УДК 528.385.988(083.3)

С. И. МАТИЕК

О СРЕДНИХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОШИБКАХ, ВЫЧИСЛЕННЫХ ПО УГЛОВЫМ НЕВЯЗКАМ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ПО УКЛОНЕНИЯМ ИЗМЕРЕННЫХ УГЛОВ ОТ ИХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

В [1] автор делает вывод, что измеренные горизонтальные углы содержат значительные систематические ошибки и объясняет это тем, что средние квадратические ошибки уравненных на станции углов, вычисленные по уклонениям измеренных углов от их средних значений или невязкам условий станций, значительно меньше тех же ошибок, полученных по невязкам условий фигур. Аналогичные выводы содержатся в работах [2],

[3] и других, то есть наличие систематической части ошибки в измеренных углах предложено выявлять путем сопоставления средних квадратических ошибок, вычисленных по угловым невязкам треугольников, со значениями средних квадратических ошибок, вычисленных по результатам уравнивания станций.

Цель статьи — определение правомочности сопоставления этих двух квадратических характеристик. Прежде всего отметим, что среднее значение измеренного угла, как правило, не совпадает с его истинным значением, а формула Бесселя дает приближенные результаты. В этой связи разности между измеренными значениями угла и его средним значением представляют собой отклонения результатов измерений относительно арифметической середины, а средние квадратические ошибки, вычисленные по этим отклонениям, могут в значительной мере отличаться от их истинных величин.

Представим истинные ошибки Δ_i и отклонения результатов измерений от их арифметической середины следующими выражениями:

$$\Delta_i = A_i - A; \tag{1}$$

$$\delta_i = A_i - A_0, \tag{2}$$

где A_i, A, $A_0 = \Sigma A_i/n$ — измеренное истинное и среднее значения угла соответетвенно.

Вычитая из (1) выражение (2), получаем

$$\Delta_i - \delta_i = A_0 - A = \mu', \tag{3}$$

где μ' — истинная ошибка арифметической середины результатов измерений, которая, как правило, отлична от нуля.

Теперь проиллюстририруем образование угловой невязки треугольника. Пусть A, B, C — истинные, а A_i, B_i, C_i — измеренные значения углов треугольника. Их средние значения имеют вид

$$A = \Sigma A_i/n, \quad B_0 = \Sigma B_i/n, \quad C_0 = \Sigma C_i/n. \tag{4}$$

С учетом (1)—(3) запишем результаты измерений:

$$A_i = A + \mu'_A + \delta_i^A, \; B_i = B + \mu'_B + \delta_i^B, \; C_i = C + \mu'_C + \delta_i^C. \tag{5}$$

Откуда

$$\begin{aligned} A_0 &= A + \mu'_A + \Sigma\delta^A/n, \\ B_0 &= B + \mu'_B + \Sigma\delta^B/n, \\ C_0 &= C + \mu'_C + \Sigma\delta^C/n. \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно свойству отклонений результатов измерений от их арифметической середины третьи слагаемые правой части равенств (6) равны нулю. Следовательно, угловая невязка треугольника ABC будет

$$W=A_0+B_0+C_0-180^\circ=A+B+C+\mu_A'+\mu_B'+\mu_C'-180^\circ. \quad (7)$$

Но так как $A+B+C=180^\circ$, то

$$W=\mu_A'+\mu_B'+\mu_C'. \quad (8)$$

Теперь запишем (3) в виде

$$\Delta_i=\delta_i+\mu'. \quad (9)$$

Истинная ошибка каждого результата измерений состоит из двух слагаемых: отклонений результатов измерений δ от их среднего значения и ошибки арифметической середины μ' относительно истинного значения измеренного угла.

Первое слагаемое правой части равенства (9)

$$\delta_i=\Delta_i-\mu' \quad (10)$$

используют для оценки точности угловых измерений по результатам уравнивания станций, а вторые слагаемые этого равенства

$$\mu'=\Delta_i-\delta_i \quad (11)$$

согласно (8) образуют угловые невязки треугольников, которые также используют для оценки точности результатов измерений. Но средние квадратические ошибки, полученные по угловым невязкам треугольников, представляют собой одну из разновидностей средних квадратических ошибок арифметических середин измеренных углов треугольников, и в то же время, уменьшив в $\sqrt{n}$ среднюю квадратическую ошибку одного измерения, вычисленную по формуле Бесселя, получают еще одну разновидность средней квадратической ошибки арифметической середины. Если бы эти характеристики были идентичны, то для случая, где поправки за центровку и редукцию равны нулю, средние квадратические ошибки, вычисленные в первом и втором случаях, были бы одинаковы. Однако это условие не выполняется.

Из формулы (9) следует, что истинные ошибки Δ измеренных углов являются функциями двух составляющих δ и μ'. Первую из них используют для оценки точности измеренных углов по результатам уравнивания станций, а вторую — по формуле Ферреро. Но так как квадратические характеристики, вычисленные по этим аргументам, являются, в некотором приближении, составляющими полной средней квадратической ошибки результатов измерений, то установление наличия систематических ошибок в результатах измерений путем их сопоставления представляется неправомочным.

Так как слагаемые μ формулы (8) неизвестны, а известны только их суммы W в каждом треугольнике, то истинные значения средних квадратических ошибок результатов измерений нельзя определить из-за существования соотношения

$$0 \leqslant [W^2 = (\mu'_A + \mu'_B + \mu'_C)^2] \gtrless [(\mu'_A)^2 + (\mu'_B)^2 + (\mu'_C)^2], \quad (12)$$

то есть вследствие различия функционального вида формул Бесселя и Ферреро. В этой связи средняя квадратическая ошибка, определяемая по формуле Ферреро, может значительно отличаться от истинной как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Верхний предел ее может превышать истинную ошибку в 1,73 раза (при равных значениях ошибок во всех углах треугольника), а нижний предел достигает нуля (когда угловая невязка треугольника равна нулю).

Приведенные рассуждения действительны для случая, когда поправки из-за внецентренной установки теодолита и визирных целей равны нулю. Но в производстве, как правило, в результате угловых измерений такие поправки имеют место. Ошибки μ'' не сказываются на отклонениях δ результатов угловых измерений и являются составляющими только угловых невязок W. В этой связи средние квадратические ошибки, определяемые по формуле Ферреро, кроме названных выше недостатков, отягощены еще и ошибками из-за определения элементов приведения.

Следовательно, средние квадратические характеристики, вычисленные по аргументам δ, характеризуют приближенно точность собственно угловых измерений, а средние квадратические характеристики, вычисленные по аргументам W, характеризуют одновременно остаточную ошибку μ' измерений горизонтальных углов и ошибку μ'' определения поправок из-за внецентренной установки теодолита и визирных целей.

Из изложенного следут, что средние квадратические отклонения, вычисленные по результатам уравнивания станций, и средние квадратические ошибки, вычисленные по угловым невязкам треугольников, по своему происхождению и по функциональному виду оценочных формул несопоставимы и не могут решить ту задачу, которая предполагается в [1—3].

1. *Визгин А. А.* Анализ ошибок угловых измерений в триангуляции // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1959. Вып. 4. С. 17—24. 2. *Яковлев Н. В.* Усовершенствование программы для наблюдений по способу симметричных комбинаций трех направлений (при уравнивании направлений) // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1959. Вып. 4. С. 43—51. 3. *Яковлев Н. В.* К общей теории угловых измерений в триангуляции 1—2 классов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1964. Вып. 1. С. 3—17.

Статья поступила в редколлегию 17. 04. 91