УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МОЛОДЕНСКОГО С УЧЕТОМ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ

Основная задача современной теории фигуры Земли, созданной М. С. Молоденским, как известно, состоит в определении физической поверхности Земли s и ее внешнего гравитационного поля по значениям геопотенциала и силы тяжести g на этой же поверхности. Использование нормального гравитационного поля, создаваемого уровенным земным эллипсоидом вращения, приводит к внешней краевой задаче для возмущающего потенциала T, являющегося гармонической и регулярной на бесконечности функцией. Граничное условие в этой задаче представляет собой соотношение

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}-\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\frac{T}{\gamma}\right)_s=\Delta g \qquad (1)$$

между потенциалом T и смешанной аномалией силы тяжести $\Delta g=g-\gamma$ на поверхности s, полученное без учета малых величин порядка квадрата уклонения отвеса и квадрата аномалии высоты $\zeta=T/\gamma$. Здесь ν — направление, обратное направлению нормальной силы тяжести γ. В этой линейной постановке задачи краевая поверхность s отождествляется с ее первым приближением (теллуроидом) s', т. е. с поверхностью, получаемой путем наслоения нормальных высот h на эллипсоид.

Так как поверхность s' близка к отсчетному эллипсоиду, то для решения задачи наиболее эффективен метод малого параметра, предложенный М. С. Молоденским [7]. Согласно основной идее метода здесь должно использоваться решение для более простой поверхности, принимаемой за отсчетную, т. е. решение задачи Стокса с погрешностью порядка квадрата сжатия Земли, полученное в [2, 6, 9].

Принимая во внимание, что в формулах Д. В. Загребина, М. С. Молоденского и О. М. Остача, полученных в указанных работах, выделяется решение для сферы радиуса, равного большой полуоси эллипсоида, попытаемся наметить путь решения задачи исходя из более простого граничного условия

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'}+\frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho' \to \rho}=\Delta g+\delta g, \tag{2}$$

приводящего в случае сферы к интегралу Стокса. Здесь ρ' — радиус-вектор внешней точки $P=P(\rho', \theta, \lambda)$; ρ — радиус-вектор поверхности s и δg — поправки к аномалиям Δg, уточняющие хорошо известное приближенное условие

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'}+\frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho' \to \rho}=\Delta g, \tag{3}$$

используемое при сферической поверхности отсчета и выполнении решения с погрешностью порядка сжатия Земли.

С целью получения формулы, определяющей поправки δg, найдем $\left.\frac{\partial T}{\partial \rho'}\right|_s$ и $\left.\frac{2T}{\rho'}\right|_s$ с точностью, соответствующей выводу условия (1). Из определения возмущающего потенциала как разности реального W и нормального U потенциалов силы тяжести следует, что

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \rho'}\right|_s=-g\cos(n,\rho)+\gamma_s\cos(\nu,\rho),$$

где через n обозначено направление, обратное направлению силы тяжести g и γ_s — значение нормальной силы тяжести на поверхности s. Определяя $\cos(n, \rho)$ из сферического треугольника, образованного направлениями ρ, n и ν в точках поверхности s, с требуемой точностью находим

$$\cos(n,\rho)=1-\frac{1}{2}\Delta B^2-\Delta B\xi,$$

где ξ — составляющая гравиметрического уклонения отвеса в плоскости меридиана; $\Delta B=B-\Phi=\alpha\sin 2\Phi$ — разность геодезической B и геоцентрической Φ широт точки; α — сжатие Земли. Следовательно,

$$\cos(\nu,\rho)=1-\frac{1}{2}\Delta B^2 \text{ и } \left.\frac{\partial T}{\partial \rho'}\right|_s=-g+\gamma_s+g\alpha\xi\sin 2\Phi.$$

После перехода от γ_s к значениям γ нормальной силы тяжести на поверхности s', при котором использованы разложения этой силы и ее вертикальной производной в ряд Тейлора по степеням высот ζ и h, а также значения производных

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\right)_0 = -\frac{2\gamma_e}{a}\left[1+\alpha+q-\left(3\alpha-\frac{5}{2}q\right)\sin^2\Phi\right],$$

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\nu^2}\right)_0 = \frac{6\gamma_m}{R^2}$$

на отсчетном эллипсоиде, где q — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести на экваторе γ_e; a — большая полуось эллипсоида; γ_m и R — средние значения γ и радиуса Земли, имеем

$$-\frac{\partial T}{\partial\rho'}\bigg|_s = \Delta g + \left\{\frac{2\gamma_e}{a}\left[1+\alpha+q-\left(3\alpha-\frac{5}{2}g\right)\sin^2\Phi\right]- -\frac{6\gamma_m h}{R^2}\right\}\zeta-\gamma_m\alpha\xi\sin 2\Phi. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что

$$\rho = a(1-\alpha\sin^2\Phi)+h,$$

$$\gamma = \gamma_e\left[1+\left(\frac{5}{2}q-\alpha\right)\sin^2\Phi-\frac{2h}{a}\right] \quad \text{и} \quad T=\gamma\zeta,$$

находим

$$-\frac{2T}{\rho'}\bigg|_s = -\frac{2\gamma_e}{a}\left(1+\frac{5}{2}q\sin^2\Phi-\frac{3h}{a}\right)\zeta. \quad (5)$$

Приравнивая сумму правых частей равенств (4) и (5) к правой части соотношения (2), получаем

$$\delta g = \frac{2\gamma_m\zeta}{R}\left(\alpha+q-3\alpha\sin^2\Phi\right)-\gamma_m\alpha\xi\sin 2\Phi. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что для вычисления поправок δg требуются значения высот квазигеоида и уклонений отвеса с точностью порядка α. Это соответствует решению задачи в сферической аппроксимации, т. е. решению, выполненному методом малого параметра с использованием приближенного граничного условия (3) без учета эллипсоидальности Земли в высотах рельефа поверхности s', отсчитываемых от сферы [7, 1, 3, 8].

При определении возмущающего потенциала с учетом сжатия Земли должны быть сохранены все величины в его первом приближении $T=T_0+T_1$, содержащие высоты рельефа поверхности s'. Этому требованию удовлетворяют формулы, полученные в [4, 5]. После введения поправок (6) они имеют вид

$$T_0 = \frac{R^2}{4\pi}\int Gs(\rho_0', \psi)\,d\omega, \quad (7)$$

$$T_1 = -\frac{R^2}{4\pi}\int\left(\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)_0\left(H-\frac{R}{\rho_0}\tilde{H}\right)s(\rho_0', \psi)\,d\omega+T_0\frac{\tilde{H}}{\rho_0'}, \quad (8)$$

где $R=a+\Delta a$ — средний радиус Земли; $G=\Delta g+\delta g$;

$H=\rho-R=a(1-\alpha\sin^2\Phi)+h-R$; $\bar{H}$ — значение высоты H в исследуемой точке $\rho=R+z$; z — радиальное расстояние от поверхности s до названной выше точки;

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)_0=\frac{1}{2\pi R}\int(G-\tilde{G})\frac{d\omega}{r^3}-\frac{2G}{R},$$

где $\bar{G}$ — значение G в данной точке; $r=2\sin\frac{\psi}{2}$.

На основании изложенного выше можно заключить, что основное значение поправок δg (6) определяется начальными приближениями $\zeta=\zeta_0$ и $\xi=\xi_0$, вычисленными для поверхности Земли по аномалиям силы тяжести Δg, т. е. по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса. Наибольшее практическое значение может иметь совместный учет поправок δg в нулевом приближении решения T_0 (7) и сжатия α в высотах H, входящих в T_1 (8).

1. *Бровар В. В.* О решении краевой задачи Молоденского // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1963. Вып. 4. С. 129—137. 2. *Загребин Д. В.* Теория регуляризированного геоида // Тр. ИТА. 1952. № 1. С. 87—222. 3. *Марыч М. И.* О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1969. Вып. 10. С. 17—27. 4. *Марыч М. И.* Об определении внешнего гравитационного поля Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 36. С. 68—74. 5. *Марыч М. И.* О методе Молоденского решения его краевой задачи // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 67—73. 6. *Молоденский М. С.* Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1956. Вып. 112. С. 3—8. 7. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Тр ЦНИИГАиК. 1960. Вып. 131. С. 1—251. 8. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия. М., 1983. 9. *Остач О. М.* Решение задачи Стокса для эллипсоидальной граничной поверхности методом функции Грина // Сб. научных трудов ЦНИИГАиК. 1982. Вып. 233. С. 3—20.

Статья поступила в редколлегию 23. 04. 86