

$H = r - R = a(1 - \sin^2 \Phi) + h - R$; H — значение высоты H в исследуемой точке $r = R + z$; z — радиальное расстояние от поверхности s до названной выше точки;

$$\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int (G - \tilde{G}) \frac{d\omega}{r^3} - \frac{2G}{R},$$

где \tilde{G} — значение G в данной точке; $r = 2 \sin \frac{\psi}{2}$.

На основании изложенного выше можно заключить, что основное значение поправок δg (6) определяется начальными приближениями $\zeta = \zeta_0$ и $\xi = \xi_0$, вычисленными для поверхности Земли по аномалиям силы тяжести Δg , т. е. по формулам Стокса и Вининг-Мейнеса. Наибольшее практическое значение может иметь местный учет поправки δg в нудевом приближении решения T_0 (7) и сжатия a в высотах H , входящих в T_1 (8).

1. Бровар В. В. О решении краевой задачи Молоденского // Изв. вузов. Геология и аэрофотосъемка. 1963. Вып. 4. С. 129—137. 2. Захарьин Д. В. Теория регулярного геоида // Тр. ИГА. 1952. № 1. С. 87—222. 3. Марш М. И. О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала // Геология, картография и аэрофотосъемка. 1969. Вып. 10. С. 17—27. 4. Марш М. И. Об определении внешнего гравитационного поля Земли // Геология, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 36. С. 68—74. 5. Марш М. И. О методе Молоденского решения его краевой задачи // Геология, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 67—73. 6. Молоденский М. С. Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1956. Вып. 112. С. 3—8. 7. Молоденский М. С., Ережнев В. Ф., Юркин М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1960. Вып. 131. С. 1—251. 8. Морцу Г. Современная физическая геодезия. М., 1983. 9. Остай О. М. Решение задачи Стокса для эллипсоидальной границы поверхности методом функции Грина // Сб. научных трудов ЦНИИГАиК. 1982. Вып. 233. С. 3—20.

Статья поступила в редакцию 23. 04. 86

УДК 528.412

В. В. МИЛДЕР

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТВОРНЫХ ТОЧЕК ЗДАНИЯ В КАЧЕСТВЕ ИСХОДНЫХ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ

Широкое применение на практике микрокалькуляторов позволяет проводить вычисления быстро и непосредственно в полевых условиях, что делает более эффективным использование, например, способа обратной угловой геодезической засечки для определения координат точек местности. Все же существенным недостатком являются необходимые трудозатки на расчеты [4]. Но их можно сократить путем упрощения рабочих формул, что как раз и имеет место при наблюдении плановых геодезических пунктов.

которые размещены вдоль одного створа (рис. 1). Тогда справедливы соотношения

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{d_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta_1 - d \cdot \operatorname{ctg} \beta}{d_2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{d_2 \cdot \operatorname{ctg} \beta_2 - d \cdot \operatorname{ctg} \beta}{d_1};$$

$$\Delta x_{1,c} = \frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2}; \quad \Delta y_{1,c} = \Delta x_{1,c} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1;$$

$$\Delta y_{2,c} = \Delta x_{1,c} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad \text{где } \beta = \beta_1 + \beta_2; \quad d = d_1 + d_2.$$

Если $d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$, то

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \beta_1 - 2 \operatorname{ctg} \beta; \quad \operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \beta_2 - 2 \operatorname{ctg} \beta.$$

На точность засечки влияет расположение определяемого места относительно базисов d_1 и d_2 , а также длины последних. Пер-

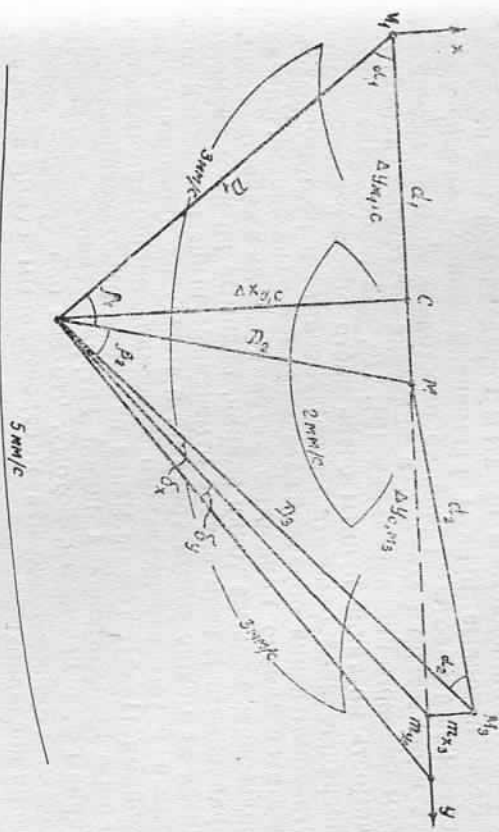


Рис. 1. Обратная засечка при наблюдении створных точек.

вая зависимость показана на рис. 1 кривыми линиями, в чьих пределах точность постоянна, а вторая приведенными ниже данными:

$d_1 = d_2, \text{ м}$	20	50	100	20	50	100
$\Delta x_{1,c}, \text{ м}$						
при $\Delta y_{1,c} = \Delta y_{2,c}, \text{ м}$						
$M_1/M_2, \text{ мм/с}$	0,24	0,69	3,09	0,70	0,79	1,13

На основании этих представлений можно находить ожидаемые ошибки в координатах искомой точки M , проектировать по точности и размерам сеть и предвычислять ошибки измерения углов. В настоящее время на стенах существующих зданий и сооружений часто закрепляют пункты плановой основы, выносят следы

строительных осей. После проведения исполнительных съемок становится известным пространственное положение выверенных конструкций. Все это вместе может служить геодезическим обоснованием для обратных засечек в предлагаемом варианте, если наблюдаемые пункты найдутся в одной вертикальной плоскости стены. Причем ошибки их положения искажают измеремые углы следующим образом:

$$\delta_x = \frac{D}{D} m_x \cdot \cos \alpha_i; \quad \delta_y = \frac{D}{D} m_y \cdot \sin \alpha_i, \quad (i = 1, 2),$$

где δ_x и δ_y — значения ошибок в угле β_i , вызванные соответственно ошибкой m_y в длине базиса и отклонением m_x исходного пункта от заданного створа; D — расстояние от этого пункта к инструменту; $r = 206265''$. Отсюда следует, что влияние ошибок планового обоснования на результаты увеличивается с приближением к наблюдаемым пунктам определяемой точки.

Если исходные пункты размещены внизу здания, т. е. на удобном для работы уровне, то расстояния d_1 и d_2 можно измерить вдоль стены рулеткой, а значение неустойчивости найти способом бокового нивелирования [2]. Но, как показывает практика, видимость на такие пункты очень часто обеспечивается только в непосредственной близости их от теодолита и поэтому эффективность применения обратной засечки заметно снижается. Указанный недостаток можно полностью устранить, если в качестве исходных использовать верхние точки здания, видимые по всем возможным направлениям. В этом случае отменные выше измерения производятся не между этими точками, а между их проекциями, полученными путем вертикального снесения, например, известными способами [1—3]. Тем не менее из опыта работ установлено, что подобные проектирования порой затруднительны по различным причинам и, в частности, потому, что все они требуют линейной привязки стоянки теодолита к строительным осям, а значит и наличия последних.

В данной статье предложено несколько практических приемов вертикального проектирования, простых в своем исполнении и более удобных применительно для нашей ситуации. Их суть состоит в том, что с двух точек, расположенных примерно на одинаковом расстоянии от стены и над которыми последовательно центрируют теодолит, в коллимационной плоскости сносят на низ верхнюю точку O (рис. 2). Полученный таким образом отрезок $O_1O_2 = a$ замеряют линейкой.

Искомые величины l_{y_1} , l_{y_2} и l_x вычисляются из уравнений

$$l_x = \frac{a}{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2}; \quad l_{y_1} = l_x \cdot \operatorname{ctg} \gamma_1; \quad l_{y_2} = l_x \cdot \operatorname{ctg} \gamma_2,$$

а контролем служит равенство $l_{y_1} + l_{y_2} = a$.
Отложив с одной из построенных проекций навстречу другой соответствующее им расстояние l_{y_1} или l_{y_2} , найдем проекцию точ-

ки O плоскостью, перпендикулярной плоскости стены, которая и клона относительно вертикали на величину l_x .

Таким образом, точность координирования верхних точек здания зависит от ошибок вертикального проектирования, отложившая отрезка l_{y_1} или l_{y_2} , бокового нивелирования, измерения базисов и вычисления. Поскольку все это, кроме последней, подробно рассмотрены в литературе [2], есть смысл остановиться только на ошибке вычисления, которая в свою очередь зависит от способа

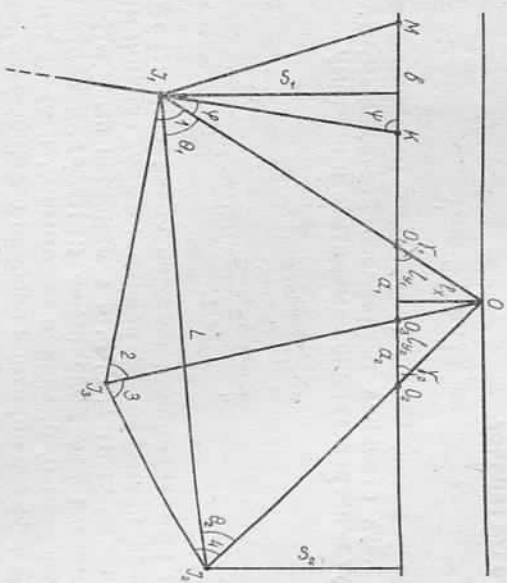


Рис. 2. Способы вертикального снесения верхней стеной точки.

нахождения углов γ_1 и γ_2 . Так, дифференцируя последние равенства и переходя к средним квадратическим ошибкам с учетом того, что $\gamma_i \approx 45^\circ$, будем иметь формулы точности определения величин l_{y_1} и l_{y_2} ($i=1, 2$), т. е.

$$m_{l_x}^2 = \frac{m_a^2}{4} + \frac{a^2}{2r^2} \cdot m_{\gamma_1}^2; \quad m_{l_{y_i}}^2 = \frac{m_a^2}{4} + \frac{3a^2}{2r^2} \cdot m_{\gamma_i}^2.$$

Углы γ_i можно найти различными путем, например, описанным выше способом обратной засечки, где ошибка вычисления составит $m_{\gamma_i}^2 = 3m_{\beta_i}^2$.

Если же навести на отдаленный геодезический пункт P (х_P, у_P) зрительную трубу теодолита и, переведя ее через зенит, отметить на стене след K этого направления, то, измеряя угол и расстояние b от метки K к существующей марке M с координатами x_M, y_M , искомое значение угла γ_1 можно получить из выражения

$$\gamma_1 = \psi - \varphi; \quad \operatorname{ctg} \psi = \frac{\Delta y_{M,P} + b}{\Delta x_{M,P}}$$

строительных осей. После проведения исполнительных съемок становится известным пространственное положение выверяемых конструкций. Все это вместе может служить геодезическим обоснованием для обратных засечек в предлагаемом варианте, если наблюдаемые пункты находятся в одной вертикальной плоскости стены. Причем ошибки их положения искажают измеряемые углы следующим образом:

$$\delta \alpha_i = \frac{D}{D} m_x \cdot \cos \alpha_i; \quad \delta \gamma_i = \frac{D}{D} m_y \cdot \sin \alpha_i, \quad (i = 1; 2),$$

где $\delta \alpha_i$ и $\delta \gamma_i$ — значения ошибок в угле β_i , вызванные соответственно ошибкой m_y в длине базиса и отклонением m_x исходного пункта от заданного створа; D — расстояние от этого пункта к инструменту; $r = 206265''$. Отсюда следует, что влияние ошибок планового обоснования на результат увеличивается с приближением к наблюдаемым пунктам определяемой точки.

Если исходные пункты размещены внизу здания, т. е. на удобном для работы уровне, то расстояния d_1 и d_2 можно измерить вдоль стены рулеткой, а значение нестворности найти способом бокового нивелирования [2]. Но, как показывает практика, видимость на такие пункты очень часто обеспечивается только в непосредственной близости их от теодолита и поэтому эффективность применения обратной засечки заметно снижается. Указанный недостаток можно полностью устранить, если в качестве исходных использовать верхние точки здания, видимые по всем возможным направлениям. В этом случае отмеченные выше измерения производятся не между этими точками, а между их проекциями, полученными путем вертикального снесения, например, известными способами [1—3]. Тем не менее из опыта работ установлено, что подобные проектирования порой затруднительны по различным причинам и, в частности, потому, что все они требуют линейной привязки стоянки теодолита к строительным осям, а значит и наличия последних.

В данной статье предложено несколько практических принципов вертикального проектирования, простых в своем исполнении и более удобных применительно для нашей ситуации. Их сущность состоит в том, что с двух точек, расположенных примерно на одинаковом расстоянии от стены и над которыми последовательно центрируют теодолит, в коллимационной плоскости сносят на низ верхнюю точку O (рис. 2). Полученный таким образом отрезок $O_1O_2 = a$ замеряют линейкой.

Искомые величины l_{y_1} , l_{y_2} и l_x вычисляют из уравнений

$$l_x = \frac{a}{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2}; \quad l_{y_1} = l_x \cdot \operatorname{ctg} \gamma_1; \quad l_{y_2} = l_x \cdot \operatorname{ctg} \gamma_2,$$

а контролем служит равенство $l_{y_1} + l_{y_2} = a$.

Отложив с одной из построенных проекций навстречу другой соответствующее им расстояние l_{y_1} или l_{y_2} , найдем проекцию точ-

ки O плоскостью, перпендикулярной плоскости стены, которая наклонена относительно вертикали на величину l_x .

Таким образом, точность координирования верхних точек здания зависит от ошибок вертикального проектирования, отложения отрезка l_{y_1} или l_{y_2} , бокового нивелирования, измерения базисов и вычисления. Поскольку все они, кроме последней, подробно рассмотрены в литературе [2], есть смысл остановиться только на ошибке вычисления, которая в свою очередь зависит от способа

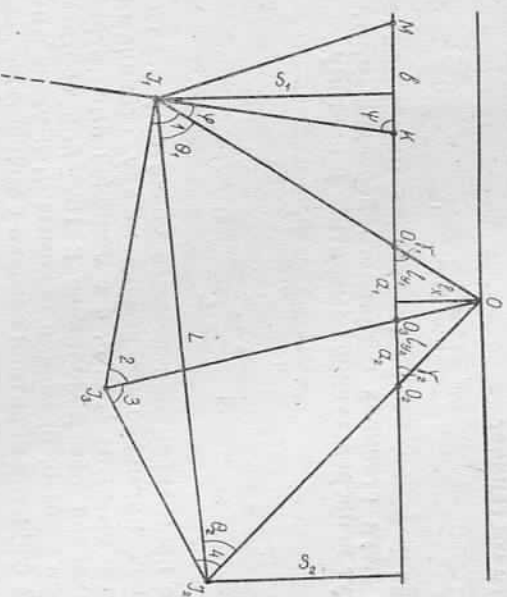


Рис. 2. Способы вертикального снесения верхних стеной точек.

нахождения углов γ_1 и γ_2 . Так, дифференцируя последние равенства и переходя к средним квадратическим ошибкам с учетом того, что $\gamma_i \approx 45^\circ$, будем иметь формулы точности определения величин l_{y_1} и l_{y_2} ($i = 1, 2$), т. е.

$$m_{l_x}^2 = \frac{m_a^2}{4} + \frac{a^2}{2\rho^2} \cdot m_{\gamma_1}^2; \quad m_{l_{y_1}}^2 = \frac{m_a^2}{4} + \frac{3a^2}{2\rho^2} \cdot m_{\gamma_1}^2.$$

Углы γ_i можно найти различным путем, например, описанным выше способом обратной засечки, где ошибка вычисления составит $m_{\gamma_i}^2 = 3m_{\beta_i}^2$.

Если же навести на отдаленный геодезический пункт P (x_p, y_p) зрительную трубу теодолита и, переведя ее через зенит, отметить на стене след K этого направления, то, измерив угол ψ и расстояние b от метки K к существующей марке M с координатами x_m, y_m , искомое значение угла γ_1 можно получить из выражений

$$\gamma_1 = \psi - \varphi; \quad \operatorname{ctg} \psi = \frac{\Delta y_{M,P} + b}{\Delta x_{M,P}}$$

со средней квадратической ошибкой

$$m_{r_1} = \frac{r^2}{\Delta x_{M,P}^2} \cdot \sin^2 \psi (m_{\Delta x_{M,P}}^2 + \sin^2 \psi \cdot m_b^2) + m_s^2.$$

Угол γ_2 вычисляем по известному γ_1 и измеренным Θ_1 и Θ_2 углам:

$$\gamma_2 = \Theta_1 + \Theta_2 - \gamma_1,$$

а ошибка его составляет

$$m_{\gamma_2}^2 = 2m_{\Theta_1}^2 + m_{\Theta_2}^2.$$

Соблюдая условие, чтобы расстояние между инструментом и стеной при двух стоянках оставалось постоянным, т. е. $S_1 = S_2$, углы γ_i будут непосредственно измеряться и поэтому

$$m_{\gamma_1}^2 = m_{\Theta_1}^2 + \eta^2,$$

где

$$\eta = \frac{S_1 - S_2}{L} \cdot \rho.$$

В случае проектирования верхней точки еще и со станции I_3 расположенной примерно посредине между станциями I_1 и I_2 , измерения при этом углы 1, 2, 3, 4 с ошибкой m_1 и отрезки a_1, a_2 , а также вычисляя как дополнение к 180° для соответствующих треугольников углы 5, 6, можно искомым γ_1 и γ_2 найти по приведенной выше формуле обратной засечки с точностью

$$m_{\gamma_1}^2 = 6m_1^2.$$

Как показали практические исследования, хорошо согласуются с теоретическими выводами, все рассмотренные способы определения положения верхних точек здания примерно одного класса точности с известными [1—3] и преимуществом каждого из них выявляется только в конкретной обстановке на строительной площадке.

Описанные в статье все приемы, позволяющие в совокупности находить координаты точек местности, выполиняли систематически при строительстве промышленного предприятия на насыпном грунте, из-за которого плановое обоснование было закреплено только стенными знаками, и оказались во многих случаях самыми эффективными по сравнению с другими видами работ для достижения подобных целей.

1. Андриченко А. М. Проверка вертикальности колонн // Геодезия и картография. 1984. № 5. С. 29—30. 2. Левчук Г. П., Новик В. Е., Конисов В. Г. Прикладная геодезия. Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ. М., 1981. 3. Миллер В. В. Выверка конструкций по вертикали // Геодезия и картография. 1982. № 4. С. 23—24. 4. Справочник геодезиста. М., 1975.

Статья поступила в редакцию 24.02.86

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ДВУХГРУППОВОГО УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

В [1] изложена теория двухгруппового уравнивания коррелированных величин. В основу положен классический подход, основанный на преобразовании коэффициентов основных уравнений второй группы. Ниже предложен вывод формул для оценки точности уравненных функций.

Согласно теории [1], основные уравнения в геодезической сети разделяются на две группы:

$$aV + w_a = 0; \quad (1)$$

$$aV + w_a = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad w_a = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix},$$

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{bmatrix}, \quad w_a = \begin{bmatrix} w_{s+1} \\ w_{s+2} \\ \vdots \\ w_{s+r} \end{bmatrix},$$

В первой группе (1) основных уравнений s , во второй (2) количество основных уравнений равно t . Решая уравнения первой группы на основе обобщенного метода наименьших квадратов, получаем первичные поправки

$$V' = -Qa^r (aQa^r)^{-1} w_a, \quad (3)$$

где Q — корреляционная матрица измерений (без постоянного множителя). Вторичные поправки вычисляем по формуле

$$V'' = -QAr (AQA^r)^{-1} W, \quad (4)$$

где A, W — коэффициенты условного уравнения второй группы (2), преобразованные следующим образом:

$$A = a - aQa^r (aQa^r)^{-1} a; \quad (5)$$

$$W = w_a - aQa^r (aQa^r)^{-1} w_a. \quad (6)$$

Окончательные поправки в измеренные величины определяем по формуле

$$V = V' + V''. \quad (7)$$

Далее надо произвести оценку точности. Вычисляя вес уравненной функции F , весовую функцию dF принято относить к урав-