

СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИЭФФЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК МНК

$$= \frac{\xi}{x} + \frac{1}{x} (\xi - \bar{\xi}) - \frac{\xi}{x^2} (x - \bar{x}) + \frac{1}{x^2} (\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x}) + \frac{\xi}{x^3} (x - \bar{x})^2 + \frac{(\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x})^2}{x^3} - \frac{\xi}{x^4} (x - \bar{x})^3 + \gamma. \quad (18)$$

Определив математическое ожидание функции z , получаем

$$M(z) = \frac{\xi}{x} + \frac{\xi}{x^3} \mu_2 - \frac{\xi}{x^4} \mu_3, \quad (19)$$

где μ_2 и μ_3 — соответственно второй и третий центральные моменты случайной величины x .

Пренебрегая остаточным членом и используя известную формулу для дисперсии

$$D(z) = M\{z^2\} - \{M(z)\}^2, \text{ перепишем}$$

$$D(z) = M \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x} (\xi - \bar{\xi}) + \frac{\xi}{x} (x - \bar{x}) - \frac{1}{x^2} (\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x}) + \frac{\xi}{x} (x - \bar{x})^2 + \frac{(\xi - \bar{\xi}) (x - \bar{x})^2}{x^3} - \frac{\xi}{x^4} (x - \bar{x})^3 \right\}^2 - \left(\frac{\xi}{x} + \frac{\xi}{x^3} \mu_2 - \frac{\xi}{x^4} \mu_3 \right)^2. \quad (20)$$

При нормальном законе распределения случайных величин ξ и x имеем $\mu_2 = \sigma^2$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 3\sigma^4$.

$$\text{Тогда } M(z) = \frac{\xi}{x} + \frac{\xi}{x^3} \sigma^2.$$

$$D(z) = \frac{\sigma^4}{x^2} + \frac{\sigma^4}{x^4} (\bar{\xi}^2 + 3\sigma^2) + \frac{\sigma^4}{x^6} (3\sigma^2 + 8\bar{\xi}^2) + 15 \frac{\xi \sigma^4}{x^8}. \quad (21)$$

В статье приведены варианты вероятностных расчетов при проектировании геодезических измерений, что дает возможность получить количественные характеристики показателей надежности. На основании введения показателя вероятности (R) выполнения измерений запроецированных функций расчетным путем получено значение стабильности измерения.

Рассматривая отношение стабильности к напряжению (коэффициент связанности выборки), получаем параметры распределения этой случайной величины. Выражение (17) позволяет определить нижний предел значения z , при котором с вероятностью R выполняется неравенство

$$1 \leq z \leq 2 \text{ с}_{\text{кр}} z - 1.$$

Изложенные соображения позволяют расширить подход к анализу геодезических измерений при их проектировании.

1. *Базовский И.* Надежность, теория и практика. М., 1965. 2. *Бардул Р., Прошин Ф.* Математическая теория надежности. М., 1969.

Для наблюдений за осадками массива инженерных сооружений необходимо создание единой нивелирной сети с большим числом связей. Если продолжительность цикла значительна и, кроме того, территория подвержена выраженным воздействиям короткого периодаических сезонных вариаций, например, уровня грунтовых вод, то уравнивание наблюдений в дикле по обычной методике метода наименьших квадратов (МНК) приводит к распределению по сети погрешностей наблюдений, допущенных в отдельных ходах, и нивелированию влиятельный сезонных вариаций на основании сооружений.

Особенностью наблюдений за вертикальными деформациями конетруктивно не связанных между собой зданий является стремление определить с наибольшей точностью превышения марок, расположенных на одном здании, в сравнении с превышениями для марок на разных зданиях.

В этом случае следует организовать наблюдения и обработку их результатов таким образом, чтобы точность, достигнутая при нивелировании осадочных марок на одном здании, не понижалась за счет погрешностей, допущенных на других участках сети и чтобы эти погрешности локализовались в связях между зданиями. Методика построения, уравнивания и оценки точности одноклассной нивелирной сети, приводящая к решению такой задачи, реализуется следующей программой:

1. Нивелирование осадочных марок по отдельным группам конструктивно связанных зданий замкнутыми ходами с целью образования первичных полигонов, невязки которых содержат лишь погрешности измерений.

2. Соединение первичных полигонов связующими ходами и привязка к опорным реперам с целью получения системы вторичных полигонов с узловыми точками, невязки которых содержат как погрешности измерений в ходах, образовавшихся полигон, так и влияние внешних факторов на отметку здания по высоте.

3. Уравнивание и оценка точности. Очевидно первый и второй пункты пояснений не требуют. Рассмотрим третий.

Уравнивание первичных полигонов состоит в вычислении поправок

$$v_{i,j} = -\omega_i/n_i, \quad j = 1, 2, \dots, n_{i-1} \quad (1)$$

и введения их в измеренные превышения $h_{i,j+1}$, где i — номер полигона; ω_i , n_i — невязка и число штативов соответственно; j — порядковый номер осадочной марки.

Превышения

$$h_{i,j+1} = h_{i,j+1} + v_{i,j} \quad (2)$$

принимая за окончательные, которые каким-либо изменением в процессе последующего выравнивания не подлежат. Точность положения марки j относительно начальной в полигоне определяем по формуле

$$m_j = \mu_1 \sqrt{N_j}, \quad (3)$$

где средняя квадратическая погрешность штатива

$$\mu_1 = \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{n} \right] / N_1}, \quad (4)$$

N_1 — число первичных полигонов.

В первичных полигонах μ_1 равна значению средней квадратической погрешности после выравнивания. Действительно, так как один первичный полигон дает одно избыточное измерение, то, учитывая формулу (1) и полагая $r=1$, получаем

$$\mu_{1, \text{ур}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} = \sqrt{\frac{n_1 \left(-\frac{\omega_1}{n_1} \right)^2 + n_2 \left(-\frac{\omega_2}{n_2} \right)^2 + \dots}{N_1}} = \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{n} \right] / N_1}, \quad (5)$$

где r — число избыточных измерений. Коэффициент n_i в числителе под радикалом показывает число поправок v_j в полигоне с номером i .

Сеть вторичных полигонов состоит из N_2 полигонов. K узловых точек, S — ходов. Ход — сторона вторичного полигона между узловыми точками — может состоять из уравненного на первом этапе первичного полигона, его элемента, связующего хода либо комбинации перечисленных элементов. Чтобы поправки из уравнивания отличались от нуля лишь в связующих ходах, погоним веса ходов, образованных из первичных полигонов аномально связующих ходов и воспользуемся обычным алгоритмом выравнивания МНК.

Уравненные отметки H_i узловых точек и их средние квадратические погрешности m_i используем для распространения единой системы высот по сети

$$H_{ij} = H_i + \sum_{s=1}^{j-1} h_{i,s,s+1},$$

$$i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, n_{i-1} \quad (6)$$

и оценки точности

$$m_{H_{ij}} = \sqrt{m_i^2 + \mu_1^2 n_j}, \quad (7)$$

где

$$m_i = \mu_1 \sqrt{1/P_i}, \quad (8)$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{[pv'^2]}{S-K}}, \quad (9)$$

v' — поправки в связующие ходы из выравнивания вторичных полигонов.

Таким образом, точность определения вертикальной деформации сооружения характеризуется формулой (3), а передача высот по сети — формулой (7), которые приводят к существенно различным значениям из-за слагаемого m_i^2 . Рассмотрим особенности введении m_i . Так как при выравнивании невязки вторичных полигонов распределяются лишь на связующие ходы, состоящие, как правило, из 1—2 штативов, то абсолютные значения поправок v'' могут оказаться значительно больше, чем v' , соответствующие общепринятой методике выравнивания; стороны предельно уравненных первичных полигонов беззощибочны и их остаточные погрешности способом назначения весов переводятся в систематические, поэтому появляется неравенство*

$$[pv''^2] \gg [pv'^2] = \min. \quad (10)$$

Известно, что нарушение основного принципа МНК ведет к потерю эффективности оценок.

Расматривая (10) как предел, к которому следует стремиться, оценем допустимую границу неравенства в (10) сверху, при которой еще можно пользоваться результатами уравнительных вычислений.

Пусть поправки v'' — совокупность величин, содержащих случайную и неслучайную компоненту, а разность $(S-K)$ — число степеней свободы. Интеграл практически допустимых эмпирических значений дисперсии σ^2 случайной величины оценивается формулой (11),

$$P \left(\sigma^2 \frac{\chi_1^2}{k} < \tilde{\sigma}^2 < \sigma^2 \frac{\chi_2^2}{k} \right) = 1 - q/100, \quad (11)$$

где k — число степеней свободы; χ^2 — распределение Пирсона; q — уровень значимости, %.

В (11) точное значение дисперсии σ^2 неизвестно. Приближенную оценку σ^2 получим на основании следующих соображений. Средняя квадратическая погрешность единицы веса, найденная по невязкам замкнутых фигур, больше либо равна ее аналогу из выравнивания, принимаемого в качестве эмпирической характеристики σ . Формула среднего отношения весов измеренных величин к весам уравненных дает возможность получить приближенную, но практически достаточно удовлетворительную оценку при любом законе распределения случайных величин [3]:

$$(P/p)_{\text{ср}} = S/K = \frac{\mu_{\text{изм}}^2}{\mu_{\text{ур}}^2}, \quad (12)$$

* Вывод об увеличении дисперсии единицы веса за счет мешающего параметра имеется в [2].

где P, p — веса уравненных и измеренных величин K ; S — число необходимых измеренных величин.
Полагая

$$\mu_{\text{изм}} = \mu_{\omega} = \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{n}\right] / N}, \quad (13)$$

найдем

$$\mu_{\text{ур}} = \sqrt{K/S} \mu_{\omega}, \quad (14)$$

квадрат которой и применим в качестве приближенной оценки σ^2 .

Теперь интервал практически допустимых значений эмпирической средней квадратической погрешности $\mu^2 = \sigma$ при уровне значимости $q = 5\%$ по формуле (11) будет

$$\left[\chi(1 - q/2, S - K) \sqrt{\frac{K}{S(S - K)}} \mu_{\omega} \chi(q/2, S - K) \sqrt{\frac{K}{S(S - K)}} \mu_{\omega} \right]. \quad (15)$$

В данном случае интерес представляет лишь верхняя граница значений μ_2 . Поэтому можем записать

$$\mu_2 = \chi(0,025, S - K) \sqrt{\frac{K}{S(S - K)}} \mu_{\omega}; \quad (16)$$

$$\mu \leq \mu_2. \quad (17)$$

Оценку μ назовем квазиэффективной.

Невыполнение этого условия рассматриваем как признак наличия в сети вторичных полигонов значительных систематических погрешностей, приводящих к недопустимому нарушению принципа $[pv^2] = \text{min}$. Предполагается, что предварительный контроль выявления систематических погрешностей в ходах первичных полигонов, например разностей двойных измерений [3], выполнен и соответствующие поправки при необходимости введены еще до подсчета невязок по вторичным полигонам.

Смещение оценок μ_2 и H_i рассмотрим на примере простой нивелирной сети (рис. 1), взятой из [4]. Уравнивание выполнено по шести вариантам назначения весов измеренных превышений. Первый вариант соответствует стандартной схеме уравнивания $p_1 = 1,2$, $p_2 = 0,9$, $p_3 = 1,1$, $p_4 = 1,5$, $p_5 = 0,9$, $p_6 = 0,7$, $p_7 = 1,1$, $p_8 = 1,0$; второй — $p_5 = 100$; третий — $p_2 = 100$; четвертый — $p_2 = p_5 = 100$; пятый — $p_3 = p_8 = p_9 = 100$; шестой — $p_2 = p_4 = p_6 = 100$.

По каждому варианту получены $[pv^2]$, μ_{ω} , μ_2 , H_i ур и смещения $\delta H_{\text{ср}}$ относительно H_i в первом варианте.

На основании проведенных вычислений сделаны следующие выводы:

- Сумма $[pv^2]$ по первому варианту оказалась наименьшей.
- При одинаковом числе сторон с назначенными аномально большими весами сумма $[pv^2]$ наибольшая в том варианте, в котором аномальный вес приписан стороне полигона, получающей

существенную поправку из уравнивания по основному варианту, и возрастает незначительно, если поправка мала.

3. Смещение уравнивающих отметок H_i в среднем по сети не существенно, если μ удовлетворяет условию (17), можно уменьшить, если измеренные превышения, получившие большие поправки из уравнивания, исправить и повторить уравнивание, не меняя при этом систему назначенных весов.

Используем полученные результаты при уравнивании производственной нивелирной сети (рис. 2) по трем циклам наблюдений. Связующих ходов и сторон вторичных полигонов в сети, не подлежащих уравниванию, оказалось 64 и 32 соответственно.

После уравнивания восемь связующих ходов получили v^2 по абсолютной величине в пределах 2...4 мм, остальные 0...2 мм, т. е. большие поправки локализовались в 12% связей между зданиями. Величины μ в двух последних циклах превзошли расчетные μ_2 .

Исправляя измеренные превышения по восьми связующим ходам найденными поправками и повторив уравнивание, получим μ , которые имеют существенно меньший порог оценки. Смещения $\delta H_{\text{ср}}$ оказались не более 0,25 мм. Точность первичных полигонов и $\mu_{\text{ур}}$ сети вторичных полигонов получились существенно различ-

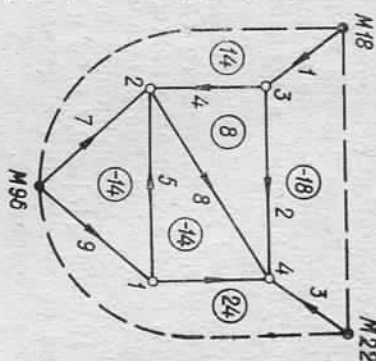


Рис. 1. Схема простой сети. \circ — определяемые марки; 24 — невязки.

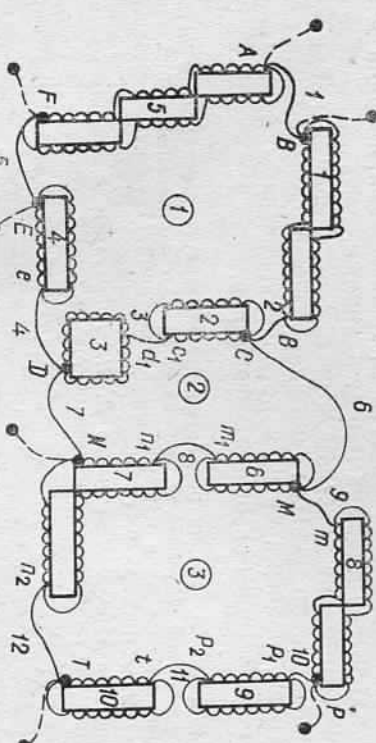


Рис. 2. Схема нивелирной сети (фрагмент):

$M=10$, $N=3$; A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z — узловые марки. Вспомогательный полигон № 1: AB+BC+CD+DE+EF+FA, где AB=связ. ход; 1; BC=диагональ; периметр. полигона; В+связ. ход; 2; CD=диагональ; DE=связ. ход; 4+Е; EF=связ. ход; 5; FA=диагональ; связь. ход; 3+д.д. $\gamma \neq 0$ для связующих ходов; для сторон типа RT поправки V_{RT} распределяются на ходы 10 и 11 пропорционально числу штативов d_{RT} и d_{11} .

Д. С. ХИЖАК, Р. А. ГРИГОРЧУК, Н. И. КРАВЦОВ
**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВКИ ЗА РЕФРАКЦИЮ
 ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
 И МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ
 ПРИ ДВУХ СОСТОЯНИЯХ АТМОСФЕРЫ**

Как показано в [1], уравнение световой кривой при небольших расстояниях можно представить в виде ряда

$$z = z'_0 x + \frac{z''_0}{2!} x^2 + \dots \quad (1)$$

Здесь z'_0, z''_0 — производные от z по x в начале координат. Величина z_0 — тангенс угла наклона α , а z'_0, z''_0, \dots можно получить из уравнения Эйлера

$$nz'' = n'_z [1 + (z')^2] \quad (2)$$

путем его дифференцирования.

Естественно, что для различных состояний атмосферы свет между двумя точками будет проходить по различным кривым, т. е. z'_0, z''_0, \dots будут иметь разные значения. Учитывая, что эти кривые пересекаются в начале координат и в точке, из которой приходит излучение, и ограничиваясь только двумя членами разложения (1) (это возможно, когда расстояния между точками небольшие), запишем

$$x \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{z''_0}{2!} x^2 = x \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{z''_0}{2!} x^2. \quad (3)$$

Индексы 1 и 2 обозначают первое и второе состояния атмосферы, которым соответствуют измеренные значения углов α_1 и α_2 , а z''_0 и z''_0 получены из (2). Причем, показатель преломления n и его производную n'_z в начале координат получаем из соотношений

$$n_0 = 1 + \frac{\beta \mu}{R} \cdot \frac{P_0}{T_0}, \quad (4)$$

$$n'_{z0} = \frac{\beta \mu}{RT_0^2} (P_1 T_0 - t_1 P_0),$$

где β — постоянная, зависящая от длины волны падающего излучения; μ — масса моля; R — газовая постоянная; P_0 и T_0 — давление и температура в начале координат; P_1 и t_1 — соответственно градиенты давления и температуры в начале координат. Зависимости (4) получены из решения уравнения состояния атмосферы с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона и формулы Даламбера-Лапласа.

и: 0,27, 0,26, 0,26 и 1,03, 0,98, 0,76 мм/шт. соответственно. При на следующий в течение 2, ..., 3 ч, в то время как измерения преобладают в сторону вторичных полигонов в некоторых случаях — сместились к разным (до 5 сут) датам. Продолжительность циклов составляла 10 сут.

Здания расположены на территории со сложными грунтовыми условиями, основания подвержены воздействию периодических колебаний уровня грунтовых вод. Поэтому невязки первичных полигонов можно рассматривать как следствие лишь погрешностей измерений, а невязки вторичных полигонов — погрешностей измерений и некомпенсированного влияния периодических колебаний уровня грунтовых вод на основания фундаментов. Подтверждением последнего служат коэффициенты парной корреляции, подсчитанные по каждому зданию (всего 73), значения которых для рядов, составленных по измеренным осадкам и колебаниям уровней грунтовых вод в скважинах оказались: $|r| \geq 0,7$ в 19,0, $0,5 \leq |r| < 0,7$ в 26 и $|r| < 0,5$ в 28 случаях. При этом значения со значимыми и незначимыми коэффициентами r иногда перемежаются.

Так как погрешность отметок узловых точек при данной мере точнее раздельного уравнивания не влияет на точность определения деформаций зданий, расположенных между ними, а лишь на точность вывода средней осадки сооружения, то ясно, что μ может быть грубее чем μ , используемая в (3) при оценке деформации.

Таким образом, применяя предлагаемую схему наблюдений и уравнивания добиваемся разделения точностных характеристик сети на две части — для оценки деформации зданий μ , и передачи системы высот по сети μ ; локализации влияния неслучайного характера в связях между зданиями.

Данная методика рекомендуется при организации наблюдений за осадками значительных групп зданий, расположенных на сложных грунтах, подверженных короткопериодическим и непериодическим воздействиям экзогенных факторов.

1. *Белугин Д. А.* Теория обработки результатов геодезических и астрономических измерений. М., 1984. 2. *Байков В. В.* О состоятельности МНК-оценок в геодезических задачах с мешающими параметрами // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотогиземка. 1985. № 2. С. 40—47. 3. *Болдыков В. Д.* Теория ошибок наблюдений. М., 1983. 4. *Болдыков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математики геодезических измерений. М., 1977.

Статья поступила в редакцию 05.04.86