

А. Н. СУХОВ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ НАДЕЖНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Одна из проблем малой выборки — характеристика надежности геодезических измерений. Основным показателем качества выполненных измерений, как известно, является средняя квадратическая погрешность, которая при малом числе измерений может быть оценкой смещенной, не отражающей собой структуру измерительного процесса.

В этой связи в статье сделана попытка наделить измерение целенаправленным динамическим процессом и ввести в рассмотрение характеристики надежности, названные стабильностью и напряжением измерения.

На основе этих положений рассмотрим вероятность выполнить путем измерений запроецированные функции, когда напряжения, возникшие в результате измерения, превышают прочность.

Определяя измерение с кибернетической точки зрения, можно сказать, что структура измерения — это организация целого,

т. е. измерительного процесса из отдаленных элементов (факторов, составляющих условия измерения).

Одной из важнейших характеристик геодезических измерений является количественный показатель степени их стабилизации. Для оценки качества измерения необходимо иметь достаточно ясные представления о процессах деградации накапливаемого измерительного материала под влиянием аномальных результатов и о процессах восстановления структуры измерения до определенных норм.

Степень стабилизации λ измерения можно определить как меру объединения случайных факторов в оптимальном режиме. В то же время указанное объединение надо понимать как разделение «полномочий» внутри условий измерения. Для каждой пары случайных факторов степень стабилизации можно измерять отношением объема возмущающих погрешностей одного фактора к объему возмущающих погрешностей другого фактора, т. е.

$$\lambda = V_i/V_{i+1}. \quad (1)$$

Объемы возмущающих погрешностей оценивают количеством информации, содержащейся в каждом факторе.

Наряду с показателем точности геодезических измерений не менее важной характеристикой является надежность измерительного процесса. Это особенно важно для малой выборки, где параметр точности, выраженный числом, может терять смысловое значение.

Показателем надежности измерений, подверженных действию нестационарных случайных влияний, является вероятность того, что в процессе измерения случайные погрешности превысят хотя бы однажды ее предельное значение.

В соответствии с этим устанавливается условие, согласно которому измерение должно выполнять запроектированные свойства

$$u = X - x. \quad (2)$$

Тогда выражение

$$R = P(u > u_{\text{пред}}) \quad (3)$$

обуславливает вероятность того, что измерение в определенной области не выполняет свои функции. Исходя из этого, параметры выражения (2) можно определить следующим образом: X — стабильность измерения. Она характеризуется выборочными оценками совокупности, имеющими случайный характер распределения; x — напряжение, возникающее в процессе измерения вследствие неблагоприятного взаимодействия факторов условий измерения. Оно характеризуется появлением уклоняющихся результатов.

Выражение (2) может соответствовать самым различным условиям, обуславливающим надежность измерения, например, непревышение выборочными характеристиками их предельных значений для данных условий измерения; непревышение уклоняющихся результатов предельно допустимых величин; степень несоответствия эмпирического распределения гипотетическому. Предполагая

случайные величины X и x распределенными нормально с плотностями соответственно $f(X)$ и $f(x)$, можно определить область перекрытия, которая представляет наибольший интерес для практики анализа геодезических измерений.

Вероятность того, что измерение будет выполнять запроецированные функции, устанавливается, как известно, выражением (3), а участок графического перекрытия указанных плотностей распределения показывает вероятность того, что измерение не будет выполнять требуемых функций.

Вероятность того, что стабильность измерения будет превышать какое-то значение напряжения, задается выражением

$$P(X < x) = \int_{x_0}^{\infty} f(X) dX, \quad (4)$$

где x_0 — некоторое значение параметра напряжения.

Тогда вероятность того, что измерение будет выполнять требуемые функции, определяется требованием $X < x$ для всех возможных значений напряжения, т. е.

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \int_x^{\infty} f(X) dX \right\} dx. \quad (5)$$

Плотность нормального распределения стабильности измерения имеет вид

$$f(X) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}. \quad (6)$$

Плотность нормального распределения напряжения измерения запишем

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (7)$$

Рассмотрим случайную величину $u = X - x$, имеющую нормальное распределение с параметрами

$$\begin{aligned} \mu_u &= \mu_X - \mu_x, \\ \sigma_u^2 &= \sigma_X^2 + \sigma_x^2. \end{aligned}$$

Тогда вероятность выполнения измерением требуемых функций находим следующим образом:

$$R = P(u > u_{\text{пред}}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu_u)^2}{2\sigma_u^2}} du. \quad (8)$$

Рассмотрим случайную величину $z = \frac{(u - \mu_u)}{\sigma_u}$.

При $u=0$ нижний предел будет

$$z = -\frac{\mu_X - \mu_x}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_x^2}},$$

а при $u=+\infty$ верхний предел $z \rightarrow +\infty$

Следовательно,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(\mu_X - \mu_x)/\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_x^2}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (9)$$

Уравнение (9) можно переписать в виде

$$R = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_X - \mu_x}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_x^2}}\right). \quad (10)$$

Выражение (9) показывает, что вероятность выполнения измерением требуемых функций зависит от нижнего предела интеграла. Ясно, что вероятность будет стремиться к единице при уменьшении нижнего предела. Таблица расчетных значений R дает представление об изменении вероятности при изменении напряжения в измерительном процессе и при различном уровне смещения двух выборок.

В таблице в качестве меры стабильности измерения μ_X принята медиана ξ , как более устойчивая оценка центра распределения по отношению к крайним членам ряда наблюдений. Расчетные

Расчетные значения вероятности

№ п/п	λ	$\mu_X = \xi$	$\mu_x = x$	$\sigma(\xi)$	$\sigma(x)$	R
-------	-----------	---------------	-------------	---------------	-------------	-----

10%-ный уровень смещения; $n=12$

1	0	6,38	6,27	0,264	0,692	0,5574
2	2	6,51	7,79	0,299	0,824	0,9239
3	3	6,51	8,55	0,305	0,969	0,9772
4	5	6,51	10,07	0,307	1,336	0,9900
5	7	6,51	11,58	0,307	1,723	0,9965

5%-ный уровень смещения; $n=12$

1	0	6,38	6,27	0,264	0,724	0,5534
2	2	6,51	7,72	0,287	0,765	0,9309
3	3	6,51	8,44	0,289	0,848	0,9797
4	5	6,51	9,89	0,290	1,074	0,9980
5	7	6,51	11,34	0,290	1,648	0,9986

5%-ный уровень смещения; $n=6$

1	0	49,20	49,19	0,224	0,440	0,5078
2	2	49,36	50,07	0,252	0,448	0,9595
3	3	49,36	50,51	0,256	0,487	0,9780
4	4	49,36	50,95	0,256	0,577	0,9879
5	5	49,36	51,36	0,257	0,657	0,9965
6	6	49,36	51,83	0,257	0,742	0,9987

значения R говорят о том, что вероятность невыхода случайной величины за установленные пределы стремится к единице при увеличении пределов допустимости. Можно сказать, что с расширением пределов возможного появления случайной величины возрастает вероятность того, что измерение будет выполнять запроектированные функции.

Анализу подвергнуты выборки измерения горизонтальных углов на пунктах триангуляции 2 и 3 классов, объемом $n=6$ и $n=12$. Эмпирическое распределение представляется смесью двух выборок, одна из которых основная, а другая является аномальным результатом, смещенным относительно среднего значения основной выборки на величину λm . Таким образом, рассматривается модель вида

$$f = \gamma f_1(a, m^2) + (1 - \gamma) f_2(a + \lambda m, m^2), \quad (11)$$

где f_1 и f_2 — плотности двух эмпирических выборок; a, m^2 — параметры основной выборки; λ — параметр сдвига аномального результата; γ — относительное содержание каждой выборки в общей совокупности.

Рассматривались распределения с 5, 10, 20%-ным уровнями смещения. Таблица дает представление об изменении уровня вероятности R в зависимости от смещения смешиваемых групп наблюдений.

Если проследить за изменением отношения $\sigma(\xi)/\sigma(x)$, то можно заметить, что относительно стабильное значение наблюдается в интервале смещения $3m$. Этот факт еще раз говорит в пользу обоснованного выбора значения предельной погрешности при геодезических измерениях.

Рассмотрим случайную величину $z = \xi/x$, которую назовем коэффициентом связанности выборки. Выборка считается связанной, если z приближается к единице.

Обозначим через $\bar{\xi}$ и $\bar{x}$ соответственно среднюю стабильность и среднее напряжение измерения, а через $\bar{z}$ — средний коэффициент надежности.

Тогда, согласно неравенству Чебышева, имеем

$$P(|z - b| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M\{(z - b)\}^2}{\varepsilon^2}, \quad (12)$$

где b — произвольная положительная постоянная.

Положим $b = c\bar{z}$, тогда

$$M(z - b)^2 = M\{(z - c\bar{z})^2\} = M\{z^2 - 2c\bar{z} \cdot z + c^2\bar{z}^2\},$$

$$M(z^2) - 2c\bar{z}^2 + c^2\bar{z}^2 = \sigma_z^2 + \bar{z}^2 - 2c\bar{z}^2 + c^2\bar{z}^2,$$

$$z^2 \left\{ \frac{\sigma_z^2}{\bar{z}^2} + (1 - c)^2 \right\} = \bar{z}^2 \{V_z^2 + (1 - c)^2\},$$

где $V_z = \sigma_z/\bar{z}$ — коэффициент вариации параметра.

Неравенство (12) перепишем теперь в виде

$$P(1 \leq z \leq 2c\bar{z} - 1) \geq 1 - \frac{\bar{z}^2 \{V_z^2 + (1 - c)^2\}}{(c\bar{z} - 1)^2} \quad (13)$$

при $b - \varepsilon = 1$.

Так как $R = P(z \geq 1)$, то с учетом (13) имеем

$$R \geq 1 - \frac{\bar{z}^2 \{V_z^2 + (1 - c)^2\}}{(c\bar{z} - 1)^2} \quad (14)$$

Выражение (14) определяет нижний предел вероятности того, что измерение выполнит запроектированные требования.

Дифференцируя второе слагаемое (14), обозначенное через l , по c и приравнявая значение к нулю, получаем

$$\frac{\partial l}{\partial c} = \frac{-2\bar{z}^3 \{V_z^2 + (1 - c)^2\}}{(c\bar{z} - 1)^3} + \frac{-2\bar{z}^2 (1 - c)}{(c\bar{z} - 1)^2} = 0.$$

Из решения полученного уравнения определяем критическое значение $c_{кр}$:

$$c_{кр} = \frac{\bar{z}(\bar{V}_z^2 + 1) - 1}{(\bar{z} - 1)} \quad (15)$$

Подставив значение (15) в неравенство (14), получим

$$R \geq 1 - \frac{\bar{z}^2 V_z^{2*}}{\{\bar{z}^2 V_z^2 + (\bar{z} - 1)^2\}} \quad (16)$$

или

$$\bar{z} \geq \left| \frac{1}{1 - V_z \sqrt{\frac{R}{1 - R}}} \right| \quad (17)$$

Таким образом, выражения (16) и (17) определяют связь между средним значением коэффициента надежности, коэффициентом вариации и вероятностью путем измерения выполнять требуемые функции.

Из теории вероятностей известно, что любая случайная величина считается заданной, если известно ее распределение. Задача по определению плотности распределения случайной величины не всегда разрешима. Поэтому для практических случаев достаточно, как правило, знать математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Раскладывая в строку Тейлора функцию z , зависящую от двух переменных, имеем

$$z = \frac{\bar{\xi}}{\bar{x}} + \frac{1}{\bar{x}}(\xi - \bar{\xi}) + \left(-\frac{\bar{\xi}}{\bar{x}^2}\right)(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \left[0 - \frac{2}{\bar{x}^2}(\xi - \bar{\xi})(x - \bar{x}) + \frac{2\bar{\xi}}{\bar{x}^3}(x - \bar{x})^2\right] + \frac{1}{3!} \left[0 + 0 + \frac{6}{\bar{x}^3}(\xi - \bar{\xi})(x - \bar{x})^2 - \frac{6\bar{\xi}}{\bar{x}^4}(x - \bar{x})^3\right] + r =$$

$$= \frac{\bar{\xi}}{x} + \frac{1}{x} (\xi - \bar{\xi}) - \frac{\bar{\xi}}{x^2} (x - \bar{x}) + \frac{1}{x^2} (\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x}) + \frac{\bar{\xi}}{x^3} (x - \bar{x})^2 + \\ + \frac{(\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x})^2}{x^3} - \frac{\bar{\xi}}{x^4} (x - \bar{x})^3 + r. \quad (18)$$

Определяя математическое ожидание функции z , получаем

$$M(z) = \frac{\bar{\xi}}{x} + \frac{\bar{\xi}}{x^3} \mu_2 - \frac{\bar{\xi}}{x^4} \mu_3, \quad (19)$$

где μ_2 и μ_3 — соответственно второй и третий центральные моменты случайной величины x .

Пренебрегая остаточным членом и используя известную формулу для дисперсии

$D(z) = M\{(z)^2\} - \{M(z)\}^2$, перепишем

$$D(z) = M\left\{\left[\frac{\bar{\xi}}{x} + \frac{1}{x} (\xi - \bar{\xi}) + \frac{\bar{\xi}}{x} (x - \bar{x}) - \frac{1}{x^2} (\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{\xi}}{x} (x - \bar{x})^2 + \frac{(\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x})^2}{x^3} - \frac{\bar{\xi}}{x^4} (x - \bar{x})^3 \right]^2\right\} - \left(\frac{\bar{\xi}}{x} + \frac{\bar{\xi}}{x^3} \mu_2 - \frac{\bar{\xi}}{x^4} \mu_3\right)^2. \quad (20)$$

При нормальном законе распределения случайных величин ξ и x имеем $\mu_2 = \sigma^2$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 3\sigma^4$.

Тогда $M(z) = \frac{\bar{\xi}}{x} + \frac{\bar{\xi}}{x^3} \sigma_x^2$,

$$D(z) = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_x^2}{x^4} (\bar{\xi}^2 + 3\sigma_{\xi}^2) + \frac{\sigma_{\xi}^4}{x^6} (3\sigma_{\xi}^2 + 8\bar{\xi}^2) + 15 \frac{\bar{\xi} \sigma_x^6}{x^8}. \quad (21)$$

В статье приведены варианты вероятностных расчетов при проектировании геодезических измерений, что дает возможность получить количественные характеристики показателей надежности.

На основании введения показателя вероятности (R) выполнения измерением запроектованных функций расчетным путем получено значение стабильности измерения.

Рассматривая отношение стабильности к напряжению (коэффициент связанности выборки), получаем параметры распределения этой случайной величины. Выражение (17) позволяет определить нижний предел значения $\bar{z}$, при котором с вероятностью R выполняется неравенство

$$1 \leq z \leq 2 c_{кр} \bar{z} - 1.$$

Изложенные соображения позволяют расширить подход к анализу геодезических измерений при их проектировании.

1. Базовский И. Надежность, теория и практика. М., 1965. 2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., 1969.

Статья поступила в редколлегию 24.03.86