УДК 528.11

Л. А. МАСАЛЬЦЕВ, А. А. РЕМИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК СУММОЙ И РАЗНОСТЬЮ РАССТОЯНИЙ

Появление новых приборов, методов измерений и внедрение более мощных вычислительных средств позволяет расширить количество традиционных в геодезии способов определения положения точек за счет включения в ряд измеряемых величин, например, суммы и разности расстояний между определяемыми и исходными пунктами. Рассмотрим некоторые из них.

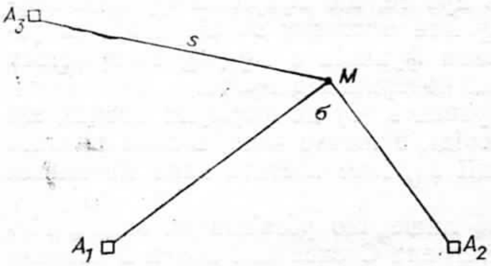

Рис. 1. Схема определения положения точки М расстоянием s и суммой расстояний $\sigma = A_1MA_2$.

1. Пусть для определения пункта $M(x, y)$ измерено расстояние s до известного пункта $A_3(x_3, y_3)$ и суммарное расстояние σ между известными пунктами $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$через тот же определяемый пункт M (рис. 1). Нужно найти решение системы двух уравнений относительно неизвестных x и y:

$$(x_3-x)^2+(y_3-y)^2=s^2 \tag{1}$$

$$\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}+\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}=\sigma.$$

Поскольку система уравнений нелинейная, ее решение ищем приближением. Введем параметризацию окружности:

$$x=x_3+s\cos t,$$
$$y=y_3+s\sin t, \tag{2}$$

где t — значение дирекционного угла из пункта A_3 на точку M. Подставив (2) во второе уравнение системы (1), получим уравнение относительно t:

$$F(t)=\sqrt{(x_2-x_3-s\cos t)^2+(y_2-y_3-s\sin t)^2}+$$
$$+\sqrt{(x_1-x_3-s\cos t)^2+(y_1-y_3-s\sin t)^2}-\sigma=0. \tag{3}$$

Это уравнение решаем методом пошаговой прогонки с шагом H.

Находим интервал $[nH, (n+1)H]$, на концах которого функция-различитель $F(t)$ имеет разные знаки. Приближенное значение корня t_0 вычисляем по значениям функций $F(nH)$ и $F((n+1)H)$:

$$t_0 = nH - \frac{F(nH)}{F((n+1)H) - F(nH)} \cdot H. \tag{4}$$

Затем по формулам (2) определяем координаты искомого пункта M. Процесс решения реализован в виде программы на языке PL/I.

Запишем область погрешностей положения определяемого пункта M, исходя из ошибок в результатах измерений.

Как известно, каждая ошибка измерения Δ_i вызывает смещение линии положения на величину $m_i = \Delta_i / g_i$ по направлению α_i, нормальному к ней, где g_i — модуль градиента результата измерения. Случайные ошибки измерений вызывают направленные перемещения линий положения (так называемые векториальные ошибки по Гельвиху *).

Для описания области погрешностей определяемого пункта нужно найти их суммарное воздействие по некоторому направлению φ

$$M_c^2 = \Sigma m_i^2 \cos^2(\alpha_i - \varphi)$$

и ему ортогональному

$$M_s^2 = \Sigma m_i^2 \sin^2(\alpha_i - \varphi).$$

Их сумма постоянна и равна $M_c^2 + M_s^2 = \Sigma m_i^2$, поэтому существует такое направление u, при котором одна из составляющих максимальна, в то время как ортогональная ей минимальна, составляющее

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\Sigma m_i^2 \sin 2\alpha_i}{\Sigma m_i^2 \cos 2\alpha_i} \tag{5}$$

Приведя направление исходных ошибок к u, положив $\alpha_i' = \alpha_i - u$, получаем значения этих экстремумов:

$$M_{\max}^2 = \Sigma m_i^2 \cos^2 \alpha_i', \quad M_{\min}^2 = m_i^2 \sin^2 \alpha_i', \tag{6}$$

$$\Sigma m_i^2 \sin 2\alpha_i' = 0 \quad \text{(контроль)}.$$

По ним можно вычислить ошибку по любому направлению γ из выражения $M_\gamma^2 = M_{\max}^2 \cos^2\gamma + M_{\min}^2 \sin^2\gamma$, которое представляет из себя уравнение подеры.

Оценим параметры области погрешностей в данном случае. Векториальная ошибка расстояния имеет направление α_s, сов-

---

* *Сомов Г. Е.* Градиенты и линии положения в геодезии. М., 1967.

падающее с направлением измерения. Модуль градиента расстояния составляет $|g_s|=1$, следовательно, $m_s=\Delta_s$. Модуль и направление векториальной ошибки второй длины σ определим в канонической системе координат эллипса. Исходя из того, что уравнение касательной в точке $M(x_M, y_M)$ имеет вид

$$b^2 x_M x + a^2 y_M y = a^2 b^2, \text{ или } \frac{x_M x}{a^2} + \frac{y_M y}{b^2} - 1 = 0,$$

для направления градиента можно записать

$$\gamma_\sigma = \operatorname{arctg} \frac{a^2 y_M}{b^2 x_M}.$$

Для вывода формулы модуля градиента исходим из уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$$

или с учетом того, что $\sigma = 2a$:

$$\frac{4x^2}{\sigma^2} + \frac{4y^2}{\sigma^2 - 4c^2} - 1 = 0.$$

Частные производные от σ по направлениям координатных осей составляют:

$$\sigma'_x = -F'_x / F'_\sigma = \frac{16 x^2 \sigma b^4}{16 x^2 b^4 + y^2 \sigma^4},$$

$$\sigma'_y = -F'_y / F'_\sigma = \frac{4 y \sigma^3 b^2}{16 x^2 b^4 + y^2 \sigma^4}.$$

Теперь

$$|g_\sigma|^2 = \sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 = \frac{16 \sigma^2 b^4}{16 x^2 b^4 + y^2 \sigma^4}.$$

Отсюда, учитывая, что $\sigma = 2a$, имеем

$$|g_\sigma| = \frac{4 b^2 \sigma}{\sqrt{16 x^2 b^4 + y^2 \sigma^4}} = \frac{2ab^2}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}. \qquad (7)$$

С учетом радиуса кривизны эллипса

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{ab}$$

найдем, что $|g_\sigma| = \dfrac{2ab}{\sqrt[3]{Rab}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{p}{R}}$, где $p = \dfrac{b^2}{a}$ — фокальный параметр эллипса. В вершинах эллипса на большой оси, где $R = \frac{b^2}{a} = p$, $|g_\sigma| = 2$, а в вершинах на малой оси, где $R = \frac{a^2}{b}$, $|g_\sigma| = 2\frac{b}{a}$;

Используем еще одно выражение для радиуса кривизны $R = p/\cos^3 t$, где t — угол между нормалью к касательной в точке касания и одним из радиусов-векторов в точке касания, т. е. нормаль является биссектрисой угла φ, образованного радиусами-векторами точки касания, так как $|g_\sigma| = 2\cos t$. Поэтому можно записать также $|g_\sigma| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$. Причем направление градиента совпадает с направлением биссектрисы угла φ: $\alpha_\sigma = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, где α_i — направления радиусов-векторов.

Теперь направление u максимальной ошибки положения определяемой точки имеет вид

$$u = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{m_s^2 \sin 2\alpha_s + m_\sigma^2 \sin 2\alpha_\sigma}{m_s^2 \cos 2\alpha_s + m_\sigma^2 \cos 2\alpha_\sigma}. \tag{8}$$

Приведя направления ошибок (градиентов) относительно u

$$\alpha_s' = \alpha_s - u, \quad \alpha_\sigma' = \alpha_\sigma - u,$$

найдем экстремальные значения области погрешностей:

$$\begin{aligned} M_{\max}^2 &= m_s^2 \cos^2 \alpha_s' + m_\sigma^2 \cos^2 \alpha_\sigma', \\ M_{\min}^2 &= m_s^2 \sin^2 \alpha_s' + m_\sigma^2 \sin^2 \alpha_\sigma'. \end{aligned} \tag{9}$$

Используем следующий факт: экстремумы функции

$$F(\varphi) = \cos^2\varphi + l^2\cos^2(\varphi - \varphi_0)$$

на интервале изменения $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ достигаются в четырех точках, соответствующих направлениям главных осей области погрешностей, и составляют:

$$F_{\max} = \frac{1 + l^2 + \sqrt{1 + 2l^2\cos 2\varphi_0 + l^4}}{2},$$

$$F_{\min} = \frac{1 + l^2 - \sqrt{1 + 2l^2\cos 2\varphi_0 + l^4}}{2},$$

Представив $l = m_\sigma/m_s$, $\varphi_0 = \alpha_s - \alpha_\sigma$, получим

$$M_{\max}^2 = \frac{m_s^2}{2}(1 + l^2 + \sqrt{R}), \quad M_{\min}^2\, \frac{m_s^2}{2}(1 + l^2 - \sqrt{R}), \tag{10}$$

где $R=1+2\cdot l^2\cos 2\varphi_0+l^4$. Представление $l=m_\sigma/m_s$ удобно при электромагнитных измерениях, точность результатов которых слабо зависит от длины линии, поэтому можно считать, что всегда $l=1$, о чем свидетельствует приведенный ниже пример.

Пример. Для определения положения пункта P измерены расстояния s_{3p} и σ_{2p1} светодальномером ЕОК2000, для которого $m_s=(1+1{,}5\cdot 10^{-5}\,s)$ см. Положение пунктов характеризуется координатами (рис. 2):

	1	2	3	P
x	1000	1000	2000	1600
y	2500	1000	1500	2100

При этом имеем $s_{3p}=720$ м, $\sigma_{2p1}=1970$ м, $\alpha_s=123{,}7°$, $\alpha_\sigma=193{,}8°$. Отсюда $l=m_\sigma/m_s=1$, $\varphi_0=-70{,}1°$, $R=0{,}46$, далее

$$M^2_{\max}=\frac{1\text{ см}}{2}(2+0{,}68),\quad M^2_{\min}=\frac{1\text{ см}}{2}(2-0{,}68),$$

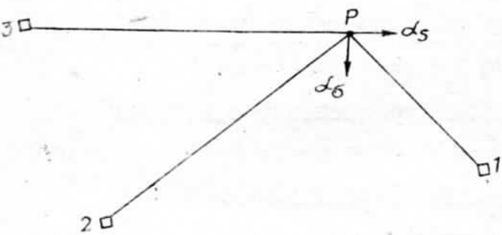

Рис. 2. Градиенты расстояния α_s и суммы расстояний α_σ.

следовательно, $M_{\max}=1{,}2$ см, $M_{\min}=0{,}8$ см.

2. Рассмотрим задачу о нахождении координат $(x,\ y)$ неизвестного пункта P по заданным координатам пунктов А1 $(x_1,\ y_1)$, А2 $(x_2,\ y_2)$ и сумме расстояний $\sigma=\text{A1P}+\text{A2P}$, а также по заданным координатам пунктов А3 $(x_3,\ y_3)$, А4 $(x_4,\ y_4)$ и модулю разности расстояний $r=|\text{A3P}-\text{A4P}|$.

Математически задача сводится к решению нелинейной системы уравнений относительно $(x,\ y)$. Геометрически это точки пересечения эллипса с фокусами в точках А1 и А2 с гиперболой с фокусами в точках А3 и А4:

$$\begin{gathered}\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}+\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}=\sigma\\ \left|\sqrt{(x_3-x)^2+(y_3-y)^2}-\sqrt{(x_4-x)^2+(y_4-y)^2}\right|=r\end{gathered}\qquad(11)$$

Из геометрической интерпретации решения следует, что задача может иметь от пустого множества до четырех различных решений. Эти решения находим приближенными методами. Введем параметризацию эллипса

$$\begin{aligned}x&=x_0+a\cos t,\\ y&=y_0+b\sin t,\end{aligned}\qquad(12)$$

где $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ — координаты центра эллипса; полуоси эллипса соответственно $a = \sigma/2$ (большая полуось),

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}.$$

Подставив x и y из (12) во второе уравнение системы (11), получим нелинейное уравнение относительно

$$F_1(t) = \left|\sqrt{(x_3 - x_0 - a\cos t)^2 + (y_3 - y_0 b \sin t)^2} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{(x_4 - x_0 a \cos t)^2 + (y_4 - y_0 - b\sin t)^2}\right| - R = 0. \quad (13)$$

Данное уравнение решаем методом пошаговой прогонки с шагом H. Находим интервал $[nH, (n+1)H]$, на концах которого функция $F_1(t)$ имеет разные знаки. Вычисляем значения $F_1(nH)$ и $F_1((n+1)H)$. В качестве приближенного решения берем значение

$$t_0 = nH - F_1(nH) \cdot H / (F_1((n+1)H) - F_1(nH)). \quad (14)$$

Затем находим координаты неизвестного пункта $P(x, y)$ по формулам (12). Вычисляем по программе четыре дирекционных угла, под которыми виден пункт P из точек $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Для решения засечки составлена программа на языке PL/I.

Как ранее установлено, направление и модуль градиента суммы расстояний имеют вид:

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad |g_\sigma| = \frac{2ab}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}.$$

Для разности расстояний направление градиента составляет

$$\alpha_r = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4) \pm \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Для вывода модуля градиента $|g_r|$ исходим из канонического уравнения гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0.$$

Результат измерения представляет длину действительной оси гиперболы, $r = 2a = |s_3 - s_4|$. С учетом этого имеем

$$4x^2/r^2 - 4y^2/(4c^2 - r^2) - 1 = 0.$$

Поскольку частные производные от r по направлению координатных осей имеют вид

$$r_x = -F'_x / F'_r = \frac{16\, xr\, b^4}{16\, b^4 x^2 + r^4 y^2},\quad r_y = -F'_y / F'_r = \frac{4\, b^2 r^3 y}{16\, b^4 x^2 + r^4 y^2},$$

то квадрат модуля градиента составляет

$$|g_r|^2 = \frac{16\, r^2 b^4}{16\, b^4 x^2 + r^4 y^2}. \tag{16}$$

Учитывая параметрическое представление гиперболы

$$x = a/\cos t, \quad y = b \operatorname{tg} t,$$

получим еще одно выражение для модуля градиента

$$|g_r| = \frac{2\, b \cos t}{\sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 t}}. \tag{17}$$

Здесь t — направление градиента, которое изменяется от 180° (когда искомая точка близка к действительной оси между фокусами) до $t = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$, т. е. до направления нормали к соответствующей асимптоте. Поэтому $t \neq 0$, так как гипербола вырождится в линию. Следовательно, максимальное значение градиента равно двум, а минимальное ограничено отношением полуосей гиперболы. Воспользовавшись радиусом кривизны гиперболы

$$R = \left(\frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^{8/3} + b^{8/3}}\right)^{3/2},$$

найдем, что $|g_r| = 2\sqrt[3]{\frac{p}{R}}$, где $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр. Наименьший радиус кривизны в вершине гиперболы $R = \frac{b^2}{a}$, т. е. здесь $|g_r| = 2$. Наконец, учитывая, что $R = p/\sin^3 u$, получаем $|g_r| = 2 \sin u$, где u — угол между касательной и радиус-вектором точки касания. Но касательная является биссектрисой между радиусами-векторами точки касания, следовательно $u = \frac{1}{2}\gamma$, таким образом, приходим к формуле

$$|g_r| = 2 \sin \frac{\gamma}{2}. \tag{18}$$

Приведем оценку точности положения пункта в частном случае, когда эллипс и гипербола являются софокусными, т. е. совпадают точки A1-A3, A2-A4. В этом случае направления векторов-градиентов ортогональны, $\alpha_r - \alpha_\sigma = 90°$, а модули составляют

$$|g_\sigma| = 2\cos\frac{\gamma}{2}, \quad |g_r| = 2\sin\frac{\gamma}{2},$$

где γ — угол, образованный радиусами-векторами из определяемой точки на исходные пункты.

Теперь найдем аналогично (10) экстремальные значения области погрешностей

$$M^2_{max} = m^2_\sigma \cos^2\alpha'_\sigma + m^2_r \cos^2\alpha'_r =$$

$$= \left(\frac{\Delta_\sigma}{2\cos\frac{\gamma}{2}}\right)^2 \left(\cos^2\alpha'_\sigma + (\Delta_r / \Delta_\sigma)^2 \operatorname{tg}^{-2}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\alpha'_\sigma - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Обозначим так же, как в (10), $l = m_r/m_\sigma = (\Delta_r/\Delta_\sigma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})^2$, и с учетом того, что $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, получим

$$R = 1 + 2l^2\cos 2\varphi_0 + l^4 = (1 - l^2)^2,$$

$$M^2_{max} = \frac{m^2_\sigma}{2}(1 + l^2 + \sqrt{R}) = \left(\Delta_\sigma / 2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2,$$

$$M^2_{min} = \frac{m^2_\sigma}{2}(1 + l^2 - \sqrt{R}) = \left(\Delta_r / 2\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Пример. Для определения положения пункта P измерены суммарное расстояние σ_{2p1} и по разностям фаз разность расстояний r_{2p1}. Положение пунктов характеризуется координатами:

	1	2	P
x	1000	1000	1500
y	1500	1000	2000

При этом имеем $\sigma_{2p1} = 1825$ м, $r_{2p1} = 411$ м. Отсюда находим: $\gamma = 18{,}4°$,

$$M_{min} = \Delta_\sigma / 2\cos\frac{\gamma}{2} = 1\text{ см} / 2\cos 9{,}2° = 0{,}5\text{ см}$$

$$M_{max} = \Delta_r / 2\sin\frac{\gamma}{2} = 1\text{ см} / 2\sin 9{,}2° = 3{,}1\text{ см}$$

Статья поступила в редколлегию 08. 02. 91