

**В. І. Гавриш, О. С. Король, Р. Р. Шкраб, І. О. Зімоха**

НУ "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛООБМІНУ В ЕЛЕМЕНТАХ ТУРБОГЕНЕРАТОРІВ**

Розроблено математичні моделі визначення розподілу температури в елементах турбогенераторів, які геометрично описано ізотропним півпростором та термочутливим простором з локально зосередженими джерелами нагрівання. Для цього з використанням теорії узагальнених функцій у зручній формі записано вихідні диференціальні рівняння теплопровідності з крайовими умовами. Для термочутливого простору (теплофізичні параметри залежать від температури) вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови лінеаризовано з використанням перетворення Кірхгофа, відносно якого отримано лінійне диференціальне рівняння. Для розв'язування крайових задач теплопровідності використано інтегральне перетворення Ганкеля і внаслідок отримано аналітичні розв'язки в зображеннях. До цих розв'язків застосовано обернене інтегральне перетворення Ганкеля, яке дало змогу отримати остаточні аналітичні розв'язки вихідних задач. Отримані аналітичні розв'язки подано у вигляді невластних збіжних інтегралів. Для конструкційного матеріалу термочутливого простору використано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури. У результаті отримано зручну формулу для визначення температурного поля, яка дає змогу аналізувати температурні режими в термочутливому середовищі. Для визначення числових значень температури в наведених конструкціях, а також аналізу теплообміну в елементах турбогенераторів, зумовленого різними температурними режимами завдяки нагріванню локально зосередженими джерелами тепла, розроблено обчислювальні програми. Із використанням цих програм наведено графіки, які відображають поведінку поверхонь, побудованих із використанням числових значень розподілу безрозмірної температури залежно від просторових безрозмірних координат. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність наведених математичних моделей визначення розподілу температури реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати середовища із локально зосередженим нагріванням щодо їх термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити, визначити допустимі температури нормальної роботи турбогенераторів, захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

**Ключові слова:** теплообмін; температурне поле; теплопровідність; тепловий потік; локально зосереджені джерела тепла.

**Вступ**

У процесі експлуатації теплових електростанцій широко використовують турбогенератори. Це є генератори синхронного типу, які безпосередньо під'єднані до електростанцій. У цих турбогенераторах турбіни працюють на органічному паливі і вони є економічно вигідними. Майже 80 % світової економіки забезпечує таке обладнання. Робота турбогенераторів полягає в перетворенні механічної енергії парової турбіни в електричну завдяки великій швидкості обертання ротора. Конструкційні елементи турбогенераторів у процесі експлуатації перебувають у середовищі з високою температурою, що істотно впливає на їхні фізико-механічні параметри, а в подальшому визначає і якість роботи. Варто також врахувати, що внаслідок впливу високих температур та виникаючих температурних напружень у матеріалах турбогенераторів з бігом часу відбуваються структурні зміни, які погіршують механічні властивості деталей загалом і знижують робочий ресурс турбогенераторів. Тому важливим є визначення допустимих температур, які ще сприяють нормальній роботі турбогенераторів.

Отже, метою роботи є розроблення математичних моделей визначення температурних полів в окремих елементах турбогенераторів, які дають змогу встановити допустимі температури нормальної роботи.

*Об'єктом дослідження* є процеси теплообміну в середовищах із локально зосередженим нагріванням, а *предметом дослідження* – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплообміну та методи знаходження аналітичних розв'язків відповідних крайових задач математичної фізики.

*Наукова новизна отриманих результатів* полягає в обґрунтуванні та розв'язанні задач розроблення математичних моделей теплообміну в середовищах із локальним нагріванням.

*Практичне значення отриманих результатів* складають аналітичні розв'язки крайових задач теплообміну, які дали змогу створити алгоритми та програмні засоби числової реалізації аналізу температурних режимів у елементах турбогенераторів та визначити допустимі температури нормальної роботи.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Визначення температурних режимів як в однорідних, так і неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників [1], [14]. У працях [3], [6], [7] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей

фаз і геометричної структури [2], [4], [8], [12]. Наведено методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних та шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми. Розроблено математичну модель для дослідження температурного поля, спричиненого ротаційним зварюванням металів за допомогою тертя. Для цього сформовано осесиметричну нелінійну крайову задачу теплопровідності для двох кругових циліндрів з одночасним урахуванням теплоутворення внаслідок тертя та від пластичного деформування. Прийнято, що коефіцієнт тертя, межа пластичності і теплофізичні властивості матеріалів зразків змінюються з підвищенням температури.

Числовий розв'язок задачі отримано методом скінченних елементів. Обчислення виконано для двох зразків, виготовлених зі сталі AISI 1040. Виявлено, що фрикційне теплоутворення відчутніше, порівняно з нагріванням від пластичного деформування, впливає на максимальну температуру поверхні контакту. Встановлено емпіричні залежності температури від параметра, що характеризує частку кожного із двох вказаних механізмів теплоутворення в загальній кількості генерованого тепла. Верифіковано розрахункову модель порівнянням обчислених значень температури з відповідними експериментальними [11]. Розроблено математичну модель для визначення нестационарного температурного поля в багатошаровій термочутливій пластині за різних умов нагрівання. Застосовано до сформульованої нелінійної крайової задачі перетворення Гудмена і отримано методом прямих з використанням інтегро-інтерполяційного методу її напівдискретний аналог у вигляді задачі Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Чисельно за допомогою формул диференціювання назад, задавши температурні залежності для теплофізичних параметрів шарів пластини, розв'язано задачу Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у двошаровій пластині. Приріст температури визначено через змінну Гудмена за формулами оберненої інтерполяції [5].

### Викладення основного матеріалу

#### Об'єкт дослідження та його математичні моделі.

Окремі елементи турбогенераторів, які піддаються локальному нагріванню, можна геометрично описати наведеними нижче структурами.

1. Розглянемо ізотропний півпростір, в об'ємі  $2\pi R^2 h$  циліндра якого зосереджені рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ , віднесений до циліндричної системи координат  $(Or\varphi z)$  із початком в центрі циліндра (рис. 1, а).

Для визначення стаціонарного температурного поля  $t(r, z)$  у наведеному середовищі використаємо рівняння теплопровідності [13], [9]

$$\lambda \Delta t = -q_0 S_-(R-r)N(z) \quad (1)$$

і крайові умови

$$t|_{z=-h-l} = t_c, \quad t|_{r,z \rightarrow \infty} = t_c, \quad (2)$$

де:  $t_c$  – температура навколишнього середовища;

$\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності півпростору;

$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в циліндричній системі координат;

$$N(z) = S_-(z+h) - S_+(z-h);$$

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \pm 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0, \end{cases} \text{ – асиметричні одиничні функції}$$

[10].

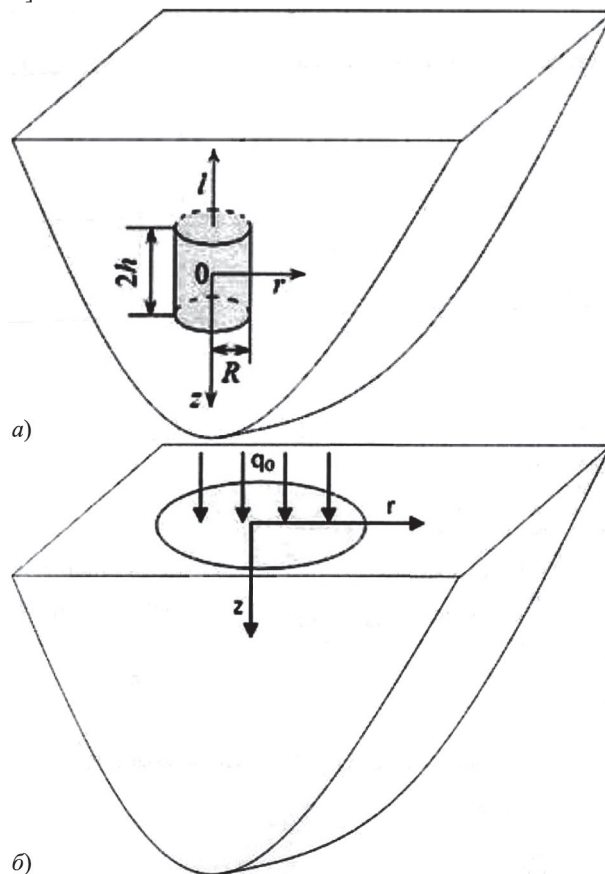


Рис. 1. Ізотропний півпростір із циліндричним джерелом тепла (а) і який нагрівається тепловим потоком (б)

До співвідношень (1) і (2) застосовуємо інтегральне перетворення Ганкеля за просторовою координатою  $r$ . Внаслідок отримуємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} I_1(R\xi) N(z) \quad (3)$$

з крайовими умовами

$$\bar{\theta}|_{z=-h-l} = 0, \quad \bar{\theta}|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (4)$$

де:  $\theta(r, z) = t(r, z) - t_c$ ;  $\bar{\theta}(z) = \int_0^{\infty} r I_0(r\xi) \theta(r, z) dr$  – трансформанта температури  $\theta(r, z)$ ;  $\xi$  – параметр інтегрального перетворення,  $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(\nu+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$  – функція Бесселя першого роду  $\nu$ -го порядку.

Загальний розв'язок для відповідного однорідного рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\bar{\theta}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z},$$

де  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування, які знайдемо методом варіації сталих із використанням крайових умов (4).

Внаслідок цього отримуємо частковий розв'язок задачі (3) і (4) у вигляді

$$\bar{\theta}(z) = \frac{q_0 R I_1(R\xi)}{\lambda \xi^3} \left\{ sh\xi h \left[ e^{\xi z} - e^{-\xi(z+2(h+l))} \right] + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right\}. \quad (5)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (5), отримуємо вираз для шуканої температури  $\theta(r, z)$  у вигляді

$$\theta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_0(r\xi)}{\xi^2} I_1(R\xi) \left[ sh\xi h \left[ e^{\xi z} - e^{-\xi(z+2(h+l))} \right] + N(z) - ch\xi(z+h)S_-(z+h) + ch\xi(z-h)S_+(z-h) \right] d\xi. \quad (6)$$

Отже, формулою (6) описано шукане температурне поле в ізотропному півпросторі, який нагрівається джерелом тепла циліндричної форми.

2. Розглянемо випадок, коли відстань  $l$  від поверхні циліндра до поверхні півпростору є набагато більшою від висоти  $h$  та радіуса  $R$  ( $l \gg h, l \gg R$ ) (див. рис. 1, а). З урахуванням цього рівняння теплопровідності (1) запишемо у вигляді

$$\lambda \Delta t = -q_0 S_-(R-r) \delta(z) \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \alpha_z (t|_{z=-l} - t_c), \quad t|_{z \rightarrow \infty} = t_c, \quad t|_{r \rightarrow \infty} = t_c, \quad (8)$$

де  $\alpha_z$  – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні  $z = -l$  півпростору  $\delta(z)$  – дельта функція Дірака [10].

До крайової задачі (7) і (8) застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля за просторовою координатою  $r$ . Внаслідок отримуємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} I_1(R\xi) \delta(z) \quad (9)$$

з крайовими умовами

$$\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \alpha_z \bar{\theta} \Big|_{z=-l}, \quad \bar{\theta} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (10)$$

Знайдемо частковий розв'язок задачі (9) і (10) у вигляді

$$\bar{\theta}(z) = \frac{q_0 R I_1(R\xi)}{\lambda \xi^2} \left[ \frac{e^{\xi z}}{2} - sh\xi z S(z) + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} \frac{e^{-\xi(z+2l)}}{2} \right], \quad (11)$$

де  $S(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0,5, & z = 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$  – симетрична одинична функція [10].

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (11), отримуємо вираз для шуканої температури  $\theta(r, z)$  у вигляді

$$\theta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_1(R\xi) I_0(r\xi)}{\xi} \Delta(z, l) d\xi \quad (12)$$

де  $\Delta(z, l) = \frac{e^{\xi z}}{2} - sh\xi z S(z) + \frac{\lambda \xi - \alpha_z}{\lambda \xi + \alpha_z} \frac{e^{-\xi(z+2l)}}{2}$ .

Отже, формулою (12) описано шукане температурне поле в ізотропному півпросторі, який нагрівається джерелом тепла, зосередженим у тонкому циліндрі.

3. Припустимо, що півпростір нагрівається тепловим потоком, поверхнева густина якого дорівнює  $q_0$ , зосередженим у крузі з радіусом  $R$  на поверхні півпрос-

тору (див. рис. 1, б). Тоді рівняння теплопровідності для цього випадку запишемо у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

з такими крайовими умовами

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q_0 S_-(R-r), \quad t|_{z \rightarrow \infty} = t_c, \quad t|_{r \rightarrow \infty} = t_c. \quad (14)$$

Застосуємо до задачі (13) і (14) інтегральне перетворення Ганкеля за просторовою координатою  $r$ . Внаслідок отримуємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\theta} = 0 \quad (15)$$

з крайовими умовами

$$\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{q_0 R}{\xi} I_1(R\xi), \quad \bar{\theta} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (16)$$

Частковий розв'язок крайової задачі (15) і (16) знайдемо у вигляді

$$\bar{\theta}(z) = \frac{q_0 R}{\lambda \xi^2} e^{-\xi z} I_1(R\xi). \quad (17)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (17), отримуємо вираз для шуканої температури  $\theta(r, z)$  у вигляді

$$\theta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda} \int_0^\infty \frac{I_1(R\xi) I_0(r\xi)}{\xi} e^{-\xi z} d\xi. \quad (18)$$

Отже, формулою (18) описано температурне поле в ізотропному півпросторі, який нагрівається локально зосередженим на поверхні півпростору тепловим потоком.

4. Розглянемо ізотропний термочутливий (теплофізичні характеристики залежать від температури) простір, в об'ємі  $2\pi R^2 h$  циліндра якого зосереджені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0$ , віднесений до циліндричної системи координат  $(O r \varphi z)$  із початком в центрі циліндра. Для визначення стаціонарного температурного поля в наведеному середовищі використаємо нелінійне рівняння теплопровідності [9], [13]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = -q_0 S_-(R-r) N(z) \quad (19)$$

з крайовими умовами

$$\frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (20)$$

де  $\lambda(t)$  – коефіцієнт теплопровідності термочутливого простору.

Введемо перетворення Кірхгофа [9], [13]

$$\vartheta(r, z) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^r \lambda(\zeta) d\zeta, \quad (21)$$

де  $\lambda^0$  – опорний коефіцієнт теплопровідності простору.

Продиференціюємо вираз (21) за змінними  $r$  та  $z$ . Внаслідок цього отримуємо співвідношення

$$\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} = \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \quad \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial z} = \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (22)$$

після підстановки яких у (19), отримуємо лінійне диференціальне рівняння відносно функції  $\vartheta(r, z)$

$$\Delta \vartheta = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(R-r) N(z). \quad (23)$$

Крайові умови для функції  $\vartheta(r, z)$  із використанням співвідношень (20) і (21) запишемо у вигляді

$$\vartheta|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \vartheta|_{|z| \rightarrow \infty} = 0. \quad (24)$$

Отже, із використанням перетворення Кірхгофа (21) нелінійну крайову задачу теплопровідності (19) і (20) зведено до лінійної задачі (23) і (24).

Застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля за координатою  $r$  до задачі (23) і (24). Внаслідок отримуємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{q_0 R}{\lambda \xi} N(z) J_1(R \xi) \quad (25)$$

з крайовою умовою

$$\bar{\vartheta}|_{|z| \rightarrow \infty} = 0, \quad (26)$$

де  $\bar{\vartheta}(z)$  – трансформанта функції  $\vartheta(r, z)$ .

Із використанням крайової умови (26) за методом варіації сталих знайдемо частковий розв'язок задачі (25) і (26) у вигляді

$$\bar{\vartheta}(z) = \frac{q_0 R}{\lambda^0 \xi^3} J_1(R \xi) \left[ e^{\xi z} sh \xi h + N(z) - ch \xi(z+h) S_-(z+h) + ch \xi(z-h) S_+(z-h) \right]. \quad (27)$$

Застосуємо обернене інтегральне перетворення Ганкеля до співвідношення (27). Внаслідок отримуємо вираз для функції  $\vartheta(r, z)$

$$\vartheta(r, z) = \frac{q_0 R}{\lambda^0} \int_0^\infty \frac{J_0(r \xi)}{\xi^2} J_1(R \xi) \left[ e^{\xi z} sh \xi h + N(z) - ch \xi(z+h) S_-(z+h) + ch \xi(z-h) S_+(z-h) \right] d\xi. \quad (28)$$

У багатьох практичних випадках залежність коефіцієнта теплопровідності від температури подають таким співвідношенням:

$$\lambda(t) = \lambda^0 (1 - kt), \quad (29)$$

де  $k$  – температурний коефіцієнт теплопровідності.

Тоді із використанням виразів (21), (28) і (29) отримуємо співвідношення для визначення температури

$$t(r, z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k\vartheta(r, z)}}{k}. \quad (30)$$

Цією формулою повністю описано розподіл температури в термочутливому просторі з локальним нагріванням.

**Аналіз числових результатів.** Побудовано (рис. 2, а) залежність безрозмірної надлишкової температури  $T(\rho, z) = \lambda \theta(r, z) / (q_0 R^2)$  від безрозмірних просторових координат  $\rho = r / R$ ,  $Z = z / R$  та  $\zeta = R \xi$  для  $H = h / R = 3$ ,  $L = l / R = 4$  за формулою

$$T(\rho, Z) = \int_0^\infty \frac{I_0(\rho \zeta)}{\zeta^2} I_1(\zeta) \left[ sh \zeta H \left[ e^{\zeta z} - e^{-\zeta(z+2(h+l))} \right] + N(Z) - ch \zeta(Z+H) S_-(Z+H) + ch \zeta(Z-H) S_+(Z-H) \right] d\zeta.$$

Із рис. 2 видно, що температура, як неперервна функція просторових координат, описує гладку поверхню і досягає своїх максимальних значень в області зосередження внутрішніх джерел тепла.

Побудовано (див. рис. 2, б) залежність безрозмірної надлишкової температури  $T(\rho, Z) = \lambda \theta(r, z) / (q_0 R^2)$  від безрозмірних просторових координат  $\rho$ ,  $Z$  та  $\zeta$  для  $H = h / R = 3$ ,  $L = l / R = 4$ , критерію Біо  $Bi = \alpha R / \lambda = 10$  за формулою

$$T(\rho, Z) = \int_0^\infty \frac{I_1(\zeta) I_0(\rho \zeta)}{\zeta} \left[ \frac{e^{\zeta Z}}{2} - sh \zeta Z S(Z) + \frac{\zeta - Bi}{\zeta + Bi} \frac{e^{-\zeta(Z+2L)}}{2} \right] d\zeta.$$

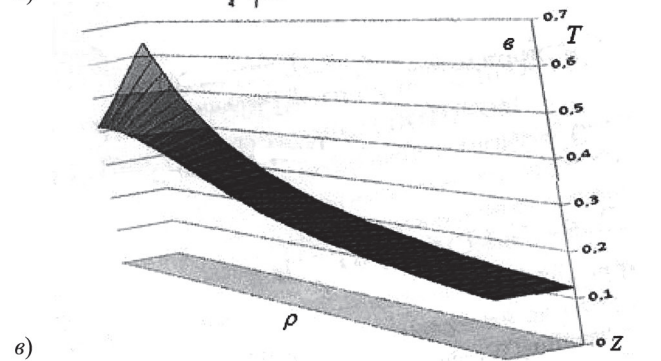
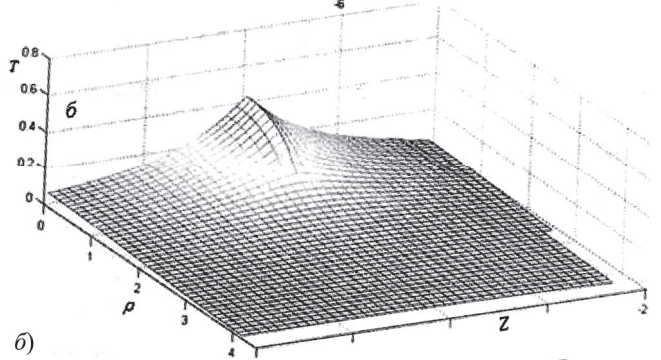
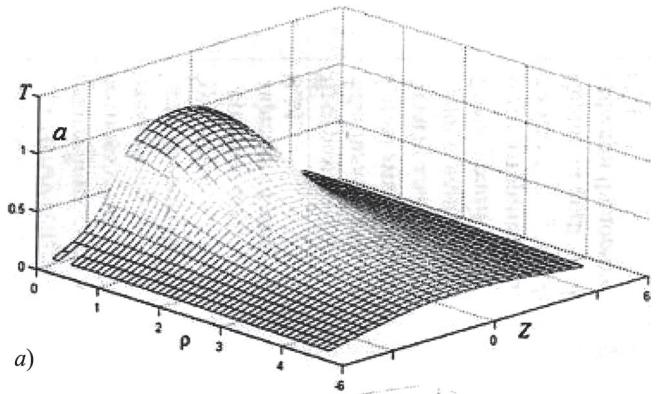


Рис. 2. Залежність надлишкової безрозмірної температури  $T(\rho, Z)$  від безрозмірних просторових координат  $\rho$  та  $Z$

Рис. 2, б ілюструє поведінку температурного поля у півпросторі з тепловіддачею, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла, зосередженими в об'ємі тонкого циліндра. Вигляд поверхні, описаної функцією температури від просторових координат, свідчить про відповідність математичної моделі реальному фізичному процесу.

Побудовано графічну залежність (див. рис. 2, в) для безрозмірної температури  $T(\rho, Z) = \frac{\lambda \theta(r, z)}{q_0 R^2}$  залежно від безрозмірних просторових координат  $\rho$ ,  $Z$  та  $\zeta$  за формулою

$$T(\rho, Z) = \int_0^\infty \frac{I_1(\zeta) I_0(\rho \zeta)}{\zeta} e^{-\zeta Z} d\zeta.$$

Геометричне відображення поведінки температурного поля на рис. 2, в свідчить про неперервність температури як функції просторових координат, яка досягає своїх максимальних значень на поверхні півпростору в області зосередження теплового потоку.

## Висновки

Розроблено математичні моделі визначення температурного поля в окремих елементах турбогенераторів із локально зосередженими джерелами нагрівання. Застосовано теорію узагальнених функцій, яка дала змогу в зручному вигляді описати локальні джерела нагрівання та вихідні диференціальні рівняння теплопровідності з крайовими умовами. Для випадку термочутливого простору вихідну нелінійну математичну модель лінеаризовано за допомогою перетворення Кірхгофа. Внаслідок цього отримано лінійну крайову задачу відносно цього перетворення. За одною з просторових координат застосовано метод інтегрального перетворення Ганкеля і у замкнутому вигляді отримано аналітичні розв'язки крайових задач. Для випадку нелінійної крайової задачі розглянуто лінійну залежність конструкційного матеріалу від температури, внаслідок чого отримано зручну розрахункову формулу для визначення температури. Із використанням аналітичних розв'язків виконано числові розрахунки температури залежно від просторових координат і проведено їх геометричне відображення. Числовий аналіз свідчить про відповідність наведених математичних моделей реальному фізичному процесу.

## References

- [1] Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, 22(5), 1801–1812.
- [2] Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *J. Eng. Math*, 61, 2–4, 371–384.
- [3] Havrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). Modeljvannja temperaturnyh rezhymiv u kuskovo-odnorodnyh strukturah. *Lviv: Vyd-vo Nac. un-tu "Lviv's'ka politehnika"*, 176–178. [In Ukrainian].
- [4] Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Int. Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, 8(4), 1–12.
- [5] Harmatii, H. Yu., Popovych, V. S., & Krul, M. (2019). Vplyv termochutlyvosti materialu na neustalenyi teplovyi stan bahatosharovoi plastyny. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, 1, 98–104. [In Ukrainian].
- [6] Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 3(46), 7–15.
- [7] Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanka, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk NHU*, 1, 94–100.
- [8] Jabbari, M., Karampour, S., & Eslami, M. R. (2011). Radially symmetric steady state thermal and mechanical stresses of a porous FGM hollow sphere. *International Scholarly Research Network Mechanical Engineering*, 3, 1–7. <https://doi.org/10.5402/2011/305402>
- [9] Koliano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka, 268 p. [In Russian].
- [10] Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 650 p. [In Russian].
- [11] Lukashevych, A. (2019). Temperaturne pole u zoni kontaktu pid chas rotatsiinoho zvariuvannia metaliv tertiam. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, 1, 41–46. [In Ukrainian].
- [12] Mohazzab, A. H., & Jabbari, M. (2011). Two-Dimensional Stresses in a Hollow FG Sphere with Heat Source. *Advanced Materials Research*, 264–265, 700–705. <https://doi.org/10.4028/scientific.net/amr.264-265.700>
- [13] Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termouprugost' tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Nauka, 354 p. [In Russian].
- [14] Yangian, Xu., & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM, *WASE. Int. Conf. on Informa. Eng.*, 2–2, 433–436.

**V. I. Havrysh, O. S. Korol, R. R. Shkrab, I. O. Zimoha**

*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## MATHEMATICAL MODELS OF HEAT TRANSFER IN ELEMENTS OF TURBOGENERATORS

Separate mathematical models for determining the temperature distribution in the elements of turbogenerators have been developed, which are described geometrically by an isotropic half-space and a heat-sensitive space with locally concentrated sources of heating. For this purpose, using the theory of generalized functions in a convenient form, we write the initial differential equations of thermal conductivity with boundary conditions. For thermosensitive space (thermophysical parameters are temperature dependent), the original nonlinear thermal conductivity equation and the nonlinear boundary conditions are linearized using the Kirchhoff transform, for which a linear differential equation is obtained. An integral Hankel transform was used to solve the boundary value problems of thermal conductivity, and as a result analytical solutions in the images were obtained. These solutions were applied by the inverted Hankel integral transformation, which made it possible to obtain the final analytical solutions of the original problems. The analytical solutions obtained are presented in the form of non-native convergent integrals. For the construction material of the heat-sensitive space, a linear dependence of the thermal conductivity coefficient on the temperature was used. The result is a convenient formula for determining the temperature field, which allows to analyze temperature regimes in a heat-sensitive environment. To determine the numerical values of temperature in the above structures, as well as to analyze the heat exchange in the elements of the turbogenerators caused by different temperature regimes due to the heating of locally concentrated heat sources, computational programs have been developed. Using these programs are graphs that show the behavior of surfaces constructed using numerical values of the dimensionless temperature distribution depending on the spatial dimensionless coordinates. The obtained numerical values of temperature indicate that the mathematical models of determining the distribution of temperature to the actual physical process are consistent. The software also allows you to analyze locally heated environments for their heat resistance. As a consequence, it becomes possible to raise it, to determine the allowable temperatures of normal operation of the turbogenerators, to protect them from overheating, which can cause destruction not only of individual elements, but also of the whole structure.

**Keywords:** heat exchange; temperature field; thermal conductivity; heat flow; locally concentrated heat sources.

---

**Інформація про авторів:**

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

**E-mail:** gavryshvasyl@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

**Король Олександр Сергійович**, ст. викладач, кафедра фізичного виховання. **E-mail:** korol\_lofkk@i.ua

**Шкраб Роман Романович**, асистент, кафедра програмного забезпечення. **E-mail:** Roman.R.Shkrab@lpnu.ua

**Зімоха Ігор Олегович**, асистент, кафедра програмного забезпечення. **E-mail:** Zimiol@gmail.com

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І., Король О. С., Шкраб Р. Р., Зімоха І. О. Математичні моделі теплообміну в елементах турбогенераторів. *Український журнал інформаційних технологій*. 2019, т. 1, № 1. С. 22–27.

**Citation APA:** Havrysh, V. I., Korol, O. S., Shkrab, R. R., & Zimoha, I. O. (2019). Mathematical models of heat transfer in elements of turbogenerators. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 1(1), 22–27. <https://doi.org/10.23939/ujit2019.01.022>