

нии себестоимости геодезических измерений, обусловленном исключением из работы дорогостоящих комплектов теодолита и нивелира, уменьшением количества переносимых геоприборов, сокращением затрат полезного времени, выверкой закрытых непрозрачными преградами строительных конструкций, контролем монтажа в затемненных помещениях, обеспечением безопасности работы исполнителей.

1. Видуев Н. Г., Баран П. И., Волынец С. П. и др. Геодезические разбивочные работы. М., 1973. 2. Видуев Н. Г., Гржибовский В. П., Подрегина В. В. Геодезические работы при крупнопанельном строительстве. К., 1963. 3. ГОСТ 10529-70. Теодолиты. Типы, основные параметры и технические требования. Введ. 01.01.73. 4. Давыденко Т. С. Организация и производство геодезических работ при крупном строительстве. М., 1975. 5. Пискунов М. Е. О разработке методики наблюдений за осадками сооружений геодезическими методами // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотогелемта. 1974. Вып. 1. С. 83-84. 6. Справочник по инженерной геодезии / Под ред. Н. Т. Видуева. К., 1978. 7. Сундаков Я. А. Геодезические работы при возведении крупных промышленных сооружений и строительных конструкций методом горизонтального луча // Инженерная геодезия. 1981. Вып. 24. С. 33-36. 9. Чемрат В. Д. Исследование точности метода геодезического контроля монтажа конструкций по высоте, закрытых непрозрачными преградами / Инженерная геодезия. 1982. Вып. 25. С. 9-11.

Статья поступила в редколлегию 18.01.86

УДК 528.235

Г. А. ШЕХОВЦОВ, Г. Д. ШУЛЬЦЫ

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ НА ПОГРЕШНОСТЬ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЕТИ

По координатам геодезических пунктов можно определить различные элементы сети. Оценку точности этих элементов нужно производить с учетом корреляционной зависимости погрешностей определенных координат [1]. В статье, на основании геометрической интерпретации элементов ковариационной матрицы координат пункта в виде окружности стандартов, предлагается простой способ оценки точности определения длин сторон и дирекционных углов сети. Показан характер и степень влияния математической корреляции на погрешность таких определений.

Пусть окружность стандартов (рис. 1, а) характеризует погрешность положения определяемого пункта сети относительно исходных. Теоретические основы и способы построения такой окружности, ее ориентирование относительно координатных осей и методика получения по ней необходимой информации подробно изложены в [3, 4]. Для некоторой стороны сети (а, s) стандарт расхождения σ_s равен $0-3$, а стандарт дирекционного угла $\sigma_\alpha = (0-4) \cdot 206265''$.

Указанные оценки сразу учитывают коэффи-

циент корреляции r_{xy} , характеризующий тесноту связи ошибок отыскания x и y определяемого пункта. Докажем это, помня, что стандарты координат σ_x и σ_y зависят от результатов измерения угловых и линейных элементов сети, например, при вставке пункта геодезической засечкой.

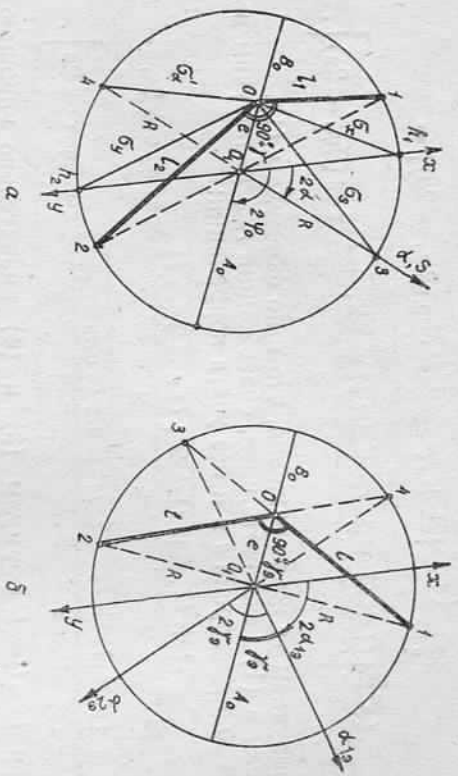


Рис. 1. Окружность стандартов (а) и эквивалентная ей окружность (б).

Стандарты расстояния s и дирекционного угла α необходимо вычислять по формулам [1]

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha + 2r_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_x \sigma_y},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{r_{xy}}{s} \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha - 2r_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_x \sigma_y}. \quad (1)$$

Представим входящие в формулы (1) слагаемые следующим образом (рис. 1, а):

$$\sigma_x^2 = e^2 + R^2 + 2eR \cos 2\varphi_0,$$

$$\sigma_y^2 = e^2 + R^2 - 2eR \cos 2\varphi_0, \quad (2)$$

$$2r_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_x \sigma_y = (A_0^2 - B_0^2) \sin 2\varphi_0 \sin \alpha \cos \alpha.$$

В [3] даны зависимости эксцентриситета e , радиуса окружности R , большой A_0 и малой B_0 полуосей эллипса ошибок от величин l_1, l_2 и r , с учетом которых формулы (1) после соответствующих преобразований принимают вид

$$\sigma_s^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} + \frac{\sqrt{l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2} \cos(2\varphi_0 - 2\alpha),$$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{(r')^2}{s^2} \left[\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} - \frac{\sqrt{l_1^4 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2} \cos(2\varphi_0 - 2\alpha) \right]. \quad (3)$$

В свою очередь из рис. 1, а следует:

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= e^2 + R^2 + 2eR \cos(2\varphi_0 - 2\alpha) = \\ &= \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} + \frac{\sqrt{l_1^2 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^2}}{2} \cos(2\varphi_0 - 2\alpha), \\ \sigma_2^2 &= \frac{(l'')^2}{s^2} [e^2 + R^2 - 2eR \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)] = \\ &= \frac{(l'')^2}{s^2} \left[\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} - \frac{\sqrt{l_1^2 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^2}}{2} \cos(2\varphi_0 - 2\alpha) \right], \end{aligned}$$

т. е. получаем те же выражения, что и по формулам (1).

Если в (1) исключить член, содержащий γ_{xy} , то получим выражение для дисперсий s и a без учета корреляции:

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} + \frac{\sqrt{l_1^2 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^2}}{2} \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha, \\ \sigma_a^2 &= \frac{(l'')^2}{s^2} \left[\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} - \frac{\sqrt{l_1^2 + 2l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^2}}{2} \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

При $l_1 = l_2 = l$ формулы (3) и (4) значительно упрощаются. Так, стандарты s и a с учетом корреляции следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= l \sqrt{1 + \cos \gamma_s \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)}, \\ \sigma_a &= \frac{l l''}{s} \sqrt{1 - \cos \gamma_s \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)}, \end{aligned} \quad (5)$$

а без учета корреляции —

$$\begin{aligned} \sigma_s &= l \sqrt{1 + \cos \gamma_s \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha}, \\ \sigma_a &= \frac{l l''}{s} \sqrt{1 - \cos \gamma_s \cos 2\varphi_0 \cos 2\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того чтобы иметь возможность пользоваться формулами (5) и (6), необходимо произвести эквивалентную замену данной окружности (рис. 1, а) с l_1, l_2 и γ другой окружностью стандартов (рис. 1, б) с l и γ_s . При этом должны сохраниться все элементы (e, R, A_0, B_0) и ориентировка окружности относительно координатных осей. Такая замена представляет интерес и с методической точки зрения. Например, при замене многократных геодезических засечек на эквивалентные им простые [2] в качестве простой получают засечку с одинаковыми длинами сторон. Если такую засечку характеризовать окружностью стандартов, то будет иметь место равенство $l_1 = l_2 = l$.

Равенство $l_1 = l_2 = l$ возникает в случае, когда диаметр 1—2 окружности перпендикулярен диаметру, проходящему через точки 0 и 0₁ (рис. 1, б). Тогда, выразив искомые величины следующим образом

$$l^2 = e^2 + R^2, \quad (2R)^2 = 2l^2(1 - \sin \gamma_s)$$

и подставив в эти выражения формулы из работы [3], имеем

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} = \frac{A_0^2 + B_0^2}{2}, \\ \sin \gamma_s &= \frac{2l_1 l_2}{l_1^2 + l_2^2} \sin \gamma = \frac{2A_0 B_0}{A_0^2 + B_0^2}, \\ 2\alpha_{1s} &= 2\varphi_0 - \gamma_s, \quad 2\alpha_{2s} = 2\varphi_0 + \gamma_s, \end{aligned} \quad (7)$$

причем эти величины можно получить путем элементарных геометрических построений.

В работе [1] отмечается, что влияние коэффициента корреляции при оценке точности определения расстояния и дирекционных

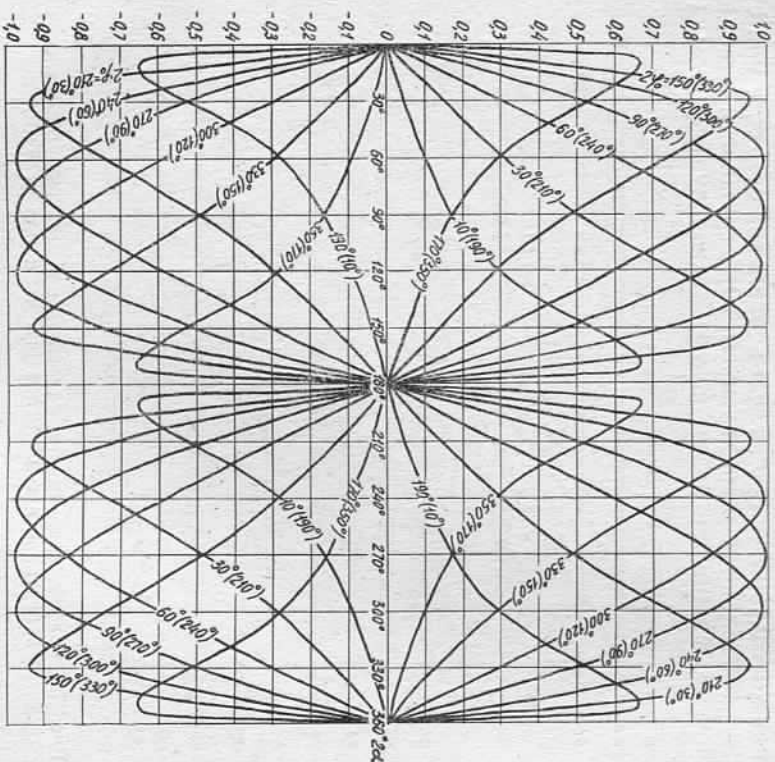


Рис. 2. График зависимости относительной ошибки определения дисперсий s и a от углов $2\varphi_0$ и 2α при $\gamma_s = 10^\circ$.

углов сети может быть существенным. Для анализа характера и степени этого влияния исследовались математические модели эквивалентных засечек с $\gamma_s = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70$ и 80° , в качестве $2\varphi_0$ и 2α были взяты значения 10, 30, 60, 90, 120, 150, 170, 190, 210, 240, 270, 300, 330 и 350° . Для них по формулам (5) и (6) подсчитаны стандарты расстояний и дирекционных углов с учетом и без

учета корреляции. Затем вычислены относительные ошибки определения дисперсий и стандартов

$$\frac{\sigma_s^2 - \bar{\sigma}_s^2}{\sigma_s^2} \text{ и } \frac{\sigma_a^2 - \bar{\sigma}_a^2}{\sigma_a^2}, \quad \frac{\sigma_s - \bar{\sigma}_s}{\sigma_s} \text{ и } \frac{\sigma_a - \bar{\sigma}_a}{\sigma_a} \quad (8)$$

По полученным данным построены графики зависимости относительных ошибок определения дисперсий и стандартов от углов $2\varphi_0$ и 2α . Для большей наглядности на рис. 2.3 приведены графики для $\gamma_0 = 10^\circ$. На этих графиках значения $2\varphi_0$ без скобок соответствуют относительным ошибкам дисперсий и стандартов s , а в скобках — относительным ошибкам дисперсий и стандартов a и отпечатаются друг от друга на 180° . В случае, когда $2\varphi_0 = 0,180$ или 360° или $2\alpha = 0,180$ или 360° , т. е. направление осей x, y или стороны сети совпадают с направлением 00 , окружности стандартов, относительные ошибки равны нулю, поскольку формулы (5) и

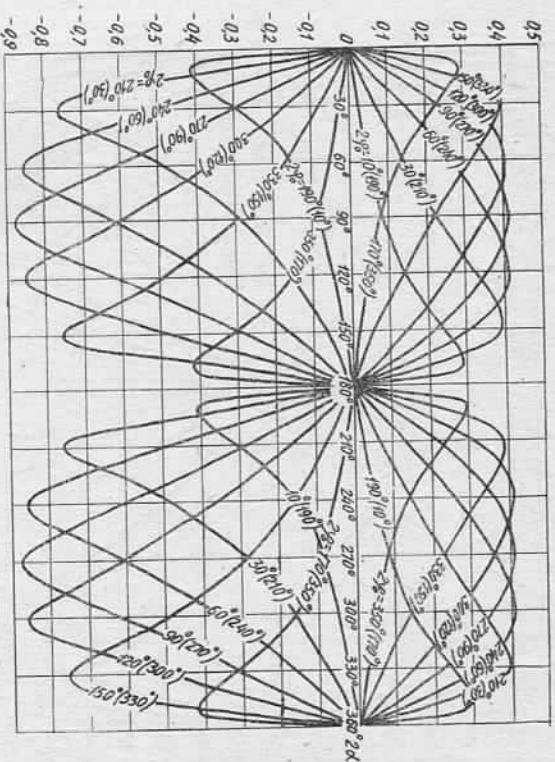


Рис. 3. График зависимости относительной ошибки определения стандартов s и a от углов $2\varphi_0$ и 2α при $\gamma_0 = 10^\circ$.

(6) дают одинаковые результаты. В других случаях относительные ошибки изменяются от нуля до некоторого экстремального значения — положительного или отрицательного. Положительные ошибки говорят о том, что неучет корреляции дает заниженные результаты дисперсий и стандартов, отрицательные ошибки свидетельствуют о завышенных результатах.

На обоих графиках (рис. 2.3) четко прослеживается одинаковая зависимость экстремальных значений относительных ошибок дисперсий и стандартов от соотношения углов $2\varphi_0$ и 2α . Положи-

тельные экстремальные значения ошибок определения дисперсий и стандартов расстояний соответствуют $2\varphi_0 + 2\alpha = \pi$ или 3π , отрицательные появляются в случае $2\varphi_0 - 2\alpha = \pi$ или $-\pi$. Положительные экстремальные значения ошибок определения дисперсий и стандартов дирекционных углов соответствуют $2\varphi_0 + 2\alpha = 2\pi$, отрицательные возникают в случае $2\varphi_0 - 2\alpha = 0$. Экстремальные значения функции (8) имеют место при $2\alpha = 90^\circ$ или 270° . Такие же выводы получены путем исследования выражений (8) на экстремум. Выражения (8) являются функциями двух переменных, которые в простейшем виде изображаются поверхностями. Графики (рис. 2.3) являются сечениями поверхностей плоскостями, соответствующими $2\varphi_0 = \text{const}$. Если от функций (8) взять часть производные по переменным $2\varphi_0 - 2\alpha$ и $2\varphi_0 + 2\alpha$, то критические точки имеют значения $2\varphi_0 - 2\alpha = 180^\circ$ и $2\varphi_0 + 2\alpha = 180^\circ$. Исследования по значениям вторых производных в этих точках или при помощи разложения функций в степенной ряд в окрестности этих точек (ограничиваясь первыми двумя слагаемыми) показали, что если n и k четные (нечетные), то функции экстремума не имеют, если n — четное (нечетное) и k — нечетное (четное), то функции имеют экстремумы (рис. 2.3).

Для указанных выше углов γ_0 подсчитаны экстремальные значения относительных ошибок определения дисперсий и стандартов s и a для соответствующих соотношений углов $2\varphi_0$ и 2α . Полученные данные иллюстрируются графиками на рис. 4, где пунктирные линии характеризуют относительные ошибки дисперсий, а сплошные линии — стандартов. Эти графики позволяют получить полное представление об экстремальных значениях относительных ошибок дисперсий и стандартов расстояний и дирекционных углов.

Радиальную ошибку M с учетом корреляции можно найти по формуле

$$M = l\sqrt{2(1 + \cos \gamma_s 2\varphi_0)}, \quad (9)$$

в которой всегда γ_0 — острый угол эквивалентной засечки, а $2\varphi_0 \leq 180^\circ$.

И, наконец, сжатие эллипса ошибок, которое может служить одним из критериев оптимизации, определяем из выражения

$$\epsilon = \frac{\cos \gamma_s - \sin \gamma_s}{\cos \gamma_s} = \sqrt{\frac{2(1 - \sin \gamma_s)}{1 + \cos \gamma_s}} \quad (10)$$

Простота приведенной методики оценки точности элементов сети с учетом корреляции делает ее доступной для массового применения в геодезическом производстве непосредственно на рабочем месте, открывает новые возможности механизации и автоматизации уравнивания с последующим получением любой информации о погрешности положения пункта и элементов сети.

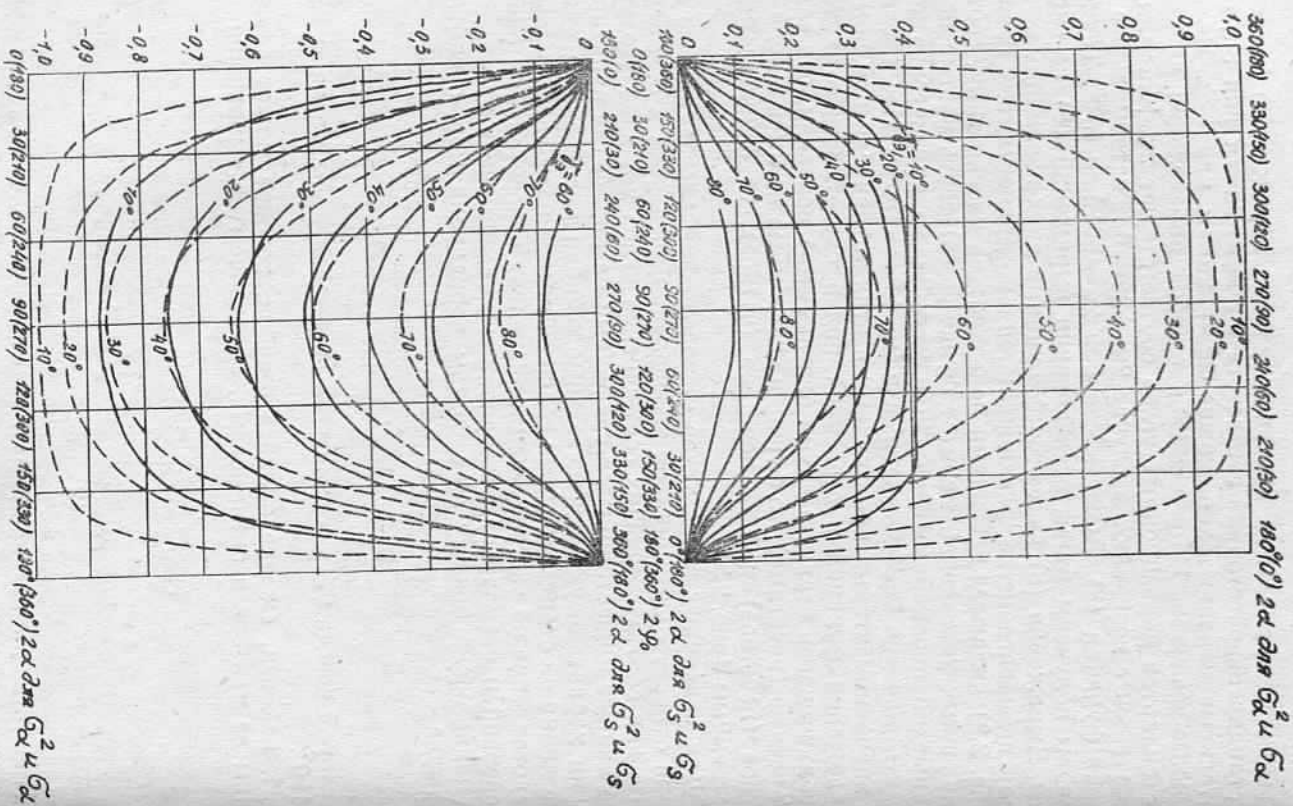


Рис. 4. Экстремальные относительные ошибки определения дисперсий и стандарттов σ^2 и σ .

1. Вудев Н. Г. Коэффициент корреляции в системе плоских прямоугольных координат // Инженерная геодезия. 1979. Вып. 22. С. 12—16. 2. Шеховцов Г. А. Метод замены многократных геодезических засечек на эквивалентные им простейшие // Геодезия, картография и аэрофотогизм. 1983. Вып. 37. С. 108—116. 3. Шеховцов Г. А. Новый способ определения элементов эллипса поперешностей и его подеры // Геодезия, картография и аэрофотогизм. 1985. Вып. 42. С. 103—108. 4. Шеховцов Г. А. Оценка точности засечек с помощью окружности стандарттов // Геодезия и картография. 1985. № 8. С. 45—47.

Статья поступила в редакцию 10.02.86