УДК 528.3:516

А. Д. НОВИКОВ, Ю. П. КОЗЛОВ, П. С. ЭФЕНДЯН

АППРОКСИМАЦИЯ УСТОЙЧИВО НАПРАВЛЕННЫХ СМЕЩЕНИЙ ОСНОВАНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПОЛИНОМАМИ, ОПИСЫВАЮЩИМИ ПОВЕРХНОСТЬ

Основания инженерных сооружений линейного типа в процессе строительства и эксплуатации испытывают устойчиво направленные смещения, представленные тенденцией и сезонными колебаниями. Как известно, тенденция аппроксимируется линейными функциями: прямой, параболой, гиперболой и показательной функцией, а сезонные колебания аппроксимируются периодическими функциями и, в частности, периодической функцией Фурье.

Степень важности определения таких смещений существенно повышается для инженерных сооружений, функционирующих на принципах высокоточной физики, которые позволяют установить совместное значение этих смещений и в отдельности каждое. Естественно, такие данные весьма необходимы как на этапе проектирования, так и при монтаже и эксплуатации сооружения.

В целях таких определений вдоль трассы сооружения намечается система точек, которые надежно закрепляются для того, чтобы можно было проводить высокоточные геодезические измерения в течение длительного времени. Геодезические измерения закрепленных точек должны выполняться по специальной программе относительно времени их проведения. По срокам исполнения наблюдения должны проводиться равномерно в течение года или нескольких лет, что обусловлено физической сущностью объекта и характером местности.

Таким образом, в программу геодезических наблюдений всегда будет входить n $(i=1, 2 \ldots, n)$ точек трассы инженерного объекта и по каждой точке будет получено m $(j=1, 2, \ldots, m)$ групп измерений в соответствующие временные моменты:

$$t_1', t_2', \ldots, t_j', \ldots, t_m'. \tag{1}$$

Поскольку устойчивое смещение точек оснований инженерных сооружений происходит в пространстве, то в каждый момент t_j будет три результата измерений по каждой точке и в целом для i-й точки

$$\begin{aligned} &V_{X1}, V_{X2}, \ldots, V_{Xj}, \ldots V_{Xm}, \\ &V_{Y1}, V_{Y2}, \ldots V_{Yj}, \ldots V_{Ym}, \\ &V_{Z1}, V_{Z2}, \ldots V_{Zj}, \ldots V_{Zm}. \end{aligned} \tag{2}$$

После обработки для каждой точки имеется три ряда значений координат:

$$\begin{aligned} &X_{i1}, X_{i2}, \ldots X_{ij}, \ldots X_{im}, \\ &Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots Y_{ij}, \ldots Y_{im}, \\ &Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots Z_{ij}, \ldots Z_{im}, \end{aligned} \tag{3}$$

которые отягощены двумя видами выше названных систематических смещений.

По каждой точке каждый ряд значений координаты представляет собою временной, динамический ряд, элементы которого по отношению к первому значению X_{i1}, Y_{i1}, Z_{i1} и друг к другу имеют систематические смещения. Кроме того, измеряемые точки представляют собою единую систему взаимосвязанных воздействий внешних и внутренних влияний. Если в этом отношении рассматривать значения определенной координаты одновременно по всем точкам, то такие величины будут представлять собою не что иное, как временное, динамическое поле.

Таким образом, значения (3), сгруппированные по каждой координате, представляют собою три временных, динамических поля. Например, по координате X:

$$\begin{array}{l} X_{11}\ X_{12}\dots X_{1j}\dots X_{1m} \\ X_{21}\ X_{22}\dots X_{2j}\dots X_{2m} \\ X_{i1}\ X_{i2}\dots X_{ij}\dots X_{im} \\ X_{n1}\ X_{n2}\dots X_{nj}\dots X_{nm}, \end{array} \tag{4}$$

аналогично по координатам Y и Z, а также по отношению к первому значению каждой точки:

$$\begin{array}{l} 0\ \Delta X_{12}\dots \Delta X_{1j}\dots \Delta X_{1m} \\ 0\ \Delta X_{22}\dots \Delta X_{2j}\dots \Delta X_{2m} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 0\ \Delta X_{i2}\dots \Delta X_{ij}\dots \Delta X_{im} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 0\ \Delta X_{n2}\dots \Delta X_{nj}\dots \Delta X_{nm} \end{array} \tag{5}$$

и аналогично по координатам Y и Z.

Каждое из трех полей (4), (5) можно аппроксимировать полиномом n-й степени. Если динамическое поле аппроксимируется полиномами, то каждая его точка должна иметь три координаты, строго фиксируя эту точку в пространстве. Кроме того, существует определенное множество полиномов, поэтому их выбор должен быть также обоснован как по виду, так и по степени.

Динамическое поле (4), (5) предполагает, что систематическим сдвигам подчинена только одна координата. С учетом поля точек получается поверхность систематических смещений аналогичных по геометрии смещениям временного ряда, но трансформированных для поверхности. В этом случае можно применить полином, аппроксимирующий поверхность

$$\Delta Z = C_0 + C_1 X + C_2 Y + C_3 XY + C_4 X^2 + C_5 Y^2 + + C_6 YX^2 + C_7 XY^2 + C_8 X^3 + C_9 Y^3 + \cdots, \tag{6}$$

где $C_0, \dots C_9$ — коэффициенты полинома; X, Y — координаты ij-й точки временного поля; ΔZ — координата ij-й точки временного поля, как значение сдвига по данной оси координат на момент времени tj.

Таким образом, полином (6) аппроксимирует смещение ΔZ над полем XY. При этом члены полинома имеют свою геометрическую интерпретацию в трехмерном пространстве X, Y, Z.

Первый член полинома описывает систематический сдвиг начала системы координат по оси Z. Второй и третий члены — равномерный наклон смещений соответственно по осям X и Y. Четвертый член раскрывает общее кручение смещений относительно осей X, Y. Если начало координат будет находиться в середине поля, то этот член будет описывать ярко выраженную симметрическую седловину. Пятый и шестой — параболические составляющие смещения соответственно по осям X и Y. Следующие два члена относятся к параболическому кручению или кручению второго порядка, разложенному по соответствующим осям координат. И наконец, последних два члена — параболы третьего порядка и т. д. Число членов полинома можно продолжить, при этом, начиная с седьмого члена, описывать периодические смещения гармониками более высоких порядков.

Полином (6) функционирует в трехмерном пространстве, что требует для временного поля своей интерпретации систем координат.

Если в процессе геодезических измерений за период времени систематически выполнялись наблюдения (2), (1), то в качестве плановых координат могут быть выбраны: отстояния наблюдаемых точек и промежутки времени между наблюдениями. Так, выбрав за ось X-в расстояния между наблюдаемыми точками, можно по этой оси установить их взаимное положение. Когда точки находятся на кривой, кривая может быть развернута в прямую.

В этом случае в качестве оси Y следует выбрать ось времени, отождествив временные координаты с линейными таким образом, чтобы временное поле представляло собою примерно квадрат. Так, если длина трассы измеряемых точек S, то временные координаты (1) примут значения

$$t_{ij}=\frac{S}{t'_m-t'_1}\,(t'_j-t'_1). \tag{7}$$

Таким образом, построенное временное поле точек в качестве плановых координат будет иметь значения X_{ij} и t_{ij}, а третьей координатой будут смещения ΔX_{ij} или ΔY_{ij}, или ΔZ_{ij} (5).

Тогда смещение каждой точки i на момент времени j по каждой оси координат X, Y, Z (5) может быть аппроксимировано своим полиномом (6):

$$\begin{aligned}\Delta X_{ij}&=a_{X0}+a_{X1}X_i+a_{X2}t_j+a_{X3}X_it_j+a_{X4}X_i^2+\\&+a_{X5}t_j^2+a_{X6}X_i^2t_j+a_{X7}X_it_j^2+a_{X8}X_i^3+a_{X9}t_j^3+\cdots,\\ \Delta Y_{ij}&=a_{Y0}+a_{Y1}X_i+a_{Y2}t_j+a_{Y3}X_it_j+a_{Y4}X_i^2+\\&+a_{Y5}t_j^2+a_{Y6}X_i^2t_j+a_{Y7}X_it_j^2+a_{Y8}X_i^3+a_{Y9}t_j^3+\cdots,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\Delta Z_{ij} = a_{Z0} + a_{Z1} X_i + a_{Z2} t_j + a_{Z3} X_i t_j + a_{Z4} X_i^2 + + a_{Z5} t_j^2 + a_{Z6} X_i^2 t_j + a_{Z7} X_i t_j^2 + a_{Z8} X_i^3 + a_{Z9} t_j^3 + \dots$$

Каждый из полиномов (8) имеет свои коэффициенты a_X, a_Y, a_Z, которые, как неизвестные, должны быть определены по результатам геодезических наблюдений.

Анализируя в этом отношении полиномы (8), следует отметить, что в таком их содержании каждый полином имеет 10 неизвестных, коэффициентами при которых выступают координаты и их функции, известные с достаточной степенью точности. Значения величин смещений также получены в (5) по результатам измерений с наперед заданной точностью. В этом случае для определения неизвестных коэффициентов полиномов может быть применен математический аппарат метода наименьших квадратов с уравниванием параметрическим способом.

Для этого по каждому полиному составляются уравнения поправок следующего вида:

$$\begin{gathered} a_{X0} + X_i a_{X1} + t_j a_{X2} + X_i t_j a_{X3} + X_i^2 a_{X4} + t_j^2 a_{X5} + \\ + X_i^2 t_j a_{X6} + X_i t_j^2 a_{X7} + X_i^3 a_{X8} + t_j^3 a_{X9} - \Delta X_{ij} = v_{Xij}, \\ a_{Y0} + X_i a_{Y1} + t_j a_{Y2} + X_i t_j a_{Y3} + X_i^2 a_{Y4} + t_j^2 a_{Y5} + \\ + X_i^2 t_j a_{Y6} + X_i t_j^2 a_{Y7} + X_i^3 a_{Y8} + t_j^3 a_{Y9} - \Delta Y_{ij} = v_{Yij}, \\ a_{Z0} + X_i a_{Z1} + t_j a_{Z2} + X_i t_j a_{Z3} + X_i^2 a_{Z4} + t_j^2 a_{Z5} + \\ + X_i^2 t_j a_{Z6} + X_i t_j^2 a_{Z7} + X_i^3 a_{Z8} + t_j^3 a_j^3 a_{Z9} - \Delta Z_{ij} = v_{Zij}. \end{gathered} \tag{9}$$

По уравнениям поправок (9) формируются три системы уравнений поправок соответственно для каждого полинома. Эти системы уравнений поправок характерны равенством всех элементов нерасширенных матриц, если для всех трех полиномов выбираются одни и те же точки временного, динамического поля. Возможно и попарное равенство матриц в любых комбинациях, сочетаниях. Это обусловлено как выбором точек, так и наличием значений величин (5), определенных по результатам измерений.

В общем виде системы уравнений поправок можно записать

$$a\bar{X} - \bar{l} = v, \tag{10}$$

где a — матрица системы уравнений поправок для каждого полинома соответственно a_X, a_Y, a_Z, элементы которых X_i, t_j или их функции; $\bar{X}$ — вектор неизвестных для каждого полинома — коэффициенты a_{Xk}, a_{Yk}, a_{Zk} ($k=0, 1, 2, \dots, k$); $\bar{l}$ — вектор свободных членов соответственно для полиномов ΔX, ΔY, ΔZ.

По системе уравнений поправок получают систему нормальных уравнений:

$$a^{\mathrm{T}}a\bar{X}-a^{\mathrm{T}}\bar{l}=0, \qquad (11)$$

или в общем виде

$$A\bar{X}=\bar{L}.$$

Если имеет место равенство матриц, правомерна запись

$$A\bar{X}_X,\ \bar{X}_Y,\ \bar{X}_Z=\bar{L}_X,\ \bar{L}_Y,\ \bar{L}_Z. \qquad (12)$$

Значения неизвестных определяются как

$$\bar{X}_X,\ \bar{X}_Y,\ \bar{X}_Z=A^{-1}\cdot\bar{L}_X,\ \bar{L}_Y,\ \bar{L}_Z. \qquad (13)$$

Если же измерения на точках различаются полнотою, что приводит к необходимости использования разных точек, то для (10) имеет место: $a_X \neq a_Y \neq a_Z$ и

$$a_X\bar{X}_X-\bar{l}_X=v_X,\quad a_Y\bar{X}_Y-\bar{l}_Y=v_Y,\quad a_Z\bar{X}_Z-\bar{l}_Z=v_Z. \qquad (14)$$

Тогда последовательно повторяются три вычислительных процесса

$$a_x^{\mathrm{T}}a_xX_x=a_x^{\mathrm{T}}\bar{l}_x,\quad a_y^{\mathrm{T}}a_y\bar{X}_y=a_y^{\mathrm{T}}\bar{l}_y,\quad a_z^{\mathrm{T}}a_z\bar{X}_z=a_z^{\mathrm{T}}\bar{l}_z,$$

или

$$A_X\bar{X}_X=\bar{L}_X,\quad A_Y\bar{X}_Y=\bar{L}_Y,\quad A_Z\bar{X}_Z=\bar{L}_Z \qquad (15)$$

и неизвестные находятся как

$$\bar{X}_X=A_X^{-1}\bar{L}_X,\quad \bar{X}_Y=A_Y^{-1}\bar{L}_Y,\quad \bar{X}_Z=A_Z^{-1}\bar{L}_Z. \qquad (16)$$

Конечно, значительное увеличение объема вычислений (14)—(16) по сравнению с (10)—(13) очевидно, поэтому нужно стремиться точно соблюдать программу геодезических наблюдений.

Как видно из выражений (8), полиномами аппроксимируется не кривая смещения отдельно исследуемой точки, а смещение системы точек, развернутое во времени. Таким образом, полиномами (8) аппроксимируется поверхность смещения системы точек, дифференцированно по осям координат, т. е. разложенного на три ортогональных направления.

Исходя из геометрической трактовки членов полинома и его возможностей, следует остановиться на двух особенностях этого математического аппарата.

Прежде всего это аппроксимация всего множества точек, относящегося к данному временному полю, а не только тех, которые наблюдались по программе геодезических измерений, если, конечно, за период $t_j'-t_1'$ не произошло каких-либо непредвиденных смещений. Это позволяет в определенной степени даже сокращать объем геодезических работ.

В то же время необходимо учитывать геометрическое содержание каждого члена полинома и выбирать точки на временном поле в тех местах, где максимально проявляет себя каждый член. Кроме того, число точек должно обеспечивать процесс уравнительных вычислений по алгоритму (10)—(13) или (14)—(16), т. е. оно должно быть больше числа неизвестных в полиноме и по отношению к каждому члену, согласно его геометрической сущности.

Как правило, точки выбираются в углах исследуемого поля смещений, в середине его сторон и в центре поля. Этим поле делится на четверти. Затем деление четвертей может продолжаться на более мелкие четверти аналогичным образом. Так же, как и степень полинома, этот процесс обусловлен особенностями исследуемого объекта, характером наблюдаемых смещений и степенью точности их определения.

Когда вычислены неизвестные, т. е. найдены коэффициенты полинома, считается, что полином определен, и тогда, применяя выражения (8), можно вычислять величины смещений любых других точек временного поля, не участвовавших в вычислении полинома. Для таких точек будут получены ΔX_{ij}, ΔY_{ij}, ΔZ_{ij}, знаки которых будут говорить о направленности смещений на момент времени t_j, а их величины о сдвигах в направлениях осей координат. Суммарный, результирующий сдвиг определяется как длина вектора

$$R_{ij}=\sqrt{\Delta X_{ij}^2+\Delta Y_{ij}^2+\Delta Z_{ij}^2}\,, \tag{17}$$

нахождение угловой направленности которого также не является сложным.

Анализируя члены полученного в процессе вычислений полинома, можно установить характер смещений исследуемых точек основания сооружения. Так, члены полинома первой степени будут показывать линейный характер тенденции смещения временного поля, т. е. плоскость сдвига и наклона поверхности. Если рассматривать включительно члены второй степени, то будет описана параболическая тенденция поверхности смещений, относящаяся так же, как и линейная к тектоническим или к оползненным факторам. Величины смещений, описанные членами третьей и более высоких степеней, будут раскрывать сезонные колебания, относящиеся к смещениям периодического характера.

Таким образом, математический аппарат полиномов, описывающих поверхность, является мощным средством исследования систематических сдвигов оснований сооружений как временных динамических полей.

Статья поступила в редколлегию 04. 09. 91