1. Для всех определяемых пунктов в пространстве минимальной погрешности соответствует точка Лемуана внутри исходного треугольника.

2. Большему расстоянию определяемого пункта от точки Лемуана соответствует большая погрешность.

3. Минимальная погрешность зависит только от формы исходного треугольника и не зависит от его величины.

4. Наименьшее значение $K_{min}=1{,}15$ достигает погрешность в равностороннем треугольнике.

5. Всем пунктам, лежащим на сферах с центром в точке Лемуана, соответствуют одинаковые погрешности.

6. Допустимая область измерений ограничена сферой радиусом $R_{\text{доп}}$ из (12) с центром в точке Лемуана.

1. *Буткевич А. В.* Об уравнивании линейных засечек // Геодезия и картография. 1959. № 1. С. 21—31. 2. *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. М., 1962. 3. *Йордан В., Эггерт О., Кнейсель М.* Руководство по геодезии. М., 1971. Т. 6. 4. *Лютц А. Ф.* Разбивка крупных сооружений. Основные положения. М., 1952. 5. *Маркуш Б.* О точности линейной засечки // Геодезия и картография. 1980. № 2. С. 54—56. 6. *Урмаев М. С.* Прямые методы вычисления геодезических координат по результатам пространственных линейных засечек // Изв. вузов. Геодезия и картография. 1985. № 5. С. 3—11. 7. *Хмелевский Ю. С.* Графическая оценка точности угловых и линейных засечек // Геодезия и картография. 1979. № 12. С. 23—24. 8. *Хмелевский Ю. С.* Графическая оценка точности линейной засечки по двум пунктам // Геодезия и картография. 1980. № 2. С. 54—56.

Статья поступила в редколлегию 17. 04. 86

УДК 528.11+519.654+528.06:519.2

А. Н. СУХОВ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ НАДЕЖНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Одна из проблем малой выборки — характеристика надежности геодезических измерений. Основным показателем качества выполненных измерений, как известно, является средняя квадратическая погрешность, которая при малом числе измерений может быть оценкой смещенной, не отражающей собой структуру измерительного процесса.

В этой связи в статье сделана попытка наделить измерение целенаправленным динамическим процессом и ввести в рассмотрение характеристики надежности, названные стабильностью и напряжением измерения.

На основе этих положений рассмотрим вероятность выполнить путем измерений запроектированные функции, когда напряжения, возникшие в результате измерения, превышают прочность.

Определяя измерение с кибернетической точки зрения, можно сказать, что структура измерения — это организация целого,

т. е. измерительного процесса из отдаленных элементов (факторов, составляющих условия измерения).

Одной из важнейших характеристик геодезических измерений является количественный показатель степени их стабилизации. Для оценки качества измерения необходимо иметь достаточно ясные представления о процессах деградации накапливаемого измерительного материала под влиянием аномальных результатов и о процессах восстановления структуры измерения до определенных норм.

Степень стабилизации λ измерения можно определить как меру объединения случайных факторов в оптимальном режиме. В то же время указанное объединение надо понимать как разделение «полномочий» внутри условий измерения. Для каждой пары случайных факторов степень стабилизации можно измерять отношением объема возмущающих погрешностей одного фактора к объему возмущающих погрешностей другого фактора, т. е.

$$\lambda = V_i/V_{i+1}. \qquad (1)$$

Объемы возмущающих погрешностей оценивают количеством информации, содержащейся в каждом факторе.

Наряду с показателем точности геодезических измерений не менее важной характеристикой является надежность измерительного процесса. Это особенно важно для малой выборки, где параметр точности, выраженный числом, может терять смысловое значение.

Показателем надежности измерений, подверженных действию нестационарных случайных влияний, является вероятность того, что в процессе измерения случайные погрешности превысят хотя бы однажды ее предельное значение.

В соответствии с этим устанавливается условие, согласно которому измерение должно выполнять запроектированные свойства

$$u = X - x. \qquad (2)$$

Тогда выражение

$$R = P(u > u_{\text{пред}}) \qquad (3)$$

обусловливает вероятность того, что измерение в определенной области не выполняет свои функции. Исходя из этого, параметры выражения (2) можно определить следующим образом: X — стабильность измерения. Она характеризуется выборочными оценками совокупности, имеющими случайный характер распределения; x — напряжение, возникающее в процессе измерения вследствие неблагоприятного взаимодействия факторов условий измерения. Оно характеризуется появлением уклоняющихся результатов.

Выражение (2) может соответствовать самым различным условиям, обусловливающим надежность измерения, например, непревышение выборочными характеристиками их предельных значений для данных условий измерения; непревышение уклоняющихся результатов предельно допустимых величин; степень несоответствия эмпирического распределения гипотетическому. Предполагая случайные величины X и x распределенными нормально с плотностями соответственно $f(X)$ и $f(x)$, можно определить область перекрытия, которая представляет наибольший интерес для практики анализа геодезических измерений.

Вероятность того, что измерение будет выполнять запроектированные функции, устанавливается, как известно, выражением (3), а участок графического перекрытия указанных плотностей распределения показывает вероятность того, что измерение не будет выполнять требуемых функций.

Вероятность того, что стабильность измерения будет превышать какое-то значение напряжения, задается выражением

$$P(X < x) = \int_{x_0}^{\infty} f(X)\,dX, \tag{4}$$

где x_0 — некоторое значение параметра напряжения.

Тогда вероятность того, что измерение будет выполнять требуемые функции, определяется требованием $X < x$ для всех возможных значений напряжения, т. е.

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{\int_{x}^{\infty} f(X)\,dX\right\}dx. \tag{5}$$

Плотность нормального распределения стабильности измерения имеет вид

$$f(X) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(X-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}. \tag{6}$$

Плотность нормального распределения напряжения измерения запишем

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{7}$$

Рассмотрим случайную величину $u = X - x$, имеющую нормальное распределение с параметрами

$$\mu_u = \mu_X - \mu_x,$$
$$\sigma_u^2 = \sigma_X^2 + \sigma_x^2.$$

Тогда вероятность выполнения измерением требуемых функций находим следующим образом:

$$R = P(u > u_{\text{пред}}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_u\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(u-\mu_u)^2}{2\sigma_u^2}}\,du. \tag{8}$$

Рассмотрим случайную величину $z = \frac{(u-\mu_u)}{\sigma_u}$.

При $u=0$ нижний предел будет

$$z = -\frac{\mu_X - \mu_x}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_x^2}},$$

а при $u = +\infty$ верхний предел $z \to +\infty$

Следовательно,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(\mu_X-\mu_x)/\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_x^2}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz. \tag{9}$$

Уравнение (9) можно переписать в виде

$$R = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_X - \mu_x}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_x^2}}\right). \tag{10}$$

Выражение (9) показывает, что вероятность выполнения измерением требуемых функций зависит от нижнего предела интеграла. Ясно, что вероятность будет стремиться к единице при уменьшении нижнего предела. Таблица расчетных значений R дает представление об изменении вероятности при изменении напряжения в измерительном процессе и при различном уровне смещения двух выборок.

В таблице в качестве меры стабильности измерения μ_X принята медиана ξ, как более устойчивая оценка центра распределения по отношению к крайним членам ряда наблюдений. Расчетные

Расчетные значения вероятности

№ п/п	λ	$\mu_X=\xi$	$\mu_x=x$	$\sigma(\xi)$	$\sigma(x)$	R
10%-ный уровень смещения; $n=12$						
1	0	6,38	6,27	0,264	0,692	0,5574
2	2	6,51	7,79	0,299	0,824	0,9239
3	3	6,51	8,55	0,305	0,969	0,9772
4	5	6,51	10,07	0,307	1,336	0,9900
5	7	6,51	11,58	0,307	1,723	0,9965
5%-ный уровень смещения; $n=12$						
1	0	6,38	6,27	0,264	0,724	0,5534
2	2	6,51	7,72	0,287	0,765	0,9309
3	3	6.51	8,44	0,289	0,848	0,9797
4	5	6,51	9,89	0,290	1,074	0,9980
5	7	6,51	11,34	0,290	1,648	0,9986
5%-ный уровень смещения; $n=6$						
1	0	49,20	49,19	0,224	0,440	0,5078
2	2	49,36	50,07	0,252	0,448	0,9595
3	3	49,36	50,51	0,256	0,487	0,9780
4	4	49,36	50,95	0,256	0,577	0,9879
5	5	49,36	51,36	0,257	0,657	0,9965
6	6	49,36	51,83	0,257	0,742	0,9987

значения R говорят о том, что вероятность невыхода случайной величины за установленные пределы стремится к единице при увеличении пределов допустимости. Можно сказать, что с расширением пределов возможного появления случайной величины возрастает вероятность того, что измерение будет выполнять запроектированные функции.

Анализу подвергнуты выборки измерения горизонтальных углов на пунктах триангуляции 2 и 3 классов, объемом $n=6$ и $n=12$. Эмпирическое распределение представляется смесью двух выборок, одна из которых основная, а другая является аномальным результатом, смещенным относительно среднего значения основной выборки на величину λm. Таким образом, рассматривается модель вида

$$f=\gamma f_1(a,\ m^2)+(1-\gamma)f_2(a+\lambda m,\ m^2), \tag{11}$$

где f_1 и f_2 — плотности двух эмпирических выборок; a, m^2 — параметры основной выборки; λ — параметр сдвига аномального результата; γ — относительное содержание каждой выборки в общей совокупности.

Рассматривались распределения с 5, 10, 20%-ным уровнями смещения. Таблица дает представление об изменении уровня вероятности R в зависимости от смещения смешиваемых групп наблюдений.

Если проследить за изменением отношения $\sigma(\xi)/\sigma(x)$, то можно заметить, что относительно стабильное значение наблюдается в интервале смещения $3m$. Этот факт еще раз говорит в пользу обоснованного выбора значения предельной погрешности при геодезических измерениях.

Рассмотрим случайную величину $z=\xi/x$, которую назовем коэффициентом связанности выборки. Выборка считается связанной, если z приближается к единице.

Обозначим через $\bar{\xi}$ и $\bar{x}$ соответственно среднюю стабильность и среднее напряжение измерения, а через $\bar{z}$ — средний коэффициент надежности.

Тогда, согласно неравенству Чебышева, имеем

$$P(|z-b|\leqslant\varepsilon)\geqslant 1-\frac{M\{(z-b)\}^2}{\varepsilon^2}, \tag{12}$$

где b — произвольная положительная постоянная.

Положим $b=c\bar{z}$, тогда

$$M(z-b)^2=M\{(z-c\bar{z})^2\}=M\{z^2-2c\bar{z}\cdot z+c^2\bar{z}^2\},$$

$$M(z^2)-2cz^2+c^2\bar{z}^2=\sigma_z^2+\bar{z}^2-2c\bar{z}^2+c^2\bar{z}^2,$$

$$z^2\left\{\frac{\sigma_z^2}{\bar{z}^2}+(1-c)^2\right\}=\bar{z}^2\{V_z^2+(1-c)^2\},$$

где $V_z=\sigma_z/\bar{z}$ — коэффициент вариации параметра.

Неравенство (12) перепишем теперь в виде

$$P(1\leqslant z\leqslant 2c\bar{z}-1)\geqslant 1-\frac{z^2\{V_z^2+(1-c)^2\}}{(c\bar{z}-1)^2} \tag{13}$$

при $b-\varepsilon=1$.

Так как $R=P(z\geqslant 1)$, то с учетом (13) имеем

$$R\geqslant 1-\frac{\bar{z}^2\{V_z^2+(1-c)^2\}}{(c\bar{z}-1)^2}. \tag{14}$$

Выражение (14) определяет нижний предел вероятности того, что измерение выполнит запроектированные требования.

Дифференцируя второе слагаемое (14), обозначенное через l, по c и приравнивая значение к нулю, получаем

$$\frac{\partial l}{\partial c}=\frac{-2\bar{z}^3\{V_z^2+(1-c)^2\}}{(c\bar{z}-1)^3}+\frac{-2\bar{z}^2(1-c)}{(c\bar{z}-1)^2}=0.$$

Из решения полученного уравнения определяем критическое значение $c_{\text{кр}}$:

$$c_{\text{кр}}=\frac{\bar{z}(V_z^2+1)-1}{(\bar{z}-1)}. \tag{15}$$

Подставив значение (15) в неравенство (14), получим

$$R\geqslant 1-\frac{\bar{z}^2V_z^2}{\{\bar{z}^2V_z^2+(z-1)^2\}} \tag{16}$$

или

$$\bar{z}\geqslant\left|\frac{1}{1-V_z\sqrt{\dfrac{R}{1-R}}}\right|. \tag{17}$$

Таким образом, выражения (16) и (17) определяют связь между средним значением коэффициента надежности, коэффициентом вариации и вероятностью путем измерения выполнять требуемые функции.

Из теории вероятностей известно, что любая случайная величина считается заданной, если известно ее распределение. Задача по определению плотности распределения случайной величины не всегда разрешима. Поэтому для практических случаев достаточно, как правило, знать математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Раскладывая в строку Тейлора функцию z, зависящую от двух переменных, имеем

$$z=\frac{\bar{\xi}}{\bar{x}}+\frac{1}{x}(\xi-\bar{\xi})+\left(-\frac{\bar{\xi}}{\bar{x}^2}\right)(x-\bar{x})+\frac{1}{2!}\left[0-\frac{2}{\bar{x}^2}(\xi-\bar{\xi})(x-\bar{x})+\right.$$

$$\left.+\frac{2\bar{\xi}}{\bar{x}^3}(x-\bar{x})^2\right]+\frac{1}{3!}\left[0+0+\frac{6}{\bar{x}^3}(\xi-\bar{\xi})(x-\bar{x})^2-\frac{6\bar{\xi}}{\bar{x}_4}(x-\bar{x})^3\right]+r=$$

$$=\frac{\bar\xi}{\bar x}+\frac{1}{\bar x}(\xi-\bar\xi)-\frac{\bar\xi}{\bar x^2}(x-\bar x)+\frac{1}{\bar x^2}(\xi-\bar\xi)(x-\bar x)+\frac{\bar\xi}{\bar x^3}(x-\bar x)^2+$$
$$+\frac{(\xi-\bar\xi)(x-\bar x)^2}{\bar x^3}-\frac{\bar\xi}{\bar x^4}(x-\bar x)^3+r. \qquad (18)$$

Определяя математическое ожидание функции z, получаем

$$M(z)=\frac{\bar\xi}{\bar x}+\frac{\bar\xi}{\bar x^3}\mu_2-\frac{\bar\xi}{\bar x^4}\mu_3, \qquad (19)$$

где μ_2 и μ_3 — соответственно второй и третий центральные моменты случайной величины x.

Пренебрегая остаточным членом и используя известную формулу для дисперсии
$D(z)=M\{(z)^2\}-\{M(z)\}^2$, перепишем

$$D(z)=M\left\{\left[\frac{\bar\xi}{\bar x}+\frac{1}{\bar x}(\xi-\bar\xi)+\frac{\bar\xi}{\bar x}(x-\bar x)-\frac{1}{\bar x^2}(\xi-\bar\xi)(x-\bar x)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\bar\xi}{\bar x}(x-\bar x)^2+\frac{(\xi-\bar\xi)(x-\bar x)^2}{\bar x^3}-\frac{\bar\xi}{\bar x^4}(x-\bar x)^3\right]^2\right\}-\left(\frac{\bar\xi}{\bar x}+\frac{\bar\xi}{\bar x^3}\mu_2-\frac{\bar\xi}{\bar x^4}\mu_3\right)^2. \qquad (20)$$

При нормальном законе распределения случайных величин ξ и x имеем $\mu_2=\sigma^2$; $\mu_3=0$; $\mu_4=3\sigma^4$.

Тогда $M(z)=\dfrac{\bar\xi}{\bar x}+\dfrac{\bar\xi}{\bar x^3}\sigma_x^3$,

$$D(z)=\frac{\sigma_x^2}{\bar x^2}+\frac{\sigma_x^2}{\bar x^4}(\bar\xi^2+3\sigma_\xi^2)+\frac{\sigma_\xi^4}{\bar x^6}(3\sigma_\xi^2+8\bar\xi^2)+15\,\frac{\bar\xi\sigma_x^6}{\bar x^8}. \qquad (21)$$

В статье приведены варианты вероятностных расчетов при проектировании геодезических измерений, что дает возможность получить количественные характеристики показателей надежности.

На основании введения показателя вероятности (R) выполнения измерением запроектированных функций расчетным путем получено значение стабильности измерения.

Рассматривая отношение стабильности к напряжению (коэффициент связанности выборки), получаем параметры распределения этой случайной величины. Выражение (17) позволяет определить нижний предел значения $\bar z$, при котором с вероятностью R выполняется неравенство

$$1\leqslant z\leqslant 2\ c_{\text{кр}}\bar z-1.$$

Изложенные соображения позволят расширить подход к анализу геодезических измерений при их проектировании.

1. *Базовский И.* Надежность, теория и практика. М., 1965. 2. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. М., 1969.

Статья поступила в редколлегию 24. 03. 86

УДК 528.14/16

Г. А. ХАРКЕВИЧ

СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИЭФФЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК МНК

Для наблюдений за осадками массива инженерных сооружений необходимо создание единой нивелирной сети с большим числом связей. Если продолжительность цикла значительна и, кроме того, территория подвержена выраженным воздействиям короткопериодических сезонных вариаций, например, уровня грунтовых вод, то уравнивание наблюдений в цикле по обычной методике метода наименьших квадратов (МНК) приводит к распределению по сети погрешностей наблюдений, допущенных в отдельных ходах, и нивелированию влияний сезонных вариаций на основания сооружений.

Особенностью наблюдений за вертикальными деформациями конструктивно не связанных между собой зданий является стремление определить с наибольшей точностью превышения марок, расположенных на одном здании, в сравнении с превышениями для марок на разных зданиях.

В этом случае следует организовать наблюдения и обработку их результатов таким образом, чтобы точность, достигнутая при нивелировании осадочных марок на одном здании, не понижалась за счет погрешностей, допущенных на других участках сети и чтобы эти погрешности локализовались в связях между зданиями.

Методика построения, уравнивания и оценки точности одноклассной нивелирной сети, приводящая к решению такой задачи, реализуется следующей программой:

1. Нивелирование осадочных марок по отдельным группам конструктивно связанных зданий замкнутыми ходами с целью образования первичных полигонов, невязки которых содержат лишь погрешности измерений.

2. Соединение первичных полигонов связующими ходами и привязка к опорным реперам с целью получения системы вторичных полигонов с узловыми точками, невязки которых содержат как погрешности измерений в ходах, образовавших полигон, так и влияние внешних факторов на отметку здания по высоте.

3. Уравнивание и оценка точности.

Очевидно первый и второй пункты пояснений не требуют. Рассмотрим третий.

Уравнивание первичных полигонов состоит в вычислении поправок

$$v_{i,j}=-\omega_i/n_i,\quad j=1,2,\cdots,n_{i-1} \qquad (1)$$

и введении их в измеренные превышения $h_{j,j+1}$, где i — номер полигона; ω, n — невязка и число штативов соответственно; j — порядковый номер осадочной марки.