 B)^{-1} B^T P_1 A)^{-1}. \tag{16}$$

Таким образом, в фотограмметрии при уравнивании с учетом ошибок данных задача в общем случае сводится к решению нормальных уравнений (13), а для выявления условий безошибочности исходных данных необходимо выполнить обращение матрицы (16). В сложных фотограмметрических задачах, например в фототриангуляции методом связок, это становится достаточно громоздкой вычислительной процедурой и требует использования ЭВМ с памятью на магнитных дисках.

Покажем, что в ряде фотограмметрических построений можно модель (10) свести к (12), не нарушая теоретической строгости уравнительного процесса. Это достигается, если заменить уравнивание измерений уравниванием функций измеренных величин.

Известна фундаментальная теорема переноса ошибок [3]: если при уравнивании Φ — функций измеренных величин x в уравнительный процесс вводится матрица

$$Q_\Phi = A Q_x A^T, \tag{17}$$

где $A = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{ij}$ — совокупность частных производных из $\Phi = \Phi(x)$; Q_x — матрица обратных весов результатов измерений, то уравнивание функций приводит к тем же результатам, что и уравнивание измеренных величин. В работах [4, 5] показано, что при таком подходе метод фототриангуляции из независимых моделей по своей теоретической строгости сопоставим с фототриангуляцией по связкам.

Продемонстрируем сказанное на простом примере. Для решения обратной фотограмметрической засечки по опорным точкам можно применить условие коллинеарности

$$\begin{aligned} x &= -f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}, \\ y &= -f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Линеаризация этих уравнений и предположение о наличии ошибок исходных данных приводит к модели (1). Для той же задачи можно использовать иные формулы [7]:

$$\begin{aligned} X &= X_S + (Z - Z_S)\frac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f}, \\ Y &= Y_S + (Z - Z_S)\frac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f}, \end{aligned} \tag{19}$$

из которых при дополнительном ограничении $Z - Z_S = \mathrm{const}$ получим модель, аналогичную (12). На самом деле, вместо системы (1) имеем

$$\begin{aligned} v_2 &= \Delta z, &&\text{весовая матрица } Q_z, \\ \delta_1 &= \Delta z + D\Delta u + L', &&\text{весовая матрица } Q_\Phi. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь δ_1 — вектор поправок к функциям Φ. В частном случае $\Delta x = \Delta u$, например, в (18), (19) вектор Δu — это вектор искомых поправок к элементам внешнего ориентирования снимка.

Решив систему (20) при условии

$$\delta_1^T Q_\Phi^{-1} \delta_1 + v_2 Q_z^{-1} v_2 = \min, \tag{21}$$

получим систему нормальных уравнений, а из нее подробное выражение для матрицы весовых коэффициентов уравненного вектора u:

$$Q_u^{-1} = D^T Q_ф^{-1} D - D^T Q_ф^{-1} (Q_z^{-1} + Q_ф^{-1}) Q_ф^{-1} D. \quad (22)$$

Для упрощений $P_ф = F$, $P_z = p_z E$ справедливы выводы, приведенные в [8], и процедура обращения матрицы N из (14)—(15) отпадает.

Исходные данные для уравнивания в фотограмметрии

Тип исходных данных	Способы получения данных в фотограмметрии: аэротопографической	наземной топографической	прикладной
Элементы проекции	Калибровка съемочной системы, самокалибровка	Калибровка съемочной системы	Калибровка съемочной системы, самокалибровка
Элементы внешнего ориентирования			
угловые	Инерциальные системы, по снимкам звезд, видимого горизонта, поверхности объекта	Уровни, ориентирные устройства	Уровни, ориентирные устройства, отчетные механизмы, специальные системы
линейные	Навигационные системы, радиогеодезические станции	Геодезические определения	Геодезические определения, механические и физические средства и методы
Координаты опорных точек	Геодезические определения, топокарта, привязка прошлых лет, фототеодолитная съемка	Геодезические определения, топокарта, архивные данные, аэрофотограмметрия	Геодезические определения, механические и физические средства и методы, тест-объекты
Измерения в фотостанции	Радиовысотомер, лазерный дальномер	Геодезические измерения (расстояния, углы, превышения)	Геодезические измерения, специальные средства и методы
Данные, отнесенные к базису	Статоскоп	Геодезические измерения и определения	Геодезические, механические и физические средства
Данные об объекте съемки	Геодезические измерения и определения (расстояния, углы, превышения), фототеодолитная съемка, топокарта	Геодезические измерения и определения, аэрофотограмметрия топокарта	Топокарта, геодезические, механические и физические средства и методы, геометрические характеристики фигур, тест-объекты
Комбинированные данные	—	Геодезические измерения	Геодезические измерения, физические средства и методы

Предложенный алгоритм дает особенно ощутимые преимущества при использовании исходных данных, отнесенных к фотостанции, базису и объекту съемки, так как объем вычислений резко сокращается.

1. *Антипов И. Т., Крылов Н. А., Неумывакин Ю. К., Нехин С. С.* На XV Конгрессе международного общества фотограмметрии и дистанционного зондирования // Геодезия и картография. 1985. № 1. С. 49—53. 2. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений М., 1977. 3. *Златанов Г.* Електронно-исчислителна техника в геодезиста. София, 1979.

4. *Дорожинский А. Л., Гринюк М. Я.* Уравнивание функций коррелированных измерений // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1980. Вып. 31. С. 127—130. 5. *Дорожинский А. Л., Тумская О. В., Гринюк М. Я.* Уравнивание фототриангуляции их независимых моделей с учетом функциональных координатных связей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1984. Вып. 40. С. 143—149. 6. *Кемниц Ю. В., Власов В. Д.* Теория и методы математической обработки геодезических измерений // Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка. 1978. Вып. 14. С. 6—76. 7. *Куштин И. Ф., Лысков Г. А.* Фотограмметрия снимка и стереоскопических моделей. М., 1984. 8. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982. 9. *Маркузе Ю. И.* Обобщенный параметрический способ уравнивания, рекуррентная формула и коллокация // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 4. С. 3—14. 10. *Тюфлин Ю. С.* Способы стереофотограмметрической обработки снимков, полученных с подвижного базиса. М., 1971. 11. *Финаревский И. И.* Уравнивание аналитической фототриангуляции. М., 1976.

Статья поступила в редколлегию 05. 02. 86

УДК 528.711.1

Е. И. СМИРНОВ

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОПОРНЫХ ТОЧЕК ПРИ ФОТОТЕОДОЛИТНОЙ СЪЕМКЕ

От точности определения исходных координат опорных точек в значительной степени зависит надежность дальнейших стереофотограмметрических построений. Для предрасчета необходимой и достаточной точности определения пространственных координат опорных точек, практически не влияющих на положение их изображений на снимках, воспользуемся известным условием коллинеарности

$$x = f\frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)},$$
$$z = f\frac{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}, \quad (1)$$

где x, z — измеренные координаты опорных точек на фототеодолитном снимке; f — фокусное расстояние камеры; a_i, b_i, c_i — направляющие косинусы, являющиеся функциями от угловых элементов внешнего ориентирования снимка; X, Y, Z — пространственные координаты опорных точек; X_s, Y_s, Z_s — пространственные координаты передней узловой точки камеры.

Для упрощения дальнейших вычислений будем считать, что угловые элементы внешнего ориентирования близки к нулю, тогда $a_1 = b_2 = c_3 = 1$, $a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$. В этом случае условия (1) примут вид

$$x = f\frac{X - X_S}{Y - Y_S} = f\frac{L_X}{L_Y},$$