УДК 528.1

А. С. ЯРМОЛЕНКО

МИНИМАКСНЫЙ ПОДХОД К УРАВНИВАНИЮ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С УЧЕТОМ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Вопрос уравнивания геодезических сетей с учетом ошибок исходных данных достаточно полно исследован в геодезической литературе при наличии полной информации об их точности, т. е. при достоверно известной корреляционной матрице ошибок исходных данных. Однако на практике такой информации может не быть. При этом могут быть неизвестными все ковариационные моменты ошибок исходных данных, кроме диагональных, или часть ковариационных моментов известна, часть — неизвестна. Могут быть известными лишь предельно возможные значения ошибок исходных данных либо точность их может характеризоваться лишь одним усредненным значением стандарта. Во всех приведенных случаях приходится учитывать любую доступную информацию об исходных данных [3]. В каждом из приведенных случаев необходимы специальные исследования — в данной работе решается задача уравнивания при частично неизвестных ковариационных моментах ошибок исходных данных.

В основу решения положен минимаксный подход [2]. В этом случае из-за отсутствия полной информации об ошибках исходных данных с целью уменьшения риска в дальнейшем следует брать такую их ковариационную матрицу, которая наименее благоприятна для оценивания параметров при уравнивании. Точность искомых параметров также определяется ковариационной матрицей. Поэтому ковариационная матрица ошибок исходных данных должна быть такой, чтобы такая же матрица параметров при уравнении была бы максимальной. При этом все компоненты вектора параметров должны иметь максимальные дисперсии, а определитель и след их ковариационной матрицы должны быть максимальными. Получение всех критериев максимальности — задача трудоемкая, поэтому выбор подходящего критерия в данном случае осуществим на основе теории информации. Известно, что вектор случайных величин можно характеризовать не только информационной матрицей Фишера, но и энтропией, т. е. мерой неопределенности этого вектора. В случае нормального распределения ошибок измерений энтропия вектора вычисляется по формуле [5]

$$H=\frac{1}{2}|R|, \tag{1}$$

где R — определитель ковариационной матрицы R.

Следовательно, с точки зрения теории информации в качестве критерия наименее благоприятного оценивания параметров можно взять определитель корреляционной матрицы. Оценки параметров получаем при максимуме этого определителя. Следуя изложенному принципу нормальности распределений, рассмотрим задачу уравнивания геодезических сетей с учетом ошибок исходных данных.

Известно, что при этом составляется следующая переопределенная система уравнений поправок:

$$V_L=A_1X_1+A_2X_2+L, \tag{2}$$

где A_1, A_2 — матрицы коэффициентов при векторах ошибок исходных данных X_1 и определяемых параметров X_2; L — вектор свободных членов; V_L — вектор поправок измерений.

Пусть ковариационная матрица ошибок исходных данных K определена неполностью и достоверно известны лишь ее диагональные элементы, а недиагональные k_i — неизвестны или известны частично. Весовую матрицу измерений обозначим P_L. Уравнивание (2) по методу наименьших квадратов с учетом принятых K и P_L приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$NX_2+L_1=0, \tag{3}$$

где

$$N=A_2^{\mathrm{T}}PA_2; \tag{4}$$

$$P=(P_L^{-1}+A_1KA_1^{\mathrm{T}})^{-1}; \tag{5}$$

$$L_1=A_2^{\mathrm{T}}PL. \tag{6}$$

Выражения (4)—(6) легко получить, представляя (2) в виде

$$V=A_2X_2+L, \tag{7}$$

$$V=V_L-A_1X_1$$

с ковариационной матрицей

$$K_V=P_L^{-1}+A_1KA_1^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

Ковариационной матрицей вектора неизвестных X_2 будет матрица N^{-1}, а характеристикой неопределенности этого вектора — ее определитель $|N^{-1}|$. В соответствии с минимаксным оцениванием необходимо подобрать такую ковариационную матрицу исходных данных, чтобы ее определитель стал максимальным. Максимизацию в данной задаче можно свести к минимизации $|N|$, так как $|N^{-1}|=1/|N|$. Кроме этого, следует отметить, что решение данной экстремальной задачи следует вести при условии неотрицательности всех главных миноров M_i матрицы K. Следовательно, задачу можно сформулировать в виде

$$|N|=\min,$$
$$M_1\geqslant 0,\quad M_2\geqslant 0,\ \ldots,\ M_m=|K|\geqslant 0. \tag{9}$$

Решить такую задачу можно методом наискорейшего спуска. Для этого необходимо вычислить градиент определителя $|N|$, исходя из следующего равенства

$$N\cdot\tilde{N}^{-1}=DE, \tag{10}$$

где $\tilde{N}^{-1}$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы N; D — определитель матрицы N.

Дифференцируя (9) по неизвестному параметру k, запишем производную

$$ED'=N'\tilde{N}^{-1}+N(\tilde{N}^{-1})'. \tag{11}$$

Из (10) непосредственно следует

$$D'=\frac{1}{n}\operatorname{Sp}(N'\tilde{N}^{-1}+N(\tilde{N}^{-1})'), \tag{12}$$

где n — порядок матрицы N.

Можно доказать, что

$$\operatorname{Sp}(N(\tilde{N}^{-1})')=(n-1)\operatorname{Sp}(N'\tilde{N}^{-1}). \tag{13}$$

Действительно, если взять произвольную матрицу

$$N=[a_{ij}]_{n,n}, \tag{14}$$

где каждый элемент — некоторая функция от параметра k и ей в соответствие определить матрицу алгебраических дополнений

$$\tilde{N}^{-1}=[A_{ij}]_{n,n}, \tag{15}$$

то из равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a'_{kj} A_{kj}, \tag{16}$$

которое проверяется непосредственной подстановкой, сразу следует тождество (13) и, соответственно,

$$D' = \mathrm{Sp}\,(N'(\widetilde{N^{-1}})), \tag{17}$$

или

$$D' = \mathrm{Sp}\,(D \cdot N' N^{-1}). \tag{18}$$

Вычислим теперь N'. В этом случае, исходя из (2), запишем

$$N' = (A_2^{\mathrm{T}} P)' A_2 + A_2^{\mathrm{T}} P A_2', \tag{19}$$

Поскольку производные берутся по ковариационным моментам, а A_2 не зависит от них, то очевидно, что

$$A_2' = 0; \tag{20}$$

$$(A_2^{\mathrm{T}} P)' = A_2^{\mathrm{T}} P' \tag{21}$$

и соответственно

$$N' = A_2^{\mathrm{T}} P' A_2. \tag{22}$$

Поскольку

$$P = (P_L^{-1} + A_1 K A_1^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{23}$$

то необходимо выразить производную обратной матрицы через производную ее самой. Для этого запишем

$$P P^{-1} = E. \tag{24}$$

Поскольку

$$P' P^{-1} + P (P^{-1})' = 0, \tag{25}$$

то

$$P' = -P (P^{-1})' P, \tag{26}$$

и тогда окончательно

$$P' = -P (P_L^{-1} + A_1 K A_1^{\mathrm{T}})' P. \tag{27}$$

Если

$$(P_L^{-1})' = 0, \tag{28}$$

то

$$P' = -P A_1 K' A_1^{\mathrm{T}} P. \tag{29}$$

С учетом (21) выражение (17) перепишем в следующем виде:

$$D' = \mathrm{Sp}(D A_2^{\mathrm{T}} P' A_2 N^{-1}). \tag{30}$$

Если (30) рассматривать как частную производную по параметру k, то градиент определителя $|N|$ можно представить так:

$$\nabla D = \begin{pmatrix} D'_1 \\ D'_2 \\ \dots \\ D'_m \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где D_i' — частная производная функции D по параметру k_i. В соответствии с (31) можно записать итерационную формулу вычисления неизвестных параметров методом наискорейшего спуска

$$k_n = k_{n-1} - \nabla D \gamma. \tag{32}$$

Теперь необходимо определить оптимальное значение коэффициента γ. Для этого применим прием, используемый в работах [1, 6]. Запишем условие:

$$D(k_{n-1} - \nabla D \gamma) = \min. \tag{33}$$

Разлагая (33) в ряд Тейлора, получаем

$$D(k_{n-1}) - \nabla^{\mathrm{T}} D \nabla D \gamma - \frac{1}{2} \nabla^{\mathrm{T}} D \nabla^2 D \nabla D \gamma^2 = \min. \tag{34}$$

Дифференцирование (32) по γ приводит к следующему равенству:

$$\nabla^{\mathrm{T}} D \nabla D + \gamma \nabla^{\mathrm{T}} D \nabla^2 D \nabla D = 0 - \tag{35}$$

и, соответственно,

$$\gamma = - \frac{\nabla^{\mathrm{T}} D \nabla D}{\nabla^{\mathrm{T}} D \nabla^2 D \nabla D}. \tag{36}$$

Если вычисленное по (36) значение γ после подстановки в (30) нарушает условия в задаче (9), то его следует уменьшить так, чтобы эти условия выполнялись, а последующее значение стало меньше его предыдущего значения.

Как следует из (34), необходимо иметь значение второго градиента $\nabla^2 D$. В основу связанных с этим выводом положим выражение частной производной (30) определителя по параметру. Второй градиент представляется матрицей смешанных частных производных по параметрам k_i и k_j. В соответствии с этим запишем

$$D''_{ij} = [D'_j \operatorname{Sp}(A_2^{\mathrm{T}} P'_i A_2 N^{-1}) + D \operatorname{Sp}(A_2^{\mathrm{T}} P'_i A_2 N^{-1})'_j]. \tag{37}$$

Поскольку

$$D'_j = \operatorname{Sp}(D A_2^{\mathrm{T}} P'_j A_2 N^{-1}), \tag{38}$$

то

$$D''_{ij} = D[\operatorname{Sp}(A_2^{\mathrm{T}} P'_j A_2 N^{-1}) \operatorname{Sp}(A'_2 P'_i A_2 N^{-1}) + \operatorname{Sp}(A_2^{\mathrm{T}} P'_i A_2 N^{-1})_j]. \tag{39}$$

Первое слагаемое в (39) вычисляется по элементам (31). Второе слагаемое определим так:

$$(A_2^{\mathrm{T}} P_i' A_2 N^{-1})_j' = (A_2^{\mathrm{T}} P_i' A_2)_j' N^{-1} + A_2^{\mathrm{T}} P_i' A_2 (N^{-1})_j', \quad (40)$$

или

$$(A_2' P_i' A_2 N^{-1})_j' = A_2^{\mathrm{T}} P_{ij}'' A_2 N^{-1} - A_2^{\mathrm{T}} P_i' A_2 N^{-1} A_2 P_j' A_2 N^{-1}. \quad (41)$$

В (41)

$$P_{ij}' = -(PA_1 K_i' A_1^{\mathrm{T}} P)_j',$$

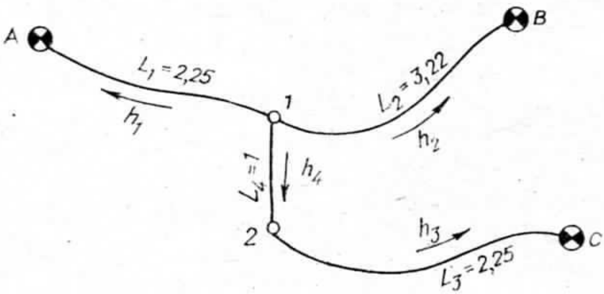

Рис. 1. Нивелирная сеть.

и, соответственно,

$$P_{ij}'' = -(P_j' A_1 K_i' A_1^{\mathrm{T}} P + PA_1 K_i' A_1^{\mathrm{T}} P_j'). \quad (42)$$

Подстановкой (42) в (41) получим окончательный вид выражения (39):

$$D_{ij}'' = \frac{D_i' D_j'}{D} - D\,\mathrm{Sp}\,[A_2^{\mathrm{T}} (P_j' A_1 K_i' A_1^{\mathrm{T}} P + PA_1 K_i' A_1^{\mathrm{T}} P_j') \times$$
$$\times A_2 N^{-1}] - D\,\mathrm{Sp}\,(A_2^{\mathrm{T}} P_i' A_2 N^{-1} A_2^{\mathrm{T}} P_j' A_2 N^{-1}). \quad (43)$$

На основании (43) строим градиент второго порядка

$$\nabla^2 D = [D_{ij}'']_{m,m}, \quad (44)$$

необходимый для вычисления γ.

Пример. Рассмотрим нивелирную сеть (рис. 1), в которой пункты A, B, C — исходные, а *1* и *2* — определяемые. При этом известно, что пункты A и C, A и B попарно коррелированы, а B и C — некоррелированы.

Пусть $m_A=2$ мм, $m_B=3$ мм, $m_C=4$ мм. Веса ходов, вычисленные по формуле $P=1/L$, составляют соответственно $P_1=0{,}44$, $P_2=0{,}31$, $P_3=0{,}44$, $P_4=1$. Необходимо определить такую матрицу ковариаций исходных данных

$$K=\begin{pmatrix} 4 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 9 & 0 \\ k_2 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

при которой определитель матрицы нормальных уравнений минимален.

Решение. В данном случае

$$K_0=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_1=\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix},$$

$$P_V=\operatorname{diag}\begin{pmatrix} 0{,}44 \\ 0{,}31 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &M_1=36-k_1^2\geqslant 0, \\ &M_2=576-9k_2^2-16k_1^2\geqslant 0, \end{aligned}$$

$$K_1'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^{-1}=\begin{pmatrix} 3{,}403 & 3{,}226 \\ 3{,}226 & 4{,}006 \end{pmatrix}.$$

Здесь K_1' и K_2' соответственно частные производные матрицы K по k_1 и k_2. В первом приближении получим

$$\nabla D=\begin{pmatrix} 0{,}0273 \\ 0{,}0174 \end{pmatrix}, \quad \nabla D^2=\begin{pmatrix} 0{,}0068 & 0{,}0013 \\ 0{,}0013 & 0{,}0019 \end{pmatrix},$$

$$\gamma=-152,\ k_1=0-0{,}273(-152)=4{,}4, \quad k_2=0-0{,}0174(-152)=2{,}6, \quad N^{-1}=\begin{pmatrix} 5{,}25 & 5{,}06 \\ 5{,}06 & 5{,}83 \end{pmatrix}, D=0{,}191.$$

Во втором приближении

$$\gamma=-75,\ k_1=4{,}2-0{,}011(-75)=5{,}0, \quad k_2=2{,}6-0{,}008(-75)=3{,}2, \quad N^{-1}=\begin{pmatrix} 5{,}58 & 5{,}40 \\ 5{,}40 & 6{,}17 \end{pmatrix}, D=0{,}191.$$

В третьем

$$\gamma=-26,\ k_1=5{,}0-0{,}008(-26)=5{,}2, \quad k_2=3{,}2-0{,}0076(-26)=3{,}6, \quad N^{-1}=\begin{pmatrix} 5{,}70 & 5{,}52 \\ 5{,}52 & 6{,}30 \end{pmatrix}, D=0{,}187.$$

Если принять точность вычислений

$$\Delta=0{,}1k_{n-1},$$

то третье приближение можно считать окончательным. Наиболее неблагоприятной ковариационной матрицей ошибок исходных данных будет

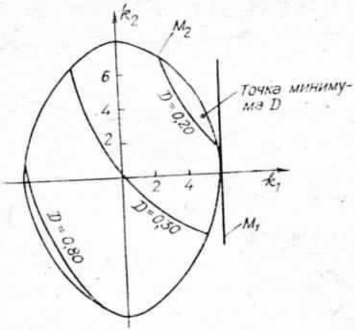

Рис. 2. Решение примера.

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 5,2 & 3,6 \\ 5,2 & 9 & 0 \\ 3,6 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 показано полученное решение. Определением наиболее неблагоприятной матрицы ошибок исходных данных решается задача минимаксного оценивания при неполностью известных ковариационных моментах этой матрицы.

1. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М., 1970. 2. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М., 1975. 3. *Маркузе Ю. И., Юркина М. И.* Тез. докл. VII Международного симпозиума по геодезическим вычислениям // Геодезия и картография. 1985. 4. *Ярмоленко А. С.* Минимаксное оценивание и устойчивость при математической обработке геодезических измерений. Горки. 1988. — 52 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 5293—В88. 5. *Стратанович Р. Я.* Теория информации. М., 1975. 6. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968.

Статья поступила в редколлегию 05. 11. 91