УДК 523.3

П. М. ЗАЗУЛЯК, А. Л. ЦЕРКЛЕВИЧ

АППРОКСИМАЦИЯ СЕЛЕНОПОТЕНЦИАЛА СОВОКУПНОСТЬЮ ТОЧЕЧНЫХ МАСС С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В последнее время при описании гравитационных полей наряду с традиционным разложением потенциала по шаровым функциям широкое распространение получило его представление с помощью потенциалов совокупности точечных масс. Самый удобный и наиболее легко реализуемый способ определения параметров точечных масс состоит в равномерном их распределении на поверхности сферы оптимального радиуса, причем значения масс точечных источников вычисляются из решения несовместной системы линейных уравнений по методу наименьших квадратов.

Ниже рассмотрено построение многоточечных моделей гравитационного поля Луны с использованием методики, описанной в [2]. Эта методика в отличие от указанного выше подхода не сводится к непосредственному решению систем уравнений, из которых определяют параметры точечных масс.

Разобъем тело Луны на N сферических пирамид, вершины которых совпадают с центром ее масс, а основания оконтурены линиями координатной сетки в соответствии с равномерной разграфкой *. Считая внешний гравитационный потенциал Луны заданным в виде гармонических коэффициентов $\bar{c}_{nm}$, $\bar{s}_{nm}$ модели селенопотенциала, точечную массу, выраженную в долях массы Луны, определим по формуле

$$m_i = \omega_i \Delta\delta_i / 4\pi\, \delta_0, \tag{1}$$

где

$$\Delta\delta_i = \delta_0 \left[(R_i/R_0)^3 - 1 \right]; \tag{2}$$

$$R_i = R_0/\omega_i \left[1 + \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=0}^{n} (\bar{a}_{nm} \bar{A}_{nm} + \bar{b}_{nm} \bar{B}_{nm}) \right]; \tag{3}$$

$$\left.\begin{matrix} \bar{a}_{nm} \\ \bar{b}_{nm} \end{matrix}\right\} = \frac{2n+1}{3} \left\{\begin{matrix} \bar{c}_{nm} \\ \bar{s}_{nm} \end{matrix}\right. ; \tag{4}$$

$$\left.\begin{matrix} \bar{A}_{nm} \\ \bar{B}_{nm} \end{matrix}\right\} = \int\limits_{\omega_i} \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \left\{\begin{matrix} \cos m\lambda\, d\omega \\ \sin m\lambda\, d\omega. \end{matrix}\right. \tag{5}$$

Здесь δ_0 и R_0 — средние плотность и радиус Луны; $d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\lambda$ — элемент площади единичной сферы; ω_i = площадь основания i-й пирамиды; $\bar{a}_{nm}$, $\bar{b}_{nm}$ — коэффициенты разложения рельефа однородной планеты; $\bar{P}_{nm}(\cos\vartheta)$ — нормированные присоединенные функции Лежандра ϑ, λ — полярное расстояние и долгота.

Предположим, что массы пирамид m_i сосредоточены в центрах их оснований и находятся на некотором радиусе $\rho_i = R_i/R_0$ от центра масс Луны. Вычисляем эти радиусы в два этапа, используя метод одномерной оптимизации. Сначала найдем значение оптимального радиуса сферы $\rho = R^{\text{оп}}/R_0$ из условия

$$\sum_{j=1}^{N} [\Delta\bar{N}_j - \Delta N_j^{\text{т}}(\rho)]^2 = \min, \tag{6}$$

где $\Delta\bar{N}_j$ и $\Delta N_j^{\text{т}}(\rho)$ — значения ондуляций уровенной поверхности, вычисляемые для j-й точки, находящейся в центре основания j-й пирамиры, по формулам

* Возможна равновеликая или произвольная разграфка в соответствии с выраженными экстремумами поля силы тяжести.

$$\Delta \bar{N}_j = \frac{R_0}{\omega_i} \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=0}^{n} (\bar{a}_{nm} \bar{A}_{nm} + \bar{b}_{nm} \bar{B}_{nm}); \tag{7}$$

$$\Delta N_j^{\text{т}}(\rho) = \frac{fM_{☾}}{g_0} \sum_{i=1}^{N} m_i (1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos \psi_i)^{-1/2}. \tag{8}$$

Здесь ψ_i — угол между радиусами R_0 и ρ; m_i — масса i-го точечного источника в единицах массы Луны; g_0 — среднее значение

Таблица 1

Модель точечных масс селенопотенциала (*МТМ*-73), $R^{оп}=1510$ км

№ п/п	Масса m_i в ед. $fM_{☾}=4902{,}64$	Радиус $\rho_i=R_i/R_0$	№ п/п	Масса m_i в ед. $fM_{☾}=4902{,}64$	Радиус $\rho_i=R_i/R_0$
1	—0,181064E—01	0,8521	38	—0,127351E—01	0,8810
2	—0,219053E—01	0,9066	39	—0,131381E—01	0,8720
3	—0,233050E—01	0,9028	40	0,829935E—01	0,8507
4	—0,137795E—01	0,8704	41	0,355437E—01	0,8616
5	—0,931361E—02	0,8530	42	0,155077E+00	0,8475
6	—0,153017E—01	0,8702	43	—0,670235E—02	0,4063
7	—0,295941E—01	0,9027	44	0,141501E+00	0,8485
8	—0,266545E—01	0,9124	45	—0,407190E—01	0,8337
9	—0,262436E—01	0,8964	46	0,235355E—01	0,8505
10	—0,218817E—01	0,8772	47	0,522808E—01	0,8375
11	—0,140357E—01	0,8342	48	0,235168E—01	0,8900
12	—0,229665E—01	0,9050	49	0,850302E—02	0,8744
13	0,481175E—02	0,8846	50	—0,373345E—02	0,9542
14	—0,404634E—01	0,8716	51	—0,339032E—01	0,8951
15	0,127211E—01	0,7708	52	0,710729E—02	0,4063
16	—0,323910E—01	0,8725	53	—0,155627E—01	0,8954
17	—0,431675E—01	0,8583	54	—0,450871E—01	0,8777
18	—0,259589E—02	0,9397	55	—0,990074E—01	0,8747
19	—0,266342E—01	0,8774	56	—0,412629E—01	0,8807
20	—0,255339E—01	0,8848	57	0,185304E—01	0,8043
21	—0,518697E—01	0,8837	58	—0,292554E—03	0,4063
22	—0,237328E—01	0,9026	59	—0,411947E—01	0,8682
23	0,625461E—02	0,9413	60	—0,112931E—01	0,8194
24	0,279288E—01	0,9007	61	—0,183416E—01	0,8462
25	0,679098E—01	0,8540	62	—0,130469E—01	0,8194
26	0,102651E—01	0,8521	63	—0,223582E—01	0,8924
27	—0,197563E—01	0,7949	64	—0,126584E—01	0,6975
28	0,314929E—01	0,8803	65	—0,242043E—01	0,8842
29	0,155714E—02	0,9872	66	—0,263457E—01	0,8950
30	0,971370E—01	0,8583	67	—0,358219E—01	0,9124
31	0,446315E—01	0,8889	68	—0,281473E—01	0,8858
32	0,971191E—01	0,8655	69	—0,146931E—01	0,4610
33	—0,800455E—02	0,8681	70	—0,134625E—01	0,8630
34	—0,257874E—01	0,8534	71	—0,186677E—01	0,8869
35	0,572785E—01	0,8695	72	—0,216467E—01	0,9012
36	0,608368E—01	0,8880	73	1,000000	0,0
37	0,877019E—01	0,8531			

Примечание. Полярные координаты точечных масс заданы по равномерной сетке через 30°. Координаты первой точечной массы $\nu=15°$, $\lambda=24°$.

Многоточечная модель селенопотенциала (*МТМ*-163), $R^{оп}$=1590 км

№ п/п	Масса m_i в ед. $fM_{☾}$=4902.64	Радиус $\rho_i=R_i/R_0$	№ п/п	Масса m_i в ед. $fM_{☾}$=4902,64	Радиус $\rho_i=R_i/R_0$
1	—0,441170E—02	0,9574	53	0,943434E—01	0,9064
2	—0,298720E—02	0,4064	54	—0,241244E—02	0,4064
3	—0,307883E—02	0,9954	55	0,713607E—01	0,9158
4	—0,512286E—02	0,6132	56	—0,117680E—01	0,8681
5	—0,612643E—02	0,9872	57	0,259773E—01	0,8921
6	—0,470895E—02	0,4064	58	0,357112E—02	0,7948
7	—0,221057E—02	0,9954	59	—0,241713E—01	0,9025
8	—0,166423E—02	0,4064	60	0,209228E—01	0,9003
9	—0,409439E—02	0,9921	61	0,214292E—01	0,8857
10	—733709E—02	0,8038	62	0,739031E—02	0,9224
11	—0,918826E—02	0,9744	63	0,290546E—01	0,9158
12	—0,922683E—02	0,8828	64	—0,215092E—02	0,4064
13	—0,857704E—02	0,9632	65	0,543809E—01	0,9305
14	—0,841074E—02	0,8352	66	0,248668E—01	0,9125
15	—0,746811E—02	0,9714	67	—0,141376E—01	0,9059
16	—0,536478E—02	0,4064	68	—0,137521E—01	0,9230
17	—0,478087E—02	0,9921	69	—0,874909E—02	0,9221
18	—0,514752E—02	0,4064	70	0,149136E—01	0,9158
19	—0,116669E—01	0,9732	71	0,452856E—01	0,9158
20	—0,169210E—01	0,9124	72	0,184051E—02	0,9827
21	—0,312676E—0	0,9230	73	0,218219E—01	0,9060
22	—0,267653E—01	0,9204	74	—0,822733E—03	0,4063
23	—0,889846E—02	0,9217	75	—0,152683E—01	0,8334
24	—0,154812E—01	0,9302	76	—0,195779E—02	0,9423
25	—0,171270E—01	0,9299	77	0,893128E—02	0,9158
26	—0,169834E—01	0,9239	78	0,623732E—01	0,9036
27	—0,154214E—01	0,9244	79	— 0,948238E—03	0,4064
28	—0,214610E—01	0,9300	80	0, 413029E—01	0,9459
29	—0,289660E—01	0,9284	81	0,861659E—01	0,9079
30	—0,336132E—01	0,9280	82	0,134497E—01	0,9220
31	—0,250711E—01	0,9305	83	0,631408E—01	0,9077
32	—0,136989E—01	0,9307	84	0,532550E—01	0,9158
33	—0,124707E—01	0,9281	85	0,103804E—01	0,8929
34	—0,123499E—01	0,9229	86	0,838276E—02	0,8195
35	—0,223125E—01	0,9158	87	—0,729281E—02	0,8781
36	—0,263406E—01	0,9220	88	0,207763E—01	0,9041
37	0,160761E—01	0,9223	89	0,217229E—01	0,9125
38	—0,167233E—03	0,4064	90	0,375082E—01	0,9003
39	—0,212285E—01	0,9158	91	0,459081E—01	0,9076
40	0,327480E—01	0,8970	92	0,262490E—01	0,9073
41	—0,938756E—02	0,9191	93	—0,102863E—01	0,9125
42	—0,129959E—01	0,9211	94	—0,304005E—01	0,9004
43	—0,184464E—01	0,9198	95	0,306141E—01	0,9066
44	—0,192677E—02	0,9504	96	0,117323E—01	0,9364
45	0,750035E—02	0,8973	97	—0,683281E—03	0,4064
46	—0,630566E—02	0,9223	98	0,488660E—01	0,9322
47	—0,296504E—02	0,9365	99	0,567413E—01	0,9044
48	0,656961—03	0,4064	100	—0,216614E—01	0,9071
49	—0,187763E—01	0,9591	101	0,364556E—01	0,9076
50	—0,198707E—01	0,9213	102	0,548228E—01	0,9066
51	—0,938362E—02	0,9315	103	—0,395686E—01	0,8997
52	—0,183590E—01	0,9065	104	0,236091E—02	0,9007

Продолжение табл.

№ п/п	Масса m_i в ед. $fM_{☾}=4902{,}64$	Радиус $\rho_i=R_i/R_0$	№ п/п	Масса m_i в ед. $fM_{☾}=4902{,}64$	Радиус $\rho_i=R_i/R_0$
105	0,114088E—01	0,9062	134	—0,567092E—02	0,9368
106	0,302104E—01	0,8968	135	—0,267625E—01	0,9302
107	0,648278E—02	0,8617	136	—0,370813E—01	0,9306
108	0,151814E—01	0,9125	137	—0,300222E—01	0,9311
109	0,205200E—01	0,9125	138	—0,188654E—01	0,9310
110	0,456048E—02	0,9248	139	0,273394E—02	0,9492
111	0,153572E—02	0,4064	140	—0,371414E—02	0,7355
112	—0,243056E—01	0,9339	141	—0,177204E—01	0,9401
113	0,975968E—02	0,8974	142	—0,145899E—01	0,9213
114	0,721862E—02	0,8994	143	—0,128427E—01	0,9191
115	—0,827627E—02	0,9194	144	—0,162105E—01	0,9191
116	—0,900292E—02	0,8760	145	—0,465512E—02	0,9313
117	—0,246214E—01	0,9183	146	—0,415902E—02	0,8584
118	—0,544558E—01	0,9194	147	—0,516069E—02	0,9666
119	—0,177709E—01	0,9195	148	—0,561643E—02	0,8215
120	—0,201669E—01	0,9075	149	—0,388688E—02	0,9793
121	—0,104098E—01	0,9062	150	—0,463464E—02	0,4063
122	0,334254E—01	0,9124	151	—0,729251E—02	0,9872
123	—0,285958E—02	0,8228	152	—0,771868E—02	0,7708
124	—0,189464E—01	0,9071	153	—0,785244E—02	0,9827
125	—0,143915E—01	0,9071	154	—0,840479E—02	0,8837
126	0,718564E—02	0,9225	155	—0,872062E—02	0,9666
127	—0,203642E—01	0,9219	156	—0.874825E—02	0,9010
128	—0,128622E—01	0,9211	157	—0,678904E—02	0,9504
129	—0,602512E—02	0,9282	158	—0,328833E—02	0,4063
130	—0,195211E—01	0,9276	159	—0,128372E—02	0,9954
131	—0,111373E—01	0,9284	160	—0,223502E—02	0,4064
132	—0,968421E—02	0,9280	161	—0,426697E—02	0,9921
133	—0,140007E—01	0,9281	162	—0,509964E—02	0,9591
			163	1,000000	0,0

Примечание. Полярные координаты σ, λ точечных масс заданы через 20°. Координаты первой точечной массы σ=10°, λ=19°.

силы тяжести. Затем вычислим значения радиуса $\rho_i=R_i/R_0$ для каждой точечной массы при условии, чтобы разность значений высот уровенных поверхностей, определенных по (7) и (8) (в последней формуле вместо ρ подставляем ρ_i), была минимальной в метрике C, т. е.

$$\inf_{0,4\leq\rho_i<1}\ \max_{1\leq i\leq N}\left|\Delta\bar{N}_i-\Delta N^T(\rho_i)\right|. \qquad (9)$$

Отметим здесь, что при вычислении радиуса-вектора ρ_i i-й точечной массы все другие точечные массы модели располагаются по одной сфере оптимального радиуса ρ.

С целью исследования влияния изменения числа точечных масс в многоточечной модели на точность аппроксимации селенопотенциала построено две модели, параметры которых приведены в табл. 1 и 2. В качестве исходной информации использовали значения fM $=4902{,}64$ км³/с², $R_0=1738{,}0$ км, $\delta_0=3{,}343$ г/см³ и гармонические коэффициенты $\bar{c}_{nm}$, $\bar{s}_{nm}$ модели Биллс, Феррари *(БФ,* 16×16) [3]. Разбивка тела Луны на пирамиды осуществлялась по равномерной разграфке: для модели *МТМ* — 73 через 30° по широте φ и долготе λ, для *МТМ*—163 через 20° по φ и λ.

Построенные модели оценивали в сравнении с исходной моделью селенопотенциала по результатам прогнозирования орбит имитационных ИСЛ и по значениям разностей высот уровенных поверхностей. При определении положения имитационного ИСЛ в поле сил притяжения, задаваемых моделями (БФ, 16×16) и *МТМ*, критерием оценки моделей точечных масс служило расхождение Δs_{ij}, вычисляемое по формуле

$$\Delta s_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}, \tag{10}$$

где

x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j — соответственно координаты спутника, полученные по моделям (*БФ*, 16×16) и *МТМ*.

Таблица 3

Значения Δs_{ij}, км

Модели селенопотенциала	*БФ* (16x16)	*МТМ*-73	*МТМ*-163	*БФ* (8x8)
Спутник S_1 ($H=50$ км)				
БФ (16×16)	0,0			
МТМ-73	0,72	0,0		
МТМ-163	0,87	0,80	0,0	
БФ (8×8)	2,40	1,74	2,15	0,0
Спутник S_2 ($H=100$ км)				
БФ (16×16)	0,0			
МТМ-73	0,44	0,0		
МТМ-163	0,74	0,58	0,0	
БФ (8×8)	1,67	1,32	1,46	0,0
Спутник S_3 ($H=250$ км)				
БФ (16×16	0,0			
МТМ-73	0,27	0,0		
МТМ-163	0,19	0,14	0,0	
БФ (8×8)	1,12	1,31	1,20	0,0

В табл. 3 даны значения расхождений Δs_{ij} в положении имитационных ИСЛ после 0,125 сут. полета по круговой наклонной орбите ($i=70°$) на высотах 50, 100, 250 км в поле сил тяготения, задаваемых сравниваемыми моделями селенопотенциала. Для оценки возможных значений расхождений Δs_{ij} в табл. 3 приведены также значения Δs_{ij}, полученные из сравнения обсуждаемых моделей и модели Биллса и Феррари усеченной до восьмого порядка (*БФ*, 8×8). Как видно из табл. 3, сравнительная оценка многоточечных моделей селенопотенциала по результатам вычисления элементов орбит имитационных ИСЛ позволяет определенно установить степень их согласованности с исходной моделью (*БФ*, 16×16). Значения Δs_{ij}, рассчитанные по сравниваемым моделям (*БФ*, 16×16) и МТМ, заметно меньше, чем Δs_{ij}, вычисленные по моделям (*БФ*, 16×16) и (*БФ*, 8×8). Таким образом, модели *МТМ* с приемлемой точностью могут заменить модель (*БФ*, 16×16) при прогнозировании орбит ИСЛ. При этом время, необходимое для вычислений прогнозируемой орбиты ИСЛ, значительно уменьшается.

Выполним теперь сравнительный анализ обсуждаемых моделей селенопотенциала по результатам вычисленных значений разностей уровенных поверхностей. В табл. 4 приведены значения среднеквадратических разностей высот уровенных поверхностей, полученных соответственно на множестве точек, находящихся в центрах оснований сферических пирамид, разделяющих тело Луны (первая колонка), в узлах десятиградусной селенографической разграфки (вторая колонка), по осредненным в трапециях ($\overline{30}\times\overline{30}°$ и $\overline{20}\times\overline{20}°$) значениям высот и дискретным значениям этих величин, определенных в центрах трапеций (третья колонка). В четвертой колонке таблицы для оценки влияния сглаживания высот уровенной поверхности по упомянутым трапециям даны среднеквадратические разности высот, вычисленные по моделям *(БФ,* 16×16) аналогично расчетам для третьей колонки.

Рассматривая таблицу, обратим внимание на то, что обнаруживается тенденция в уменьшении среднеквадратических разностей высот уровенных поверхностей в зависимости от увеличения числа точечных масс или уменьшения размеров оснований сферических пирамид. Таким образом, подтверждается вывод [1], что при аппроксимации гравитационного поля планеты совокупностью потенциалов точечных масс точность повышается с увеличением числа точечных масс. Однако, судя по данным табл. 3, определенной закономерности в значениях Δs_{ij} в зависимости от числа точечных масс в моделях МТМ не обнаруживается. Это дает основание сделать вывод, что при построении моделей точечных масс для целей прогнозирования орбит ИСЛ необходимы другие критерии оценки модели в процессе определения ее параметров, а возможно и другой подход в их вычислении. Описание гравитационного поля планеты совокупностью потенциалов точечных масс имеет неконструктивный характер, выражающийся прежде всего в невозможности построения универсальной модели. Следовательно, необходимо подбирать алгоритм и выполнять построение модели точечных масс с учетом конкретной цели ее применения.

Таблица 4

Среднеквадратические разности высот уровенных поверхностей, полученных по сравниваемым моделям селенопотенциала

(*БФ*, 16x16) — (*МТМ*—73)			(*БФ*, 16x16)—(*БФ*, 16x16) интегральное-дискретное
σ (30×30°), м	σ (10×10°), м	σ ($\overline{30}\times\overline{30}$°), м	σ (30×30°), м
44	77	27	37
(*БФ*, 16x16)—(*МТМ*—163)			(*БФ*, 16x16)—(*БФ*, 16x16) интегральное-дискретное
σ (20×20°), м	σ (10×10°), м	σ ($\overline{20}\times\overline{20}$°), м	σ (20×20°), м
38	55	22	32

1. *Марченко А. Н.* О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1982. № 3. С. 51—57. 2. *Церклевич А. Л., Волжанин С. Д.* Об одном методе построения модели точечных масс гравитационного поля планеты // Письма в Астрономический журнал. 1984. Т. 10. № 7. С. 549—553. 3. *Bills B. G., Ferrari A. J.* A harmonic analysis of lunar gravity // J. Geophys. Res. 1980, V. 85. № 2. P. 1013—1025.

Статья поступила в редколлегию 14. 04. 86