**УДК 004.942**

**А.В. Катренко, Ю.О. Верес**
Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра інформаційних систем та мереж

# КООРДИНАЦІЯ У СИСТЕМАХ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З РОЗПОДІЛУ ОБМЕЖЕНИХ РЕСУРСІВ

*© Катренко А.В., Верес Ю.О., 2009*

**Розглянуто проблеми координації у системах розподілу обмежених ресурсів. Визначено перелік задач, які повинна розв'язувати відповідна система підтримання прийняття рішень, запропоновано комплекс математичних моделей прийняття рішень, що забезпечують мінімізацію сумарних видатків системи.**

**Ключові слова – система розподілу обмежених ресурсів, система підтримання прийняття рішень.**

**Problem of co-ordination in the systems of division the limited resources is conducted in the article. Defined the tasks list which must be solved of the proper decision support system, proposed complex decision making mathematical models that provides minimization of total system outlays.**

**Keywords – systems of division the limited resources, decision making support systems.**

## Постановка проблеми

Однією з найважливіших проблем функціонування виробничих фірм є проблема координації між постачальниками сировини та ресурсів, виробником та споживачами. Вирішити цю проблему можна, створивши систему підтримання прийняття рішень (СППР), що орієнтована на ефективний розподіл та використання обмежених ресурсів.

## Аналіз останніх досліджень

Потреби суспільства безмежні, а ресурси, необхідні для його функціонування, обмежені. Дефіцит ресурсів зумовлює необхідність вибирати, яку кількість, коли та кому їх постачати, як їх розподілити. На практиці вибір здійснюється не за принципом "або одне, або інше", а за принципом "чогось більше, чогось менше".

Нині процеси прийняття рішень ґрунтуються на достатньо великому обсязі економіко-математичних методів. Кожне більш-менш важливе рішення, що стосується управління діяльністю галузей або підприємств, розподілу ресурсів, вибору кращого варіанта розвитку, вивчення кон'юнктури ринку, прогнозування, планування тощо, не здійснюється без попереднього математичного моделювання конкретного процесу або його складових частин.

Економіко-математичне моделювання тих або інших соціально-економічних об'єктів може стати ефективним лише за умови правильного розуміння суті процесів і явищ, що відбуваються в об'єкті моделювання, застосуванні системного підходу (спочатку системного аналізу об'єкта, а потім – системного синтезу моделі). Більш того, навіть при ідеальній побудові економіко-математичної моделі її практичне використання пов'язане з вирішенням конкретних мотиваційних, психологічних, адміністративних та інших завдань.

В умовах ринкової економіки найпоширенішим є децентралізований характер організації господарювання. Децентралізована економіка ґрунтується на незалежності її суб'єктів. Так, стосовно виробників (фірм) це означає, передусім, наявність свободи в прийнятті економічних рішень: що, в яких кількостях і якої якості продукувати із наявних ресурсів, а також кому і за якими цінами продавати вироблену продукцію. Незалежність споживача – право приймати рішення,

пов’язані з використанням ресурсів, що йому належать. Взаємна координація планів виробників і споживачів досягається за допомогою обміну виробленими товарами на ринку за цінами, що вільно встановлюються і залежать від співвідношення попиту і пропозиції.

Діяльність суб’єктів економіки, що розглядається у межах мікроекономічної системи, характеризується значною залежністю від дій інших суб’єктів. Наприклад, якщо фірма приймає певне рішення, пов’язане з виробництвом тієї або іншої продукції або з продажу деякого товару, то остаточний результат (наприклад, прибуток фірми) залежить не тільки від прийнятого нею рішення, але і від багатьох інших чинників: рішень, прийнятих іншими фірмами, поведінки покупців, дій законодавчих органів, курсу валют тощо. Тому рішення, яке приймає фірма, буде рішенням в умовах невизначеності. Ця невизначеність створюється як за рахунок дій інших суб’єктів економіки, що переслідують власні інтереси, так і за рахунок неповноти інформації, що є у фірми, та економічної ситуації.

Як критерій якості в економічних задачах прийняття рішень найчастіше використовують величину прибутку або величину видатків. Проте в багатьох задачах як критерій якості можна розглядати й інші величини, наприклад, кількість випродукованих ресурсів, час виконання проекту, частку ринку, яку контролює фірма, тощо.

Універсального поняття оптимального рішення, яке було б застосовне до будь-якої задачі прийняття рішень, не існує. Тому в теорії прийняття рішень розглядають окремі класи задач прийняття рішень і для кожного класу формулюють свій критерій якості. Задача знаходження оптимального розв’язку (у сенсі деякого вказаного критерію якості) є вже формальною задачею і розв’язується математичними методами або за допомогою моделювання. Для задачі прийняття рішення певного класу може існувати не один, а кілька різних критеріїв якості; крім того, навіть за фіксованого критерію якості може бути не одне, а кілька оптимальних рішень. Тому необхідним є аналіз прийнятого рішення, який полягає у порівнянні отриманих рекомендацій з прийняття рішення з вимогами задачі прийняття рішення. Якщо одержане оптимальне рішення із деяких причин виявляється неприйнятним (така ситуація виникає у випадках, коли не враховані певні обмеження, або ж коли деякі обмеження не можуть бути формалізовані), то це приводить або до вибору іншого оптимального рішення (якщо воно є), або до зміни критерію якості чи до зміни самої математичної моделі задачі прийняття рішення.

Процес планування формує орієнтир майбутньої діяльності підприємства чи організації. Застосування у практичній діяльності планування гарантує осмисленість і визначеність їх діяльності. Сучасне планування характеризується усвідомленням його необхідності з метою забезпечення ефективного організування, мотивування, контролювання та регулювання діяльності організацій, запобігання втратам і зменшення ризиків.

Під плануванням ми розуміємо процес прийняття рішень про вибір цілей та їхню координацію з наявними ресурсами, а також діяльність, результат якої забезпечує скоординоване використання ресурсів системою та її елементами відповідно до певної загальної мети.

У процесі планування відбувається координація цілей і ресурсів, що відбивається у виборі технології, а це дає змогу перетворити наявні ресурси на результати відповідно до поставлених цілей. Процес координації цілей і ресурсів у плануванні закінчується або певним планом діяльності, або висновком про неможливість досягнення мети з наявними ресурсами. У першому випадку здійснюється перехід до виконання, в другому – виникає проблемна ситуація, яка може опрацьовуватися за рахунок варіації цілей, зміни величини і складу ресурсів і послідовності їхнього використання. За наявності декількох варіантів плану вибір одного з них здійснюється за деяким критерієм якості.

Розрізняють формальне, інкрементне та системне планування. До переваг формального планування належать якість, логічна узгодженість, емпірична обґрунтованість засобів. Водночас цей підхід нехтує “людським фактором” і не має ефективних процедур для багатоособових рішень, реалізує механістичний погляд на майбутнє.

Інкрементне планування ґрунтується на концепції обмеженої раціональності. Критерії, які використовуються в інкрементному плануванні, не описуються в об’єктивних та точних термінах, і

перевага віддається неосягальним поняттям (наприклад “політичний ризик”, “образ фірми”). Домовленості та компроміси інкрементального підходу ведуть до плану, що є маргінальною модифікацією наявних варіантів, прийнятним для всіх і водночас ні для кого не оптимальним. Основним недоліком інкрементального планування є надмірна віра у “взаємне пристосування”, що насправді гарантує перевагу інтересів найпотужніших осіб чи груп осіб.

Системне планування синтезує формальний та інкрементальний підхід, відображає прагнення до взаємодії із зовнішнім середовищем, враховуючи невизначеність у розвитку певних процесів, проблеми постійно вирішують та перевизначають шляхом навчання. Цінності в системному плануванні включаються в раціональні процедури з метою правильного відтворення інтересів секторів.

Планування починається перед початком дій, тобто планування – це попереднє прийняття рішення. Це процес визначення того, що і як робити, який відбувається до моменту, коли потрібно діяти. Якщо потрібно досягти певного стану через деякий проміжок часу в майбутньому та якщо для прийняття рішення про те, що і як робити, потрібен час, – рішення необхідно прийняти завчасно.

Потреба в плануванні виникає тоді, коли досягнення бажаного стану залежить від цілого набору взаємозалежних рішень, тобто від системи рішень. Набір рішень утворює систему тоді, коли вплив деякого рішення з набору на відповідний результат залежить від одного або більше рішень. Деякі рішення в наборі можуть бути складними, інші – простими. Але принципова складність планування виникає швидше від взаємозв’язку рішень, аніж від самих рішень.

Планування не є одноразовою дією, воно є процесом, що не має явно вираженого “початку” і “кінця”. Цей процес поступово наближається до завершення, але ніколи не досягає його із двох причин: існує можливість нескінченного перегляду раніше прийнятих рішень; поки ведеться планування, змінюється і система, для якої воно застосовується, а також змінюється навколишнє середовище.

Подібні зміни повністю врахувати неможливо. Це одна з причин, через яку план потребує постійного корегування й оновлення.

Процес планування спрямований на досягнення такого стану в майбутньому, який є бажаним, але від якого не можна очікувати, що він виникне сам по собі. Тому планування пов’язане, з одного боку, із запобіганням помилковим діям, а з іншого – із зменшенням кількості невикористаних можливостей.

Оскільки планування скероване в бік майбутнього, то при реалізації прямого процесу розглядаються релевантні фактори дійсності, дії та цілі, що приводять до логічних результатів, сценаріїв. В оберненому процесі починають з бажаних сценаріїв, а потім досліджуються політики та фактори, за допомогою яких можна реалізувати бажані сценарії.

Прямий процес планування забезпечує оцінку стану імовірного результату, а обернений – засоби контролю та управління прямим процесом при русі в напрямку бажаного стану. Синтез прямого та оберненого процесів веде до ітераційного процесу прийняття двоточкового граничного рішення, що дає змогу побудувати ефективні плани та забезпечує їх оперативне корегування.

Отже, планування – це процес завчасного прийняття й оцінки взаємопов’язаної сукупності рішень у ситуації, коли передбачається, що бажаний стан у майбутньому навряд чи настане, якщо не вжити спеціальних заходів, а вживши відповідних заходів, можна збільшити вірогідність сприятливого результату.

У соціально-економічних об’єктах такі параметри, як швидкості потоків і накопичення ресурсів, час запізнювання в прийнятті рішень, послідовність (у часі) надання ресурсів, інтервал часу прогнозування, інтервали часу відвикання або звикання до чого-небудь, тривалість часу терпіння чогось і низка інших параметрів є функціями часу та багато в чому визначають характер соціально-економічних процесів. Щоб уникнути серйозних помилок під час прийняття рішень в управлінні реальною економічною системою, необхідно навчитися розуміти вплив чинника часу на суспільні процеси. Оскільки час тече неперервно і нескінченно, а суспільні системи (економічні, політичні, соціальні) також безперервно змінюють свою структуру (що дає змогу вважати їх

нестаціонарними), не може існувати стабільних алгоритмів і безперечних рекомендацій в управлінні складними системами.

Вміння управляти складними системами – це не тільки наявність навичок перерозподілу ресурсів (фінансових, матеріальних, трудових), але і головне – вміння прогнозувати результати цього перерозподілу. У економіці результати з'являються не відразу. Інколи вони з'являються у вигляді процесів. Існує множина економічних, фінансових, соціальних, політичних та інших показників минулих станів, які неперервно змінюються. Формальна логіка зв'язку цих змін недостатньо вивчена. В практиці управління складними системами відсутні формалізовані алгоритми, що зв'язують важелі управління господарством з майбутніми процесами і станами. Інакше кажучи, немає коректного інструменту прогнозування виконаного (або невиконаного) управління. Під час досягнення поставлених цілей завжди виникають ті або інші втрати. Наприклад, управління економікою, що приводить до зростання валового внутрішнього продукту (ВВП), може супроводжуватися збільшенням безробіття і соціальної напруженості.

Останнім часом для формування навичок управління різними технічними об'єктами все частіше створюють системи підтримання прийняття рішень. Їх застосовують люди, яким необхідно враховувати чинник часу в управлінні відповідними системами. Управляти соціально-економічними об'єктами набагато складніше, ніж будь-якими технічними. Це можна пояснити наявністю великої кількості взаємопов'язаних чинників і зворотних зв'язків. Під час розв'язання складних задач управління в динамічних економічних системах виникає необхідність впровадження систем підтримання прийняття рішень (СППР), щоб допомогти децидентові прийняти оптимальне рішення.

Такі СППР відображають не конкретні реальні соціально-економічні об'єкти, а лише деякі, найхарактерніші властивості більшості з них. Природно, що подібні спрощення необхідно враховувати при прийнятті рішення.

В основі великої кількості СППР лежать динамічні моделі об'єктів управління. Головна відмінність динамічних моделей від статичних – наявність динамічних алгоритмів. Вони формують зміни параметрів моделі з урахуванням впливу чинника часу. Найчастіше це потрібно при моделюванні накопичень, утворених ресурсними потоками (реалізується алгоритмами інтеграції); моделюванні швидкостей змін параметрів моделей, наприклад, при прогнозуванні рівня інфляції в результаті зростання цін (реалізується алгоритмами диференціювання); моделюванні запізнень в отриманні результату від моменту початку його утворення (реалізується алгоритмами тимчасового запізнювання) тощо.

## Цілі статті

Метою статті є розроблення моделей розподілу обмежених ресурсів в процесі планування та управління складними системами, скоординованих з постачальниками ресурсів і споживачами.

## Основний матеріал

Для опису розв'язання задач розподілу обмежених ресурсів у процесі координації постачальників ресурсів з їх споживачами подамо визначення основних понять.

**Контролінг** – процес неперервного оцінювання, спостереження, вивчення поведінки, оптимізації та керування діяльністю виробника, компанії тощо з метою розроблення шляхів досягнення певної мети.

**Координація** – погодження, зведення до відповідності, установлення взаємозв'язку, контакту в діяльності людей, між діями, поняттям, узгодженість рухів, дій тощо.

**Ресурс** – запас чого-небудь, що можна використати в разі потреби.

**Постачальник** – особа, держава, установа, організація тощо, що постачає або є джерелом певного виду ресурсу.

**Споживач** – особа чи організація, що використовує, споживає певний вид ресурсу.

**Проміжний пункт** – відповідно обладнане місце, будівля або приміщення для зберігання певного виду та обсягу ресурсу.

**Обмежений ресурс** – ресурс, обсяг якого завжди є меншим за деяке натуральне число.

Розглянемо систему "постачальник-споживач", що складається з $P\left(p=\overline{1,P}\right)$ постачальників ресурсу, $U\left(u=\overline{1,U}\right)$ споживачів і $M\left(m=\overline{1,M}\right)$ проміжних пунктів (пунктів зберігання ресурсів).

Час функціонування системи розділимо на $T\left(t=\overline{1,T}\right)$ рівних інтервалів. Для простоти саму множину і кількість елементів цієї множини будемо позначати однією і тією самою літерою. Припускаємо: $\left((M\cap P)\cup(M\cap U)\cup(U\cap P)\right)\in\varnothing$. Ця вимога стосується лише способу нумерації і нічого спільного не має із територіальним суміщенням пунктів, де розміщені постачальники, споживачі чи проміжні пункти. Позначимо через $R\left(r=\overline{1,R}\right)$ множину ресурсів, необхідних для споживачів. Нехай $U_u$ – множина типів ресурсів, що споживає $u$-й споживач; $M_m$ – множина типів ресурсів, що можуть перебувати на $m$-му проміжному пункті; $P_p$ – множина типів ресурсів, які може надати $p$-й постачальник. Інтенсивність споживання (попит) $r$-го виду ресурсу $u$-му споживачем в $t$-м інтервалі позначимо через $d_{ur}^t\left(u\in U_u\right)$. Кількості ресурсів, які можуть надати постачальники, обмежені.

$E_p^t$ – максимально можлива інтенсивність витрат $p$-го постачальника на продукування ресурсів, $e_{pr}\left(r\in P_p\right)$ – інтенсивність витрат постачальника на продукування одиниці $r$-го виду ресурсу.

Для задоволення попиту споживачів ми повинні так організувати процес постачання ресурсів від постачальників до споживачів, щоб сумарні видатки функціонування системи були мінімальними. Отже, необхідно знайти такі значення вектора контролінгу $v=\left\{V^t\right\}$, за яких ми отримаємо оптимальний розв'язок задачі розподілу обмежених ресурсів, де $\left\{V^t\right\}=\left\{S_{pur}^t,W_{pmr}^t,O_{mur}^t\right\}$.

Компоненти вектора означають:

$S_{pur}^t,W_{pmr}^t,O_{mur}^t$ – кількості ресурсу $r$-го виду, що наявні на маршрутах $(pu)$, $(pm)$ і $(mu)$ відповідно, тобто величини ресурсів, що надходять до споживачів і на проміжні пункти до початку $t$-го інтервалу постачань.

Для подальшого опису стану і динаміки системи введемо вектор стану системи $s=\left\{s^t\right\}$, де $s^t=\left\{X_{pr}^t,Y_{ur}^t,Z_{mr}^t\right\}$. Координати вектора стану – ресурси, наявні в кінці інтервалу часу $t$ у (відповідно) постачальників, споживачів та на проміжних пунктах. Початковий і кінцевий стани системи вважаємо заданими векторами $s^0$ і $s^T$. Схема такої системи наведена на рис. 1.

Отже, попит кожного із $U$ споживачів детермінований і заданий як функція часу на деякому проміжку $0\le t\le T$ розподілення ресурсів – $d_u(t)$, $u=\overline{1,U}$. Тоді попит споживачів можна описати за допомогою векторної функції попиту

$$d(t)=\left(d_1(t),d_2(t),...,d_u(t)\right),\ 0\le t\le T \tag{1}$$

для неперервної моделі або за допомогою вектора попиту

$$d^t=\left(d_1^t,d_2^t,...,d_u^t\right),\ t=\overline{1,T} \tag{2}$$

для її дискретного аналога. Обсяги ресурсів постачальників, які вони можуть надати (потужність продукування ресурсів), можна подати у вигляді векторної функції

$$u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_p(t)\right),\ 0\le t\le T \tag{3}$$

для неперервної моделі і

$$u^t = \left(u_1^t, u_2^t, ..., u_p^t\right),\ t = \overline{1,T} \tag{4}$$

для дискретної моделі.

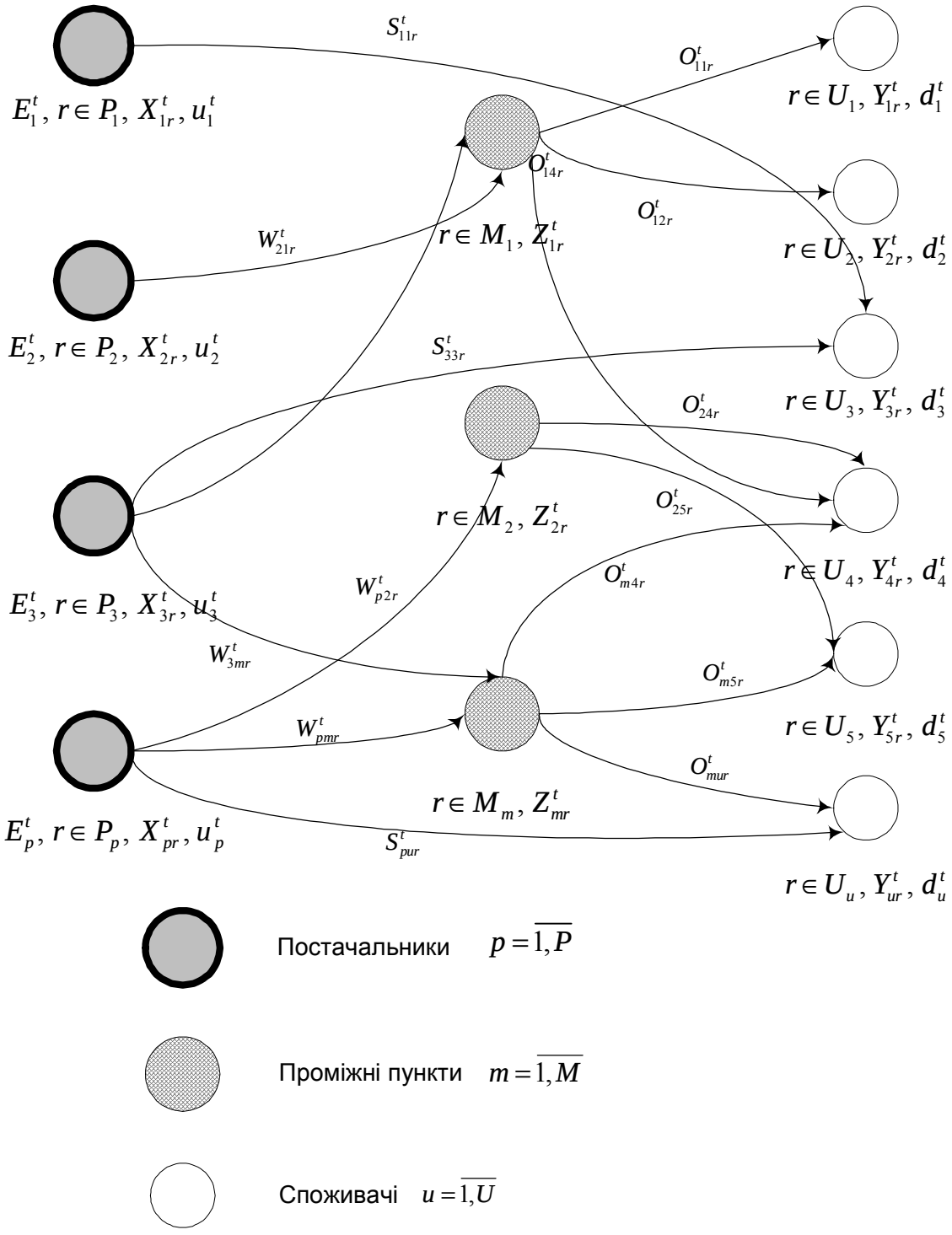


*Рис. 1. Схема системи "постачальник-споживач"*

Сукупність всіх точок, де зосереджені ресурси (постачальники, споживачі та проміжні пункти), розглядаємо як простір станів системи ресурсів. Стан системи описується місцезнаходженням точки у просторі станів. Координати цієї точки – поточні ресурси у

постачальників, споживачів і на проміжних пунктах. Отже, розмірність простору станів системи дорівнює $P \times U \times M$ . Стан системи опишемо векторною функцією часу:

$$s(t) = \left( X(t), Y(t), Z(t) \right), \tag{5}$$

де $X(t) = \left( X_1(t), X_2(t), ..., X_P(t) \right)$, $Y(t) = \left( Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_U(t) \right)$,

$Z(t) = \left( Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_M(t) \right)$ – поточні запаси відповідно у постачальників, споживачів і на проміжних пунктах.

Для дискретної системи

$$s^t = \left( X^t, Y^t, Z^t \right), \tag{6}$$

де $X^t, Y^t, Z^t$ – ресурси, наявні в кінці інтервалу часу $t$, у постачальників, споживачів та на проміжних пунктах відповідно.

Початковий і кінцевий стани системи описується векторами:

$$s(0) = \left( X(0), Y(0), Z(0) \right), \tag{7}$$

$$s(T) = \left( X(T), Y(T), Z(T) \right). \tag{8}$$

Внаслідок функціонування системи її стан змінюється. Щоб задовольнити попит споживачів, необхідно розподіляти ресурси, які продукуються постачальниками та які наявні на проміжних пунктах. Процес координації описується векторною функцією контролінгу $V = \{V(t)\}$, де

$$\{V^t\} = \{S_{pu}(t), W_{pm}(t), O_{mu}(t)\} \;\; 0 \le t \le T, \tag{9}$$

або вектором $\{V^t\}$ для дискретної системи, де

$$\{V^t\} = \{S_{pu}^t, W_{pm}^t, O_{mu}^t\} \tag{10}$$

де $S_{pu}(t)$ – план постачань $p$-го постачальника $u$-му споживачу;

$W_{pm}(t)$ – план постачань $p$-го постачальника $m$-му проміжному пункту;

$O_{mu}(t)$ – план постачань з $m$-го складу $u$-му споживачу.

Тобто плани постачань – це координати векторної функції контролінгу $V = \{V(t)\}$. Очевидно, плани постачань відповідають на три питання: в який момент повинно бути організовано постачання ресурсу, якою повинна бути його кількість і звідки вигідно його постачати.

На вектор контролінгу постачань $V(t)$ в будь-який момент часу можуть бути накладені обмеження вигляду

$$\underline{V_0}(t) \le V(t) \le \overline{V_0}(t), \;\; 0 \le t \le T, \tag{11}$$

де вектор $\underline{V_0}(t)$ визначається, наприклад, мінімальною кількістю ресурсу, яку можна транспортувати від постачальника до споживача, або деякою природною межею поділу ресурсу; $\overline{V_0}(t)$ – верхня межа величини постачань, вона завжди обмежена зверху внаслідок обмеженості ресурсів у будь-який момент часу.

Об’єднання всіх обмежень $\Psi(t)$, накладених на вектор контролінгу в будь-який момент часу, становить область допустимих координацій.

$$\mathbf{U}\Psi = \Psi. \tag{12}$$

Зміни вектора контролінгу $V(t)$, скеровані на задоволення виниклого попиту, назвемо алгоритмом координації. В системі розподілу обмеженими ресурсами таким алгоритмом є сигнал: коли дати команду про поповнення ресурсу, якою повинна бути величина постачання і звідки її транспортувати.

Процес координації передбачає отримання інформації про стан системи ресурсів і значення попиту, а також формування сигналів контролінгу згідно із отриманою інформацією.

Здійснювати розподіл ресурсів в такій системі можна багатьма різними способами, тож виникає питання: як із множини наявних способів контролінгу знайти найкращий? Для цього виберемо критерій якості розподілу ресурсів.

Оптимальним будемо вважати такий розподіл, за якого мінімізуються витрати, пов'язані із функціонуванням системи, тобто витрати розміщення замовлень, формування ресурсів, їх зберігання і втрати від дефіциту.

Знаючи оптимальний контролінг $V^*(t)$, ми тим самим розв'язуємо задачу вибору форми постачання, та встановлюємо найраціональніші зв'язки. Розглядаючи питання розміщення ресурсів, перебування їх на шляху їх розміщення ми окремо не виділяємо. Величина цих ресурсів залежить насамперед від раціональності схем та форми їх транспортування. Проте при побудові критерію якості необхідно враховувати час транспортування постачань як фактор, який має безпосередній вплив на видатки від невикористання ресурсів. Вважатимемо, що час доставки ресурсу від постачальників до споживачів $\Phi_{pu}$, від постачальників на проміжні пункти – $\Phi_{pm}$ і час доставки ресурсу із проміжних пунктів до споживачів – $\Phi_{mu}$. Нехай $g$ – питомі видатки від невикористання одиниці ресурсу на одиницю часу.

Щоб знайти оптимальний рівень контролінгу в системі, необхідно враховувати як вартість доставки, так і її час.

За цих умов динаміка системи описується рівняннями, що ґрунтуються на збалансованості потоків:

для поточних ресурсів постачальників –

$$\begin{aligned} &X_p(t) = X_p(0) + \int_0^t u_p(t)\,dt - \sum_{u=1}^{U}\int_0^t S_{pu}(t)\,dt - \sum_{p=1}^{P}\int_0^t W_{pm}(t)\,dt, \\ &p = \overline{1,P},\ 0 \le t \le T; \end{aligned} \tag{13}$$

для поточних ресурсів споживачів –

$$\begin{aligned} &Y_u(t) = Y_u(0) + \sum_{p=1}^{P}\int_0^t S_{pu}(t-\Phi_{pu})\,dt + \sum_{m=1}^{M}\int_0^t O_{mu}(t-\Phi_{mu})\,dt - \int_0^t d_u(t)\,dt, \\ &u = \overline{1,U},\ 0 \le t \le T; \end{aligned} \tag{14}$$

для поточних ресурсів наявних на проміжних пунктах –

$$\begin{aligned} &Z_m(t) = Z_m(0) + \sum_{p=1}^{P}\int_0^t W_{pm}(t-\Phi_{pm})\,dt - \sum_{u=1}^{U}\int_0^t O_{mu}(t)\,dt, \\ &m = \overline{1,M},\ 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{15}$$

Для дискретної системи без урахування часу транспортування стан системи на кожному із рівнів розміщення запасів можна задати рівняннями:

$$X_p^t = X_p^{t-1} + u_p^t - \sum_{u=1}^{U} S_{pu}^t - \sum_{m=1}^{M} W_{pm}^t; \tag{16}$$

$$Y_u^t = Y_u^{t-1} + \sum_{p=1}^{P} S_{pu}^t + \sum_{m=1}^{M} O_{mu} - d_u^t; \tag{17}$$

$$Z_m^t = Z_m^{t-1} + \sum_{p=1}^{P} W_{pm}^t - \sum_{u=1}^{U} O_{mu}^t. \tag{18}$$

На величини поточних ресурсів у постачальників, споживачів і на складах можуть бути накладені деякі обмеження, пов'язані із необхідністю зберігання страхового запасу, що страхує від непередбачених збурень у попиті споживачів тощо.

$$X_p(t) \geq \overset{0}{X}_p(t), Y_u(t) \geq \overset{0}{Y}_u(t), Z_m(t) \geq \overset{0}{Z}_m(t). \tag{19}$$

Конструюючи критерій якості, будемо розглядати три види видатків: видатки виробництва ресурсу, видатки формування ресурсу і видатки його зберігання.

Позначимо через $f_{pu}(S(t))$, $f_{pm}(W(t))$ і $f_{mu}(O(t))$ видатки організації постачань $S_{pu}(t)$, $W_{pm}(t)$, $O_{mu}(t)$ відповідно по маршрутах $(pu)$, $(pm)$ і $(mu)$.

Тоді сумарні **видатки формування ресурсів** за час $T$ становитимуть:

$$\begin{aligned} f(S,W,O) = &\sum_{p=1}^{P}\sum_{u=1}^{U}\int_0^T \int_{t-\Phi_{pu}}^{t} f_{pu}\left(V\left(t-\Phi_{pu}\right)\right)dt\,dt + \\ &+\sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{M}\int_0^T \int_{t-\Phi_{pm}}^{t} f_{pm}\left(t-\Phi_{pm}\right)dt\,dt + \sum_{m=1}^{M}\sum_{u=1}^{U}\int_0^T \int_{t-\Phi_{mu}}^{t} x_{mu}\left(t-\Phi_{mu}\right)dt\,dt. \end{aligned} \tag{20}$$

Видатки зберігання ресурсів складаються із видатків безпосереднього зберігання і видатків від їх невикористання (профіцит ресурсу).

Нехай $e_p(X(t))$, $h_u(Y(t))$, $m_m(Z(t))$ – видатки зберігання ресурсу на аналізованих рівнях їх розміщення (у постачальників, споживачів та на проміжних пунктах). Тоді сумарні **видатки зберігання становлять**

$$g(s) = \int_0^T g(s(t)) = \sum_{p=1}^{P}\int_0^T e_p(X(t))dt + \sum_{u=1}^{U}\int_0^T h_u(Y(t))dt + \sum_{m=1}^{M}\int_0^T m_m(Z(t))dt. \tag{21}$$

Найскладнішим у формуванні критерію якості є облік **видатків виробництва**. Тут виникають складні задачі, пов'язані із урахуванням особливостей устаткування, технологічних способів виробництва, з вирівнюванням виробничого процесу, зумовленим нерівномірністю постачання, переналаштуванням устаткування тощо. Наприклад, врахування тільки видатків від переналаштування призводить до узагальнень задачі комівояжера. Загалом ці видатки є деякою функцією (часто нелінійною) виробничих потужностей. Позначимо їх через

$$w(u) = \sum_{p=1}^{P}\sum_{r\in P_p}\int_0^T w_{pr}(u_{pr}(t))dt. \tag{22}$$

Тоді критерій якості набуде вигляду

$$Q(V) = f(S,W,O) + g(s) + w(u) \to \min. \tag{23}$$

Задача полягає в тому, щоб із множини різних варіантів розподілу ресурсів $v \in \Psi$ знайти такі розподіли $v^* = \{S^*, W^*, O^*\}$, які мінімізують сумарні видатки функціонування системи (23).

Обмеження задачі, що випливають із рівнянь (13)–(15), які описують динаміку системи, і умови, що накладаються на вектор стану системи, у дискретному вигляді запишемо так:

1. Система обмежень, пов'язана із можливостями постачальників:

$$\sum_{r=1}^{R} e_{pr}^t u_{pr}^t \le E_p^t; \tag{24}$$

$$\sum_{u=1}^{U}\sum_{t=1}^{t} S_{pur}^t + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{t} W_{pmr}^t \le X_{pr}^0 + \sum_{t=1}^{t} u_{pr}^t; \tag{25}$$

$$X_{pr}^T + \sum_{u=1}^{U}\sum_{t=1}^{T} S_{pur}^t + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T} W_{pmr}^t = X_{pr}^0 + \sum_{t=1}^{T} u_{pr}^t. \tag{26}$$

2. Система обмежень, що не допускає від'ємної кількості ресурсів у споживачів:

$$Y_{ur}^0 + \sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{t} S_{pur}^t + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{t} O_{mur}^t \ge \sum_{t=1}^{t} W_{ur}^t; \tag{27}$$

$$Y_{ur}^0 + \sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} S_{pur}^t + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T} O_{mur}^t = Y_{ur}^T + \sum_{t=1}^{T} W_{ur}^t. \tag{28}$$

3. Проміжні пункти можуть зберігати обмежену кількість ресурсів. Якщо, наприклад, $L_m^t$ – об'єм (ємність) $m$-го проміжного пункту, $l_r$ – об'єм, необхідний для одиниці $r$-го виду ресурсу, то

$$\sum_{r \in M_m} l_r Z_{mr}^{t-1} + \sum_{p=1}^{P}\sum_{r \in M_m} l_r W_{pmr}^t \le L_m^t. \tag{29}$$

Крім того, сумарний вихідний потік не повинен перевищувати вхідного потоку, тобто

$$Z_{mr}^0 + \sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{t} W_{pmr}^t \ge \sum_{u=1}^{U}\sum_{t=1}^{t} O_{mur}^t; \tag{30}$$

$$Z_{mr}^0 + \sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} W_{pmr}^t = Z_{mr}^T + \sum_{u=1}^{U}\sum_{t=1}^{T} O_{mur}^t. \tag{31}$$

Крім системи обмежень (24)–(26), на вектор контролінгу $V(t)$ можуть бути накладені обмеження, пов'язані із мінімально можливою величиною транспортування ресурсів, тобто

$$S_{pur}^t \ge S_{pur}^0,\ W_{pmr}^t \ge W_{pmr}^0,\ O_{mjr}^t \ge O_{mjr}^0. \tag{32}$$

На величину поточної кількості ресурсів, як зазначалось вище, можуть бути накладені обмеження, що диктуються міркуваннями надійності постачання, тобто пов'язані із необхідністю зберігання деяких резервів, що страхують від непередбачуваних збурень і відмов у системі:

$$X_{pr}^t \ge \overset{0}{X}{}_{pr}^t,\ Y_{ur}^t \ge \overset{0}{Y}{}_{ur}^t,\ Z_{mr}^t \ge \overset{0}{Z}{}_{mr}^t. \tag{33}$$

Об'єднання обмежень (24)–(33) утворює область допустимих розподілень $\Psi$.

$$\bigcup_t \Psi^t = \Psi,\ v \in \Psi. \tag{34}$$

Розв'язання поставленої задачі дає відповідь на важливі питання розподілу обмежених ресурсів.

По суті, ми розв'язуємо задачу координації. Справді, якщо обчислити оптимальне управління

$$V^*(t) = \left(S^*_{pu}(t), W^*_{pm}(t), O^*_{mu}(t)\right),\ 0 \le t \le T, \tag{35}$$

ми для кожного моменту часу $t$ визначаємо раціональні плани постачання ресурсу, хто повинен здійснювати постачання, безпосередньо від постачальника $\left(S^*_{pu}(t) > 0\right)$ або через проміжні пункти $\left(W^*_{pj}(t) > 0\right)$. Маючи оптимальні плани постачань, ми тим самим можемо знайти питому вагу (коефіцієнт) посередницького постачання $k$.

Коефіцієнт $k$ визначає відносний обсяг ресурсів $u$-го споживача, отриманих через проміжний пункт (через посередника). Для всієї системи коефіцієнт посередницького постачання визначається із співвідношення

$$k = \frac{\sum_{m=1}^{M}\sum_{u=1}^{U}\int_0^T O_{mu}(t)\,dt}{\sum_{p=1}^{P}\sum_{u=1}^{U}\int_0^T S_{pu}(t)\,dt + \sum_{m=1}^{M}\sum_{u=1}^{U}\int_0^T O_{mu}(t)\,dt}. \tag{36}$$

Розв'язання поставленої задачі дає оптимальний план розміщення ресурсів. Справді, якщо знайти векторну функцію оптимального розподілу $V^*(t)$, ми за формулами (13)–(15) можемо знайти векторну функцію оптимального розміщення запасів $s^*(t)$, тобто оптимальний поточний обсяг ресурсів для постачальників, споживачів і проміжних пунктів.

Якщо обсяг спродукованих ресурсів більший або дорівнює наявному попиту, тобто:

$$\sum_{p=1}^{P}\int_0^t u_p(t)\,dt \ge \sum_{u=1}^{U}\int_0^t d_u(t)\,dt,\ 0 \le t \le T,$$

то критерій якості матиме такий вигляд:

$$Q(V) = f(S,W,O) + g(s) + w(u) \to \min,$$

але, оскільки кількість ресурсів обмежена, то часто виникає ситуація, коли сумарний попит споживачів більший за сумарні виробничі потужності постачальників:

$$\sum_{p=1}^{P}\int_0^t u_p(t)\,dt < \sum_{p=1}^{P}\sum_{u=1}^{U}\int_0^t S_{pu}(t)\,dt + \sum_{p=1}^{P}\sum_{m=1}^{M}\int_0^t W_{pm}(t)\,dt,\ 0 \le t \le T.$$

Це означає, що для будь-якого моменту часу може виникнути така ситуація, коли сумарний попит не може бути задоволений сумарним обсягом вироблених ресурсів:

$$\sum_{p=1}^{P}\int_0^t u_p(t)\,dt < \sum_{u=1}^{U}\int_0^t d_u(t)\,dt,\ 0 \le t \le T.$$

У такому разі в критерій якості введемо доданок $g(u,d)$, що відображає втрати від недопостачання $u$-му споживачу одиниці ресурсу. У результаті критерій якості набуде вигляду:

$$Q(V) = f(S,W,O) + g(s) + w(u) + g(u,d) \to \min$$

Причому $g(u,d)=\sum_{r=1}^{R}\left(\sum_{u=1}^{U}\int_0^t d_{ur}(t)\,dt-\sum_{p=1}^{P}\int_0^t u_{pr}(t)\,dt\right)\cdot a_r,\ 0\le t\le T.$

де $a_r$ – втрати від недопостачання одиниці $r$-го виду ресурсу.

У реальних умовах попит не завжди детермінований, часто він буває випадковою величиною. В цьому випадку його задають функцією розподілу вірогідності. Якщо попит випадковий, необхідно шукати розподіл, що мінімізує математичне сподівання видатків функціонування системи.

**Висновки**

Розглянуто проблеми координації в системах розподілу обмежених ресурсів. Описано стан і динаміку системи "постачальник–споживач" та сформульовано математичну модель її функціонування. Визначено перелік задач, які повинна розв'язувати відповідна система підтримання прийняття рішень, запропоновано комплекс математичних моделей прийняття рішень, що забезпечують мінімізацію сумарних видатків системи. Сформульовано критерій якості задачі координації під час розподілу обмежених ресурсів.

Подальші дослідження полягають в розробленні алгоритмів розв'язання задач координації під час розподілу обмежених ресурсів в системах підтримання прийняття рішень.

*1. Чуев И. Н. Комплексный экономический анализ хозяйственной деятельности: учебник для вузов / И. Н. Чуев, Л. Н. Чуева. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К°", 2006. – 368 с. 2. Кобелев Н. Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей: учеб.-практ. пособие / Н. Б. Кобелев. – М.: ЗАО "Финстатинформ", 2000. – 246 с. 3. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике: учебное пособие / В. В. Розен. – М.: Книжный дом "Университет", Высшая школа, 2002. – 288 с. 4. Власов М. П. Моделирование экономических процессов / М. П. Власов, П. Д. Шимко. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 409 с. – (Высшее образование). 5. Кугаенко А. А. Методы динамического моделирования в управлении экономикой: учебное пособие с компакт-диском / Под ред. П. Е. Кондрашова. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 456 с. 6. Кузьмін О. Є. Основи менеджменту: підручник / О. Є. Кузьмін, О. Г. Мельник. – К.: Академвидав, 2003. – 416 с. 7. Катренко А. В. Системний аналіз: підручник / А.В. Катренко. – Львів: Магнолія-2006, 2009. – 352 с. – (Серія "Комп'ютинг"). 8. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Крис. – М. : Радио и связь, 1991. – 224 с. 9. Верес О.М. СППР з керування розподілом обмежених ресурсів / О. М. Верес, Ю. О. Верес, А. В. Катренко // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Інформаційні системи та мережі. – 2008. – № 610. – С. 52–62.*