УДК 528.33

К. Р. ТРЕТЯК

УЗАГАЛЬНЕНИЙ КРИТЕРІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ

Оптимальне проектування геодезичних мереж представляє собою ціленаправлений і економічно обгрунтований перенос апріорної вимірювальної інформації на математичній моделі мережі. Математична модель мережі — це план вимірювального експерименту, базованого на геометрично локалізованій сукупності опорних пунктів. Одиничними елементами, які підлягають вимірам, є лінії, кути, напрямки, перевищення. Вони можуть утворювати модулі — ходи геометричних систем пунктів (трикутники, центральні системи, ланцюги геометричних фігур). Процес оптимізації мережі відображається широким спектром оптимізаційних параметрів.

Для простоти оперування умовно поділяємо їх на такі групи:

Тип і характеристики параметрів	Економічні	Точнісні	Геометричні
Вимірювальні	$Э_и$	$М_и$	$Г_и$
Результуючі	$Э_р$	$М_р$	$Г_р$

До вимірювальних параметрів належать окремі кути, напрямки, лінії і перевищення, тобто одиничні елементи, які можуть бути об'єктом безпосередніх вимірів. До результуючих параметрів відносяться всі одиничні елементи мереж, а також утворені ними модулі (ходи, мережі), тобто всі характеристики геодезичних побудов, які визначаються за сукупністю виконаних вимірів.

Утворені групи поділяємо на підгрупи, що характеризують фізичні властивості параметрів. Таких підгруп у кожній групі три. Диференціюються підгрупи за економічними, точнісними і геометричними характеристиками.

Економічні параметри виражаються у вартісних і часових одиницях, точнісні — у лінійних, кутових, площадних, об'ємних і безрозмірних одиницях, а геометричні — у безрозмірних та інформаційних одиницях.

До параметрів першої групи $Э_u$ відносяться параметри, що характеризують вартість або трудоємкість одиничних вимірів, до M_u — параметри, що характеризують точність виконання одиничних вимірів, а до Γ_u — параметри, що описують геометричні характеристики одиничних елементів (кутів засічок, довжини ліній тощо).

До параметрів другої групи $Э_p$ належать економічні параметри, що характеризують вартість і трудоємкість цілого комплексу вимірів, а також, виходячи з сукупності робіт, собівартість одиничних вимірів (вартість і трудоємкість підготовчих і польових робіт, обробка вимірів, транспортні витрати); до M_p відносяться характеристики очікуваної точності геодезичних мереж у цілому, а також точності параметрів, визначення яких неможливе безпосередніми вимірами (швидкість зміщення пунктів, деформаційні параметри мереж); до Γ_p відносяться параметри, що описують геометричні характеристики мереж й інформативність окремих вимірів, отриманих у результаті обробки мереж (густота і рівномірність розташування пунктів, витягнутість ходів), інформативність окремих вимірів, отриманих у результаті обробки мереж (густота і рівномірність розташування пунктів, витягнутість ходів, інформативність вимірів ліній, напрямків, перевищень).

Всі параметри залежно від типу задач можуть ідентифікуватись як задані, допустимі, оптимальні, максимальні та мінімальні і бути функціонально взаємозв'язаними з коваріаційною матрицею вимірів, фізичними умовами проектного середовища (рельєф місцевості, економічні характеристики тощо). Деталізуючи запропоновану класифікаційну систему, можна ідентифікувати всі параметри, що відображають оптимальне проектування геодезичних мереж різноманітного призначення. Різний фізичний зміст оптимізаційних параметрів значно ускладнює задачу багатоцільової оптимізації, оскільки вимагає узагальненого обліку фільтрації і зважування інформації різноманітної фізичної природи. Це пояснюється тим, що на даний час поки що немає універсальних алгоритмів розв'язування різних задач оптимального проектування геодезичних мереж. Відомі у літературі алгоритми, як правило, застосовуються для розв'язання будь-якої конкретної задачі. Сприйняті вхідні дані цих алгоритмів вміщують тільки необхідну інформацію.

З [1, 3] відомо, що обробка різноманітної інформації виконується за допомогою трьох фільтрів. Перший, фізичний фільтр визначає пропускну властивість каналу. При проектуванні геодезичних мереж це є граничні об'єми розв'язування задач залежно від можливостей застосованої обчислювальної техніки, допустимі значення окремих параметрів.

Другий, семантичний фільтр пропускає тільки ту інформацію, яка необхідна для розв'язання конкретної задачі. Це інформація про всі параметри, які входять у цільову функцію, системи обмежень, з якими функціонально взаємозв'язані, шукані і задані. Так, інформація про цифрову модель місцевості буде непотрібною при оптимізації ваг вимірів у мережі з заданою схемою вимірів.

Останній прагматичний фільтр відбирає виключно корисну інформацію, яка визначає величину цільової функції. Так, доповнюючи схему мережі окремими вимірами або підвищуючи її точність, ми підвищуємо точність параметрів усієї мережі, але це буде корисним тільки для тих параметрів, значення яких не задовольняють задану точність. Для оцінки корисної інформації необхідно виконати диференціацію узагальненої інформації, в чому і полягає призначення прагматичного фільтра.

При створенні алгоритмів оптимального проектування геодезичних мереж розробка перших двох фільтрів не викликає ніяких труднощів. Для реалізації прагматичного фільтра однозначного підходу поки що немає. Навіть найбільш спрощені задачі оптимізації, де необхідно зважувати різноманітну точнісну інформацію про шукані параметри (наприклад, точність координат пунктів, напрямків, довжин ліній), та запропонована система (A, D, E, I, G) критеріїв, функціонально взаємозв'язаних з коваріаційною матрицею, визначаючою точнісні характеристики мережі, не мають обгрунтованих рекомендацій щодо вибору найбільш ефективного критерію. Для підрахунку кількості відфільтрованої інформації необхідно розробити механізм інтегрування інформації різної фізичної природи. У теорії інформації мірою кількості інформації є ентропія, яка базується на методі ймовірностей до оцінки різних подій. Ентропія як міра об'єму вектора невідомих лежить в основі алгоритму, розробленого Ю. М. Нейманом [2], для проектування геодезичних мереж з мінімальним числом вимірів, які забезпечують задану точність визначення координат. Однак в задачах багатоцільової оптимізації геодезичних мереж ми спостерігаємо події рівної імовірності, але з різноманітною фізичною інформацією, а у [2] виконується зважування рівноцінної інформації (точність координат пунктів при прагненні до їх рівноточності). Отже, однакові події (конкретні і рівноточні виміри) мають різний внесок у точність визначення координат пунктів, що вдало інтерпретується як імовірність події. У випадку багатоцільової оптимізації маємо неспівставну інфрмацію, яка існує, а не виникає з якоюсь імовірністю, а отже, не може інтерпретуватися як імовірність події.

До виведення узагальненої оцінки інформації підійдемо іншим шляхом. Відомо, що вибір експерименту базується на мінімізації функції втрат експерименту [4]:

$$R(\varepsilon)=\tau+\psi[K(\varepsilon)], \qquad (1)$$

де τ — витрати на експеримент; ψ —деякий функціонал, залежний від кореляційної матриці оцінок параметрів.

Більш детально узагальнену функцію втрат для будь-якої задачі проектування мережі згідно з запропонованою класифікацією можна записати у такій формі:

$$R(\varepsilon)=(Э_u-\hat{Э}_u)+(M_u-\hat{M}_u)+(Г_u-\hat{Г}_u)+$$
$$+(Э_p-\hat{Э}_p)+(M_p-\hat{M}_p)+(Г_p-\hat{Г}_p), \qquad (2)$$

де $(Э_u-\hat{Э}_u)$, $(M_u-\hat{M}_u)$, $(Г_u-\hat{Г}_u)$, $(Э_p-\hat{Э}_p)$, $(M_p-\hat{M}_p)$, $(Г_p-\hat{Г}_p)$ — штрафні функції втрат на реалізацію проекту і втрати очікуваних точнісних параметрів, параметрів вимірів і геометричних характеристик мережі. Функції з символом «$\wedge$» характеризують допустимі параметри, а решта функцій представлені біжучими параметрами мережі. У випадку відсутності допустимих умов на параметри одного з доданків (2) він, залежно від умов задачі, перетворюється у звичайну функцію втрат або повністю знищується.

Отже, загальна цільова функція (2) буде представлена у вигляді шести доданків:

$$R(\varepsilon)=Э''_u+Э''_p+M'_u+M''_p+Г'_u+Г''_p, \qquad (3)$$

значення яких будуть завжди додатними при невиконанні умов задачі або, у протилежному випадку, за винятком оптимізуючого параметру, дорівнювати нулю.

Якщо параметри цільової функції (3) — співставимі фізичні величини, то у цьому випадку пошук екстремума функції $R(\varepsilon)$ не викликає труднощів. Напрям пошуку буде визначатися значеннями часткових похідних $dЭ''_u/d\varepsilon$; $dЭ''_p/d\varepsilon$; $dM'_u/d\varepsilon$; $dM''_p/d\varepsilon$; $dГ'_u/d\varepsilon$; $dГ''_p/d\varepsilon$, і пошук може відбуватися одним із відомих градієнтних методів.

Коли виконується оптимізація з параметрами однієї фізичної природи, то значення часткових похідних будуть безрозмірними величинами. Якщо доданки функцій (3) різноманітної фізичної природи, то значення часткових похідних завдяки властивостям штрафних функцій будуть також безрозмірними, але кількісні значення будуть знаходитися на неспівставній метриці. У зв'язку з цим чутливість і значення величин часткових похідних будуть залежати від числових значень додаваних параметрів. Оперування такими параметрами приведе до абсурдного результату.

Для того щоб перейти до еквівалентної метрики, запишемо часткові похідні у вигляді $d\text{Э}''_u/\text{Э}''_u d\varepsilon$; $d\text{Э}''_p/\text{Э}''_p d\varepsilon$; $dM''_u/M''_u d\varepsilon$; $dM''_p/M''_p d\varepsilon$; $d\Gamma''_u/\Gamma''_u d\varepsilon$; $d\Gamma''_p/\Gamma''_p d\varepsilon$. Такі похідні мають однакову розмірність, а числові значення — нормовані не залежно від числових значень доданків функцій (3), а залежно від їх чутливості до оптимізуючого параметру.

Виходячи з представлених похідних, значення цільової функції $R(\varepsilon)$ можна записати як

$$R(\varepsilon) = \int d\,\text{Э}''_u \,/\, \text{Э}''_u \, d\varepsilon + \int d\,\text{Э}''_p \,/\, \text{Э}''_p \, d\varepsilon + \int d\,M''_u \,/\, M''_u \, d\varepsilon + \\ + \int d\,M''_p \,/\, M''_p \, d\varepsilon + \int d\,\Gamma''_u \,/\, \Gamma''_u \, d\varepsilon + \int d\,\Gamma''_p \,/\, \Gamma''_p \, d\varepsilon, \qquad (4)$$

або

$$R(\varepsilon) = \ln \text{Э}''_u + \ln \text{Э}''_p + \ln M''_u + \ln M''_p + \ln \Gamma''_u + \ln \Gamma''_p\,. \qquad (5)$$

Цікаво, що формула (5) як сума натуральних логарифмів деяких інформаційних характеристик у випадку заміни ln на log, що не змінює зміст формули, перетворюється на відому формулу Хартлі, яка характеризує невизначеність системи з різними, але рівноімовірними подіями при комбінаторному підході до оцінки кількості інформації. До речі, в багатьох галузях науки комбінаторний підхід виявився ефективнішим від імовірно-статистичного, основаного на ентропійному сприйнятті кількості інформації.

Надійність і ефективність запропонованого критерію оцінки вимірювальної інформації доводимо обчислювальним експериментом, результати якого вважаємо додатними, якщо значення оптимізаційних параметрів, отриманих за запропонованим критерієм, будуть найбільш близькими до екстремальних і в сукупності будуть кращими від параметрів, отриманих за будь-яким іншим відомим критерієм. Як приклад пропонується спрощена задача багатоцільової оптимізації. У мережі тріангуляції з п'яти пунктів, чотири з яких є фіксованими координатами

1	10000	10000
2	40000	10000
3	50000	50000
4	30000	50000,

потрібно знайти найбільш геометрично вигідне положення п'ятого пункту, при якому значення максимальної півосі еліпса похибок п'ятого пункту і похибка самого слабого напрямку і сторони будуть мінімальними (див. рисунок). Похибка виміру напрямку дорівнює одній секунді. Для порівняння результатів аналогічне проектування виконаємо за A, D, E, I і G_A, G_α, G_S, L – критеріями оптимізації, де передостанні три критерії відповіда-

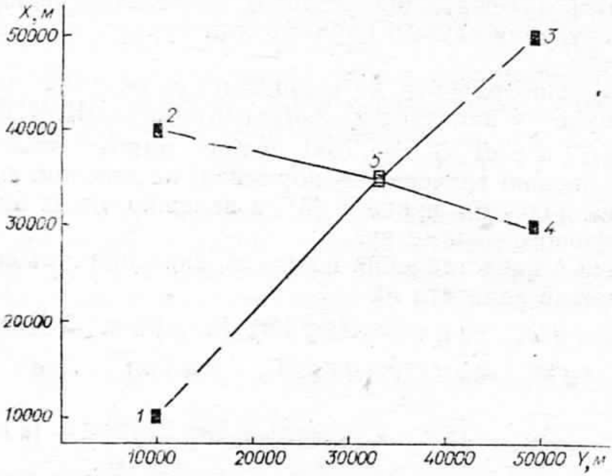

Схема оберненої кутової засічки.

ють мінімуму великої півосі еліпса помилок m_A, похибки самого слабого напрямку m_α — лінії m_S/S.

Оптимізацію мережі виконаємо методом ітерацій за допомогою обчислювальної електронної таблиці системи «QUATRO-PRO» на персональній ЕОМ IBM PC-XT.

У поставленій задачі обчислення за критерієм D-оптимізації виконати неможливо, оскільки детермінант коваріаційної матриці прямує до мінімуму з наближенням п'ятого пункту до базисного, тобто задача має вироджене рішення. У табл. 1 ілюструються ітерації пошуку екстремума числового поля детермінанта кореляційної матриці. Як бачимо, мінімум детермінанта неухильно зменшується з наближенням п'ятого пункту до третього.

У табл. 2 представлені результати обчислювального експерименту. У задачі обчислення за критеріями E- і G_A-оптимізації будуть тотожними, тому наведені результати тільки G_A-критерія оптимізації.

У перших двох рядках табл. 2 наведені шукані оптимальні координати п'ятого пункту. У наступних восьми рядках представлені похибки напрямків і сторін 1—5, 2—5, 3—5, 4—5.

Далі наведені очікувані значення сліду, числа Тодда кореляційної матриці, суми логаритмів параметрів загальної цільової функції, а також великої півосі еліпса помилок на п'ятому пункті.

В останньому рядку представлені значення параметра, що характеризує ефективність критерію. У загальному вигляді вираз, що представляє цей параметр, має такий вигляд:

$$J_t = \sum_{i=1}^{n} \left[\max\left(G_t(m_i)\right) - \max\left(G_i(m_i)\right)\right] / \max\left(G_i(m_i)\right), \qquad (6)$$

Таблиця 1

Ітерація пошуку мінімуму числового поля детермінанта кореляційної матриці

ІТЕРАЦІЯ 1

X, м	$DET*10^{-3}$					
50000	7,102	8,046	9,057	4,978	■ 3	
40000	■ 2	6,519	8,424	4,052	5,585	
30000	6,551	5,556	8,003	4,990	■ 4	
20000	7,375	6,501	9,453	8,563	7,179	
10000	■ 1	6,079	10,340	11,760	13,940	
0	10000	20000	30000	40000	50000	Y, м

ІТЕРАЦІЯ 2

X, м	$DET*10^{-3}$					
50000	9,057	7,534	4,978	2,335	■ 3	
45000	8,875	6,820	4,301	2,727	3,922	
40000	8,424	6,310	4,052	3,150	5,585	
35000	8,097	6,523	4,109	2,560	3,653	
30000	8,003	7,337	4,990	2,354	■ 4	
	30000	35000	40000	45000	50000	Y, м

ІТЕРАЦІЯ 3

X, м	$DET*10^{-3}$					
55000	6,344	5,283	4,383	3,978	4,693	
52500	5,548	4,256	3,030	2,075	2,279	
50000	4,978	3,621	2,335	1,140	■ 3	
47500	4,571	3,355	2,355	1,734	2,109	
45000	4,301	3,327	2,727	2,831	3,922	
	40000	42500	45000	47500	50000	Y, м

Закінчення табл.

ІТЕРАЦІЯ 4

X, м	DET*10^{-3}				
52500	3,030	2,494	2,075	1,917	2,279
51250	2,586	1,977	1,418	0,990	1,122
50000	2,335	1,727	1,140	0,567	■ 3
48750	2,272	1,749	1,290	0,982	1,081
47500	2,335	1,973	1,734	1,817	2,108
	45000	46250	47500	48750	50000 Y, м

[   ] — границі для наступної ітерації;

0,567 — мінімум числового поля детермінанта; кореляційної матриці

■ 3 — вихідний пункт № 3.

Таблиця 2

Результати оптимізації оберненої кутової засічки A, E, I, G_A, G_α, G_S, L-критеріями оптимальності

Параметр	Критерій оптимальності					
	A	I	G_A	G_α	G_S	L
X, м	38905	39595	39595	37780	39775	39810
Y, м	43830	40950	40950	28860	40280	41070
m''_α 1—5	0,29	0,30	0,30	0,70	0,30	0,29
m''_α 2—5	0,40	0,41	0,41	0,71	0,41	0,41
m''_α 3—5	0,91	0,91	0,91	0,71	0,91	0,92
m''_α 4—5	0,96	0,96	0,96	0,71	0,96	0,96
m_S 1—5	1/854000	1/700000	1/700000	1/355000	1/666000	1/700000
m_S 2—5	1/709000	1/500000	1/500000	1/142000	1/466000	1/514000
m_S 3—5	1/213000	1/225000	1/225000	1/199000	1/221000	1/220000
m_S 4—5	1/167000	1/215000	1/215000	1/177000	1/221000	1/220000
sp (K)	0,114138	0,122182	0,122182	0,197405	0,125794	0,121694
I	1,455378	1,001075	1,001075	2,156369	1,075521	1,026225
$\Sigma \log m_i$	1,0612	1,2133	1,2133	0,5588	1,1967	1,2187
m_A (см)	0,0674	0,0611	0,0611	0,1348	0,0652	0,0616
J %	69,957	37,926	37,926	156,369	41,922	36,482

0,0611 — екстремальне значення параметра m_i;

0,0674 — максимальне значення параметра m_i за досліджуваним критерієм.

де G_t — досліджуваний критерій оптимізації; m_i — параметри (геометричні, економічні, точнісні), що визначають загальну цільову функцію задачі багатоцільової оптимізації; $\max(G_i(m_i))$ — максимальне значення параметра m_i, отриманого за критерієм G_i з відповідною цільовою функцією $\max(m_i)=\min$; $\max(G_t \times (m_i))$ — максимальне значення параметра m, отриманого за критерієм G_t з цільовою функцією $\max(m_t)=\min$; n — кількість параметрів, що визначають загальну цільову функцію задачі багатоцільової оптимізації. Як свідчить (6), параметр J_t — інваріантна величина і є незалежною і об'єктивною характеристикою кожного критерію оптимізації у будь-якій задачі багатоцільової оптимізації. Для обчислення J_t необхідно знайти екстремальні значення точнісних параметрів, що визначають умови задачі. У нашому випадку екстремальними точнісними параметрами будуть значення m_A великої півосі еліпса помилок, обчисленої за G_A-критерієм оптимізації; похибка самого слабого напрямку m_α отримана за G_α-критерієм оптимізації і відносна похибка m_S/S — самої слабої лінії — за G_S-критерієм оптимізації. Згідно з даними табл. 2 $m_A'=0{,}061$ см, $m_\alpha'=0{,}71''$, $m_S'/S = 1/221000$. Параметр, що характеризує ефективність критерію оптимізації, у нашому випадку, згідно з (6), матиме вигляд

$$J_t = \{[\max G_t(m'_A)) - m'_A] / m'_A\} + \{[\max(G_t(m_\alpha)) - m'_\alpha] / m'_\alpha\} + \\ + \{[\max(G_s(m_s/S)) - m'_s/S] / m'_s/S\} \cdot 100\,\%, \tag{7}$$

де $\max(G_t(m_A'))$, $\max(G_t(m_\alpha'))$, $\max(G_t(m_S/S)$ — максимальні значення параметрів m_A, m_α, m_S/S, отриманих за досліджуваним критерієм оптимізації. Для наглядного порівняння критеріїв оптимізації параметр J_t наводимо у процентних одиницях.

Згідно з даними табл. 2, параметр J має мінімальне значення при оптимізації за L-критерієм, отже, задовольняються необхідна і достатня умови для оцінки ефективності критерію. Перша умова частково не задовольняється при співставленні величин m_A, отриманих з критеріями L- і I-оптимальності. Значення m_A, отримане за I-критерієм, співпадає з екстремальним, отриманим за G_A — критерієм, а m_A, отримане за L-критерієм, незначно перевищує екстремальне. Ця несуттєва розбіжність ніяк не впливає на результат експерименту і виникла у зв'язку з ілюстрацією експерименту на дуже спрощеній моделі мережі, всього з одним шуканим пунктом. З цим пов'язана і маловідчутна перевага L-критерію порівняно з I- і G-критеріями щодо величини J, а також співпадання екстремумів числових полів I- і G_A-критеріїв оптимальності. При ускладненні оптимізованих мереж ефективність L-критерію оптимальності порівняно з іншими значно зростає, особливо при збільшенні кількості шуканих пунктів.

Наведемо результати оптимізації у класичному прикладі визначення найвигіднішої форми прямої кутової засічки. Відомо, що за A-критерієм оптимізації найвигідніший кут засічки α= $=109°28$, за D — критерієм $\alpha=120°$, за E- і I-критеріями $\alpha=90°$. При оптимізації за L-критерієм, тобто з цільовою функцією, мінімізуючою одночасно максимальну піввісь еліпса помилок і похибки самої слабкої сторони і напрямку, кут засічки дорівнює $71°14'$.

Аналізуючи виконану роботу, можна стверджувати, що одержано новий універсальний критерій оптимальності, який можна ефективно застосувати при розв'язуванні задач оптимізації геодезичних мереж будь-якого рівня, відборі й інтегруванні інформації різної фізичної природи у вимірювальних експериментах.

1. *Гришкин И. И.* Понятие информации. М., 1973. 2. *Нейман Ю. М.* Алгоритм проектирования геодезического построения на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976. № 6. С. 33—45. 3. *Урсул А. Д.* Информация. М., 1971. 4. *Федоров В. В.* Теория оптимального эксперимента. М., 1971.

Стаття надійшла до редколегії 10. 12. 01