

## ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ЗГЛАДЖУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЗА КРИТЕРІЄМ ВІДНОШЕННЯ МЕДІАН

© Камінський Р. М., Дмитрів Г. Р., 2009

Подано результати експериментального порівняння згладжування часових рядів методами ковзного середнього, експоненціального та медіанного згладжування. За критерієм відношення медіан показано, що найадекватнішим є метод медіанного згладжування.

**Ключові слова** – медіана, медіанне згладжування, часові ряди.

**In article results of experimental comparison of smoothing of time series by methods moving average, exponential and median smoothings are presented. At use the relation medians criterion is shown, that the most adequate is a method of median smoothings.**

**Keywords** – median, median smoothing, time series.

### Вступ

Одним з основних видів інтелектуальної діяльності людини-оператора є опрацювання зорової інформації, поданої на моніторі у формі послідовності зображень з об'єктами заданого класу. Дослідження цього виду діяльності має важливе значення для правильної організації робочого середовища, а також для оцінювання та прогнозування характеристик персоналу в системах підтримки і прийняття рішень. Переважно змістом такої діяльності є пошук, виявлення та ідентифікація об'єктів уваги на наданих зображеннях. Тут основним показником вважають оперативність прийняття вірогідного рішення. За своєю суттю оперативність великою мірою визначається функціональним станом (ФС) – загальним станом центральної нервової системи індивіда. Точно визначити характеристику цього стану безпосередньо, не створюючи дискомфорту операторові в процесі його діяльності, практично неможливо. Проте зміни ФС проявляються в динаміці показника оперативності, тобто в динаміці тренду значень, що відповідають “часу життя” нерозпізаного об'єкта, а саме: з моменту появи зображення на екрані монітора до моменту прийняття оператором відповідного рішення.

Якщо послідовність наданих зображень є однорідною з погляду складності розпізнавання, то послідовність значень часу розпізнавання кожного з них утворює часовий ряд (ЧР). В експериментальних дослідженнях, коли немає зовнішніх перешкоджаючих факторів, існуючі зміни показника оперативності, можна вважати зумовленими його ФС і виявити їх в характері тренду індивідуального ЧР. Тому вивчення закономірностей динаміки часу розпізнавання залежно від характеру і складності зображень дає багату інформацією картину про індивідуальні особливості та можливості конкретного оператора. Очевидно, що в цьому разі постає актуальна проблема вибору відповідного методу обробки отриманих результатів та його всебічного обґрунтування.

Проблема взаємодії людини і комп'ютера на професійному рівні є однією з основних в галузі створення систем та засобів штучного інтелекту для опрацювання різного роду візуальної інформації.

### Мета роботи та постановка задачі дослідження

За значної дисперсії рівнів ЧР для виявлення та виділення тренду використовують різноманітні згладжуючі процедури: безпосереднє вирівнювання рівнів методом найменших

квадратів, звичайні і зважені ковзні середні, експоненціальне згладжування, спектральні методи та використання сплайнів, метод ковзної медіани або медіанне згладжування.

Найпоширенішими серед них є звичайне та зважене ковзні середні та експоненціальне згладжування. Останнім часом в методичних посібниках та окремих статтях розглядається і використовується медіанне згладжування. Проте не виявлено робіт, в яких порівнюються методи згладжування між собою, тобто на одних і тих самих даних.

Метою цієї роботи є порівняння основних процедур згладжування ЧР за критерієм медіани як найстійкішої числової і структурної характеристики. Об'єктом дослідження є експериментальні індивідуальні ЧР, а предметом – методи згладжування, а саме: ковзного і зваженого середнього, експоненціального та медіанного згладжування, та визначення і порівняння їхніх медіан.

### Природа рівнів часового ряду

Діяльність людини в системах опрацювання зорової інформації об'єктивно може бути оцінена лише часом опрацювання та кількістю допущених помилок. Надаючи операторові послідовність зображень, які імітують деяку робочу ситуацію і зберігають послідовність появи зображень в реальному часі, отримують послідовність тривалостей часу опрацювання кожного з зображень. Такі дані утворюють часовий ряд і характеризують динаміку оперативності оператора в реальному часі впродовж його роботи.

Аналіз таких ЧР показав, що їхні рівні мають несиметричний, зрізаний з лівого боку одномодальний розподіл, а візуально їх тренд є нелінійним.

Отримання даних про час опрацювання зображень розглянемо на прикладі роботи людино-машинного інтерфейсу обробки візуальної інформації [1]. На його вході є регулярна послідовність  $X$  зображень  $x_i \in X$ ,  $i = 1, 2, \mathbf{K}$ , які використовуються як дані для розв'язання деякої задачі. Зображення  $x_i = x(t_i)$ , в моменти часу  $t_i$ ,  $t_i \in [0, T]$  і з інтервалом експозиції  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ , надаються операторові на моніторі для їх опрацювання: пошуку, виявлення та розпізнавання заданого класу об'єктів, вилучення необхідної інформації і прийняття адекватного для конкретної ситуації рішення. Оператор повинен для кожного зображення  $x_i$ , знайти, прийняти і реалізувати рішення протягом часу  $t_i \leq \Delta t_i$ , так, щоб  $t_i = \min t_i$ . Моменти пред'явлення зображень визначаються технологією або програмою експерименту, а розподіл їх тривалостей  $t_i$  є індивідуальною характеристикою діяльності оператора.

Нервові і розумове напруження та висока відповідальність за прийняте рішення спричиняють швидку втомлюваність, погіршення зорових, когнітивних та моторних функцій, негативно позначаються на функціональному стані оператора та результатах його роботи. Тому під час моделювання людино-машинних систем опрацювання зображень необхідно враховувати множину ФС оператора  $C = \{c_n : c_n = c(\Delta t_n), \Delta t_n = t_n - t_{n-1}, n = \overline{1, N}, t_{n-1}, t_n \in [0, T]\}$ , яку умовно розглядають як дискретну, оскільки неможливо практично встановити чітку межу між станами  $c_n$  і  $c_{n-1}$ . Отримані в таких дослідженнях результати – значення  $t_i$  – можна подати моделлю ЧР

$$t(t) = m(t) + e_t,$$

де  $m(t)$  – тренд, який характеризує динаміку показника, а  $e_t$  – випадкові некорельовані величини (відхилення від тренду, які включають похибки вимірювань) з  $E[e_t] = 0$  при елімінації тренду із дисперсією  $D[e_t] = S^2$ . Це, своєю чергою, дає змогу визначити характер та параметри динаміки як оцінки оперативності кожного оператора, а в кінцевому результаті отримати формальний опис індивідуальних характеристик.

### Алгоритми методів згладжування рівнів

Оскільки ЧР цього типу мають значну дисперсію рівнів і візуально встановити характер тенденції їх розвитку дуже складно, природно використати техніку згладжування, яка дає змогу наочніше уявити її тренд і вибрати відповідні функції для його апроксимації. Для цього в дослідженні використано такі процедури:

звичайного ковзного середнього, тобто вздовж часового ряду переміщується від рівня до рівня “вікно” розміром  $w = 2k + 1$  рівнів, всередині якого визначається значення середнього арифметичного рівнів у вікні і замінюється ним значення відповідного рівня оригінального ряду за таким алгоритмом

$$\tilde{y}_i = y_1^* + y_2^* + \mathbf{K} + y_k^* + \sum_{j=k+1}^{N-2k} \left[ \frac{1}{w} \sum_{i=j}^{j+2k+1} y_i \right] + y_{N-k}^* + \mathbf{K} + y_{N-1}^* + y_N^*.$$

зваженого ковзного середнього з розміром “вікна”  $w = 2k + 1$ , яке послідовно зміщується вздовж рівнів ряду й усереднює охоплені ним рівні  $y_i$

$$\tilde{y}_i = y_1^* + y_2^* + \mathbf{K} + y_k^* + \sum_{j=k+1}^{N-2k} \left[ \frac{1}{w} \sum_{i=j}^{j+2k+1} a_i y_i \right] + y_{N-k}^* + \mathbf{K} + y_{N-1}^* + y_N^*.$$

У цих формулах значення  $y_q^*$ , де  $q = 1, 2, \mathbf{K}, k, N - k, \mathbf{K}, N - 1, N$ , на початку та в кінці ряду обчислюються відповідними інтерполяційними формулами [2],  $a_i$  – ваги, для яких  $\sum_{i=1}^{2k+1} a_i = 1$ .

Операція усереднення у межах вікна подана в квадратних дужках;

експоненціального згладжування рівнів, яке здійснюють за алгоритмом

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}_0^* + \sum_{i=1}^N [g y_i + (1-g) \tilde{y}_{i-1}],$$

де  $\tilde{y}_0^*$  – екстрапольоване значення,  $g$  – параметр згладжування;

медіанного згладжування, за якого медіана визначається в ковзному вікні, тобто середнє значення рівня у межах вікна замінюється медіаною рівнів у вікні. Цей метод нечасто використовується, проте має істотні особливості, а тому розглянемо його детальніше.

#### Медіанне згладжування рівнів та його властивості

Медіана належить до розподільної середньої, тобто є значенням ознаки, яка займає середнє місце у варіаційному ряді, на відміну від середньої арифметичної, яка узагальнює величину показника. Для симетричних розподілів ці два показники збігаються за величиною, але для асиметричних – середньою арифметичною є математичне сподівання, яке враховує частоту появи того чи іншого значення показника, а медіана і далі залишається серединою варіаційного ряду. Як параметр вибірки, вона є однією з числових характеристик її структури та іноді використовується як альтернатива середньому арифметичному значенню елементів вибірки. Медіана  $y_m$  є значенням, яке забезпечує рівність

$$\int_a^{x_m} p(x) dx = \int_{x_m}^b p(x) dx,$$

тобто ділить сукупність на дві частини, які зустрічаються з однаковою імовірністю. За умови  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ , медіана вибірки  $x_m$  ділить площу, охоплену кривою щільності розподілу, на дві однакові частини.

У разі дискретних випадкових величин значення медіани визначають з варіаційного ряду вибірки. При непарному  $2n + 1$  числі варіантом варіаційного ряду медіаною  $x_m$  є той варіант, який займає  $(n + 1)$ -е місце, а при парному – медіаною  $x_m$  є середнє арифметичне  $n$ -ї та  $n + 1$  варіант.

Медіана має такі властивості.

1. Кількість додатних відхилень від медіани дорівнює кількості від'ємних.

2. Сума абсолютних відхилень варіант вибірки відносно медіани  $x_m$  є мінімальною [3].

3. При симетричних розподілах значення медіани, моди та математичного сподівання збігаються, а при несиметричних – медіана завжди знаходиться між модою та математичним сподіванням, незалежно від виду (знака) асиметрії розподілу, і є незміщеною оцінкою медіани розподілу  $F(x)$  [4].

4. Розподіл значень медіани  $F(x_m) \rightarrow N(\bar{m}, S_n^2)$  асимптотично прямує до нормального, якщо  $n \rightarrow \infty$  [3,4, 5,];

Вперше ковзна оцінка медіани, тобто медіанне згладжування, для аналізу часових рядів була запропонована і застосована Тьюки в 1971 р. [6]. Він також вказував, що медіанне згладжування зберігає в часових рядах різкіші зміни їх рівня (тобто перепади).

Суть медіанного згладжування зводиться до того, що вздовж часового ряду, рівень за рівнем, переміщується вікно, в межах якого рівні впорядковуються за величиною і визначається значення серединного рівня – медіани, яким замінюють реальне значення, що відповідає середині вікна шириною  $w = 2n + 1$ , тобто відзначається заміна

$$y_i \rightarrow y_m = (y_{i-w}, \mathbf{K}, y_i, \mathbf{K}, y_{i+w}),$$

де  $n = 1, 2, \mathbf{K}$  — параметр вікна медіанного згладжування.

Основними властивостями медіанного згладжування є такі:

- це нелінійна необчислювальна процедура;
- зберігає різкі перепади в тенденції (ковзне середнє та експоненціальне згладжування їх змазує);
- ефективно виключаються поодинокі рівні з дуже великими або дуже малими значеннями, які мають випадковий характер і різко виділяються серед інших рівнів;
- майже не згладжує сильно осцилюючі процеси на великих інтервалах та процеси типу

$$x_i \approx (-1)^i y_i, \quad i \in \mathbf{Z} \text{ [5].}$$

*Експериментальні дослідження часових рядів*

В експериментальних дослідженнях добровільно взяло участь 22 особи віком 18–20 років обох статей (студентів). Тривалість експериментів довільна і становила 60 – 90 хв, час експозиції зображень 5 с, в тестовій послідовності 180 зображень, з них з об'єктами уваги 36, що повторювали 5 разів. Установка: дуже швидко – оперативно – виявити заданий об'єкт.

Отримані в експериментах дані подано індивідуальними часовими рядами, обсяг яких наведено в другому, а їх оригінальні значення медіан у третьому стовпчику табл.1. Ці ряди були згладжені кожним з розглянутих вище алгоритмів і для кожного ЧР було визначено медіану. Вже поверхневий якісний аналіз наведених в таблиці даних для різних операторів та розв'язуваних ними задач показує, що для асиметрично розподілених рівнів часового ряду, емпірична функція щільності розподілу яких є одномодальною, асиметричною, зрізаною з лівого боку в області малих

значень найбільшим зміщення моди є у разі використання методу експоненціального згладжування, а найменшим – медіанного згладжування.

Таблиця 1

Результати дослідження методів згладжування часових рядів

Оператори № з/п	К-ть рівнів ряду	Медіана оригінал. даних	Звичайне ковзне середнє	Зважене ковзне середнє	Експоненціальне середнє	Медіанне згладження
1	173	461	1.017	1.026	1.026	1.000
2	157	725	0.999	0.999	1.008	0.993
3.	150	610	1.041	1.062	1.052	1.010
4.	130	712	1.018	1.021	1.024	1.000
5.	121	925	1.024	1.040	1.044	0.994
6.	112	482	1.037	1.064	1.066	0.998
7.	106	569	1.060	1.074	1.067	0.998
8.	105	713	1.022	1.035	1.062	0.994
9.	104	933	1.045	1.054	1.077	0.980
10.	104	656	1.047	1.066	1.067	1.000
11.	146	1839	1.008	1.016	1.022	1.003
12.	147	1971	1.007	1.001	1.002	1.000
13.	135	523	1.073	1.084	1.082	1.000
14.	127	593	1.013	1.047	1.061	1.006
15.	134	515	1.025	1.042	1.050	1.004
16.	138	415	0.995	0.993	1.027	1.000
17.	140	429	1.007	1.023	1.019	0.998
18.	128	646	1.082	1.085	1.083	0.998
19.	139	717	1.011	1.014	1.014	0.999
20.	137	613	1.005	1.010	1.013	1.000
21.	132	652	1.017	1.025	1.028	0.995
22.	137	642	1.061	1.048	1.067	1.002
Усереднені значення відношень медіан			1.028	1.036	1.044	0.998

Це пояснюється тим, що ваги доволі повільно спадають і довго “пам’ятають” рівні ряду з великими значеннями, особливо, коли ці рівні є близькими сусідами.

При використанні зваженого ковзного середнього, якщо великі значення віддалені на відстань, меншу, ніж ширина вікна, зміщення також буде значним.

Крім того, у разі асиметричного розподілу рівнів часового ряду, тобто негауссівського розподілу, поняття середньоарифметичного значення є некоректним, оскільки математичне сподівання не збігається з модою розподілу і є звичайною числовою характеристикою. В такій ситуації стійкішою робастною характеристикою є медіана.

Для порівняння результатів застосування методів до цих рядів як **критерій порівняння** використано відношення значень медіан – медіани ряду, згладженого кожним методом, до медіани оригінального ряду, вважаючи, що значення медіани є найрепрезентативнішим і найстійкішим показником вибірки. Такий вибір обґрунтований тим, що при порівнянні методів згладжування ЧР, за яких чіткіше простежується характер тенденції показника оперативності – часу розпізнавання зображення об’єкта уваги, відношення медіан є найкоректнішим, не зв’язаним з видом і параметрами розподілу рівнів й об’єктивним для початкових і згладжених даних. Існуючі критерії, які тією чи іншою мірою пов’язані з медіаною, вимагають визначення медіани, обчислення статистик, аналізу відповідних рангів та перевірки гіпотез. У цьому випадку гіпотезою про рівність структури вибірки є рівність медіан оригінального ряду та згладженого, а критичним значенням є величина зміщення медіани згладженого ряду у відсотках. Усереднені значення критерію відношення медіан для отриманих в експериментах рядів показують, що найбільше зміщення у бік збільшення медіани дає експоненціальне згладжування  $(1.044-1.000) \cdot 100 = 4.4 \%$ , зважене і звичайне ковзні середні дають зміщення 3.6 % і 2.8 % відповідно, і також у бік збільшення медіани. Медіанне згладжування

дає зміщення медіани всього 0.2 %, але у бік зменшення, причому більш ніж на порядок. Припускається, що зміщення медіани відображає або означає зміщення самого тренду.

Для програмної реалізації медіанного згладжування з шириною вікна  $k = 3$  значення ковзної медіани визначається логічним предикатом з такими логічними умовами

*IF*  $y_i \geq y_{i+1}$  *AND*  $y_{i+1} \geq y_{i+2}$  *AND*  $y_i \geq y_{i+2}$  *THEN*  $m = y_{i+1}$ ;

*IF*  $y_i \leq y_{i+1}$  *AND*  $y_{i+1} \leq y_{i+2}$  *AND*  $y_i \leq y_{i+2}$  *THEN*  $m = y_{i+1}$ ;

*IF*  $y_i \leq y_{i+1}$  *AND*  $y_{i+1} \geq y_{i+2}$  *AND*  $y_i \leq y_{i+2}$  *THEN*  $m = y_{i+2}$ ;

*IF*  $y_i \leq y_{i+1}$  *AND*  $y_{i+1} \geq y_{i+2}$  *AND*  $y_i \geq y_{i+2}$  *THEN*  $m = y_i$ ;

*IF*  $y_i \geq y_{i+1}$  *AND*  $y_{i+1} \leq y_{i+2}$  *AND*  $y_i \geq y_{i+2}$  *THEN*  $m = y_{i+2}$ ;

*IF*  $y_i \geq y_{i+1}$  *AND*  $y_{i+1} \leq y_{i+2}$  *AND*  $y_i \leq y_{i+2}$  *THEN*  $m = y_i$ .

За термінологією [5] медіанне згладжування, або медіанна фільтрація (термін запозичений з обробки зображень), відповідає операції мажорювання, яка подається таким алгоритмом

$$m = med(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = \max\{\min(y_{i-1}, y_i), \min(y_i, y_{i+1}), \min(y_{i-1}, y_{i+1})\}.$$

Наведені в таблиці результати згладжування експериментальних даних обчислені за допомогою табличного процесора Excel – 2003, який має вбудовану функцію для визначення медіани і допускає реалізацію операції ковзного вікна.

### Висновок

Отже, враховуючи природні властивості даних про час розпізнавання об'єктів заданого класу, пред'явлених операторові на екрані монітора, в яких асиметрія зумовлена індивідуальними особливостями – в області малих значень часу тривалістю психомоторних процесів, а в області великих значень встановленням та вибором рішень, можна вважати правомірним і ефективним застосування саме медіанного згладжування до отриманих в експериментах індивідуальних часових рядів. Наведений підхід стосовно виділення тренду є простим і ефективним, оскільки:

- дає змогу здійснити точніший (практично незміщений) опис тренду, тобто визначені на підставі результатів медіанного згладжування параметри апроксимуючої його функції дають точніше наближення її кривої до істинного значення тренду, зокрема для асиметричного розподілу рівнів;
- подає на підставі порівняння результатів, одержаних при згладжуванні оригінальних рядів методами звичайного та зваженого ковзних середніх, а також експоненціального та медіанного згладжування їхній внесок у загальне зміщення медіани, а відтак і тренду, причому найбільше зміщення характерне для експоненціального згладжування, а найменше – медіанного;
- пропонує як критерій в аналогічних ситуаціях використовувати відношення медіан як найстійкіших характеристик вибірки у такій чи інших рекомендованих формах.

1. Камінський Р. М. Математичний підхід у організації роботи людино-машинного інтерфейсу обробки візуальної інформації // *Технічні вісті*, Львів, 2000/1(10), 2(11), С. 43–46. 2. Поллард Дж. *Справочник по вычислительным методам статистики*. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 344 с. 3. Михок Г., Урсяну В. *Выборочный метод и статистическое оценивание*. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 245 с. 4. Гильбо Е. П., Челпанов И. Б. *Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора*. – М.: Сов. радио, 1976. – 344 с. 5. Юстуссон Б. И. *Медианная фильтрация: статистические свойства* // *Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений*. – М.: Радио и связь, 1984. – С. 156–191. 6. Тьюки Дж. У. *Анализ результатов наблюдений: разведочный анализ*. – М.: Мир, 1981.