

УДК 51-74

О. САМОЙЛЕНКО¹, О. АДАМЕНКО²

¹ Доктор технічних наук, професор, директор науково-виробничого інституту ДП “УКРМЕТРТЕСТСТАНДАРТ”, вул. Метрологічна, 4, Київ, 03143, Україна.

² Кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник ДП “УКРМЕТРТЕСТСТАНДАРТ”, вул. Метрологічна, 4, Київ, 03143, Україна.

<https://doi.org/10.23939/istcgcap2019.90.015>

ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ ДОВЖИНИ ДЛЯ ЗВІРЕНЬ АБО КАЛІБРУВАНЬ ВІДДАЛЕМІРІВ І ТАХЕОМЕТРІВ НА ПОЛЬОВОМУ КОМПАРАТОРІ

Розроблено методику зрівнювання результатів вимірювань довжини під час калібрування польового компаратора для повірення (калібрування) віддалемірів та віддалемірної частини тахеометрів. На її основі також створено методику опрацювання результатів звірень еталонних віддалемірів на польовому компараторі за методом найменших квадратів (МНК). За МНК оцінюють адитивні систематичні зміщення вимірювань довжини кожним віддалеміром та систематичні зміщення, які вносить у результати вимірювань довжини кожний відбивач. Також вимагають мультиплікативні ступені еквівалентності віддалемірів. Під час калібрувань польових компараторів систематичні зміщення та ступені еквівалентності, одержані під час звірень віддалемірів, потрібно використовувати як поправлення. За МНК оцінюють невизначеність за типом А значень довжини ліній польового компаратора, а також систематичних зміщень вимірювань віддалемірами.

Ключові слова: еталон, звірення, калібрування, віддалемір, тахеометр, польовий компаратор, адитивні зміщення, мультиплікативні ступені еквівалентності, невизначеність.

Вступ

Великий діапазон вимірювань довжини (від декількох метрів до декількох кілометрів) еталонними віддалемірами ускладнює завдання їх калібрування або звірення. Такі роботи можливі тільки на спеціальних еталонних польових компараторах. Підвищення ефективності калібрування та звірення віддалемірів можливо забезпечити застосуванням універсальної методики опрацювання результатів вимірювань, що робить завдання розроблення такої методики вельми актуальним.

Передмова

Згідно з Міжнародним словником із метрології (VIM) [JCGM 200:2012] “**2.43 метрологічна простежуваність до одиниці вимірювань**” – це “**метрологічна простежуваність**, в якій референцією є визначення **одиниці вимірювання** через її практичну реалізацію”. Геодезичні віддалеміри, під час вимірювань віддалей, прямо і незалежно реалізують визначення одиниці довжини – метра через швидкість світла і вимірний час

[Костецька, 1986]. “**Ланцюг метрологічної простежуваності**” (2.42 VIM [JCGM 200:2012]) реалізується для віддалемірів, розпочинаючи з їх звірень на польовому компараторі і продовжується “...через задокументований неперервний ланцюг калібрувань...” (з 2.41 VIM [JCGM 200:2012]). Важливими ланками ланцюга простежуваності є методи опрацювання результатів вимірювань під час проведення звірень та калібрувань.

Зрівнювання за методом найменших квадратів результатів вимірювань довжини під час міжнародних звірень та калібрувань віддалемірів на польових компараторах є оптимальним методом оцінювання опорних значень довжини ліній польових компараторів та параметрів віддалемірів.

Зауважимо, що еталонний віддалемір може бути як окремим приладом, так і входити до складу електронного тахеометра. Надалі в тексті під терміном віддалемір будемо розуміти всі ці прилади. В джерелах еталонні польові компаратори часто називають еталонними геодезичними базисами, еталонними лінійними полігонами тощо [Braun, et al. 2014; Jokela, et

al., 2009, 2010; JRP SIB 60; Lawson, & Henson, 1986; Кравченко, Неежмаков, 2004; Купко, та ін., 2004; Райшманн, 2010; Тревого, та ін., 2004, 2010; Тревого, Цюпак, 2014]. Автори будуть використовувати тільки термін (еталонні) польові компаратори.

Розроблену та подану нижче методику опрацювання результатів вимірювань можна застосовувати для ключових, регіональних та додаткових звірень віддалемірів, а також під час калібрування польових компараторів за допомогою звірених віддалемірів. Методика також придатна для опрацювання результатів міжлабораторних порівнянь вимірювань довжини віддалемірами та їх калібрувань.

Вимірювання відстані між віддалеміром та відбивачем потрібно виконувати від точки перетину горизонтальної та вертикальної осі обертання віддалеміра до точки перетину аналогічних осей відбивача. Виробники приладів, ремонтні та сервісні підприємства намагаються сконструювати, виготовити та налагодити прилад з урахуванням наведеної вище вимоги. Однак, внаслідок дії механічних похибок виготовлення віддалемірів та відбивачів, точка перетину осей не збігається з точкою, від якої віддалемір вимірює віддаль [Костецкая, 1986]. Віддалемір має певну внутрішню електронно-оптичну затримку своєї роботи, яка повинна, після регулювання, забезпечувати збіг осей його обертання з нулем його віддалемірної шкали. Затримку не можна виставити абсолютно точно й вона може змінюватися з часом, що зумовлює необхідність юстувань, а потім калібрувань та звірень.

Цю затримку для віддалеміра врегулюють на певний відбивач, але інший відбивач може мати інші геометричні розміри, і затримка на нього може бути інша. Цю різницю затримок, яку, теоретично, необхідно знати індивідуально для кожного відбивача, автори статті трактують як власне систематичне зміщення відбивача, яке підлягає визначенню під час калібрувань та звірень.

Огляд першоджерел

Як правило, дослідження точності вимірювань віддалемірами виконують на спеціально побудованих еталонних базисах –

польових компараторах. Такі компаратори побудовані в багатьох країнах світу. Із розташованих в Європі компараторів варто виокремити компаратори в Nummela, Finland [Jokela, et al., 2009, 2010], Braunschweig, Germany [Pollinger, et al., 2012], Kriessern, Switzerland [Райшманн, 2010]. Аналогічні польові компаратори мають Австрія, Чехія, Естонія, Литва, Білорусь та інші. В Україні свої еталонні базиси є у Харкові [Купко, та ін., 2004], Києві [Самойленко, Березань, 2008], Львові [Тревого, та ін., 2004, 2010; Тревого, Цюпак, 2014] та інших містах.

Створення та калібрування польових компараторів описано в [Braun, et al. 2014; Pollinger, et al., 2012; Jokela, et al., 2009, 2010; Купко, та ін., 2004; Тревого, та ін., 2004, 2010; Тревого, Цюпак, 2014]. Методом опрацювання результатів вимірювань довжини ліній польового компаратора є переважно метод найменших квадратів (МНК). Цей метод описано, наприклад, в роботі [ISO 17123-4:2012]. Аналогічно виконано опрацювання результатів вимірювань довжин ліній польового компаратора в роботі [Pollinger, et al., 2012]. У роботі [Jokela, et al., 2010] значення довжин ліній польового компаратора одержано на основі зрівнювання геодезичної мережі, утвореної із вимірювань на польовому компараторі. Недоліком методів, описаних в [Pollinger, et al., 2012] та [Jokela, et al., 2010], є те, що за результатами зрівнювання визначається тільки довжина ліній між пунктами або координати пунктів польового компаратора без визначення можливих систематичних похибок віддалемірів (адитивних констант [Pollinger, et al., 2012], чи поправок нульової точки віддалемірів [ISO 17123-4:2012]). Так у роботі [Pollinger, et al., 2012] адитивну константу пари віддалемір-відбивач визначали окремо, за допомогою комбінації вимірювань згідно з дослідженнями Rueger J. У [ISO 17123-4:2012] із зрівнювання результатів вимірювань довжини ліній визначено поправку нульової точки тільки одного віддалеміра.

У цій статті запропоновано зрівнювання результатів вимірювань довжини, ліній польового компаратора за МНК із визначенням адитивних констант та мультиплікативних

ступенів еквівалентності одночасно декількох віддалемірів та відбивачів.

З проаналізованих джерел можна зробити висновок, що у світі переважно створюють польові компаратори лінійного типу. Перевагою польових компараторів лінійного типу, без сумніву, є можливість комбінування вимірювань із різних точок польового компаратора на всі інші з метою підвищення точності визначення довжин його ліній. Саме використання такого комбінування покладено в основу методу, запропонованого в цій роботі.

Під комбінуванням мається на увазі загальновідомий метод оцінювання систематичної похибки (зміщення або поправки) комплексу віддалемір-відбивач (підрозділ 5.4 та рис. 2 [ISO 17123-4:2012]. Згідно з цим методом, на місцевості в створ встановлюють три штативи з трегерами 1, 2 та 3. Віддалеміром вимірюють три довжини ліній x^{12} , x^{23} та x^{13} .

Якщо вимірювання виконують і в оберненому напрямку, то обчислюють середні з двох. Оцінка систематичної похибки (зміщення) комплексу віддалемір-відбивач тоді дорівнює $d = x^{12} + x^{23} - x^{13}$.

У [ISO 17123-4:2012] також використано зрівнювання результатів вимірювань довжини за методом найменших квадратів. Наведені в [ISO 17123-4:2012] рівняння, які зв'язують виміряні величини та оцінювані параметри польового компаратора, відрізняються від моделей вимірювань (1) та (18) запропонованих у цій статті. В обидві нові моделі вимірювань також входить адитивне систематичне зміщення, внесене віддалеміром у вимірювання довжини d (у [ISO 17123-4:2012] називають поправкою нульової точки (zero-point correction) та позначають δ). Але модель (1) відрізняється тим, що до неї додані адитивні систематичні зміщення, які вносять відбивачі у вимірювання довжини p_m . У разі звірень декількох віддалемірів на польовому компараторі, моделі вимірювань набувають вигляду (18), тобто до (1) додані мультиплікативні ступені еквівалентності віддалемірів b_j .

Нові моделі придатніші до програмування загального випадку зрівнювання вимірювань за

аналогією з геодезичними лінійно-кутовими мережами, де визначуваними параметрами мережі є саме координати, а не їх природи.

Метою методики зрівнювання результатів вимірювань, описаної у [ISO 17123-4:2012], є оцінювання систематичної похибки результатів віддалемірних вимірювань, але не формування низки простежувань у сфері вимірювань великої довжини, однак, після запропонованого доопрацювання це цілком можливо. Переваги запропонованих моделей вимірювань показано на тестовому прикладі, дані для якого взято з [ISO 17123-4:2012]. Результати зрівнювання за моделями (1) та (18) наведено та прокоментовано у розділі 6.

Математичну основу зрівнювання результатів вимірювань під час звірень за методом найменших квадратів описано також у [Nielsen, 2000; 2003; Кузьменко, Самойленко, 2018].

Постановка проблеми

Мета роботи – вирішити проблему розроблення методики зрівнювання результатів вимірювань, виконаних еталонними віддалемірами на польовому компараторі під час їх звірень або калібрування польового компаратора.

Простежуючи довжини, одержані із зрівнювання, адитивні систематичні зміщення та мультиплікативні ступені еквівалентності віддалемірів далі використовують як вихідні (незмінні) під час калібрувань польових компараторів нижчої ланки, а також під час регіональних та додаткових звірень.

На польовому компараторі, який брав участь у тих чи інших звірнях чи був калібрований, адитивні систематичні зміщення відбивачів та опорні (референсні) значення довжини ліній використовуються під час калібрувань віддалемірів, для визначення їх адитивних систематичних зміщень та мультиплікативних ступенів еквівалентності.

Методика та результати роботи

1. Методика вимірювань віддалемірами на польовому компараторі

Розглянемо методику вимірювань еталонними віддалемірами під час їх звірень на польовому компараторі лінійного типу, який

формують декілька закладених у створі залізобетонних стовпів – точок вимірювань (рис. 1) та рис. 3 з [ISO 17123-4:2012].

Серед вимог, яким повинен відповідати польовий компаратор, виокремимо такі. Рекомендована загальна довжина польового компаратора повинна бути не менша за один кілометр. Конструкція верхньої частини стовпів має забезпечувати примусове центрування віддалемірів і відбивачів. Між усіма точками польового компаратора повинна спостерігатись пряма видимість. Виконання останньої умови дає змогу виконати вимірювання віддалей між стовпами польового компаратора у всіх комбінаціях, тобто від кожного стовпа на кожний інший. За оптимальну схему вимірювань беруть ту, що наведена на рис. 4 в [ISO 17123-4:2012], згідно

з якою вимірюють віддалі з точки з номером нуль на всі інші, з точки з номером один на всі точки, які мають більший номер, з точки з номером два на всі точки, які мають більший номер і т. д. Можна виконувати вимірювання не на всі точки, якщо немає такої можливості або вимірювати кожну віддаль, і в прямому напрямку, і в зворотному. Такі вимірювання виконують усіма віддалемірами, які застосовуються у зв'язках.

З досвіду авторів щодо створення високоточних інженерно-геодезичних мереж [Самойленко, та ін., 2008] під час виконання вимірювань віддалей не рекомендують вводити метеорологічні параметри атмосфери – температуру, тиск та вологість повітря в еталонний прилад, якщо ним є сучасний електронний тахеометр.

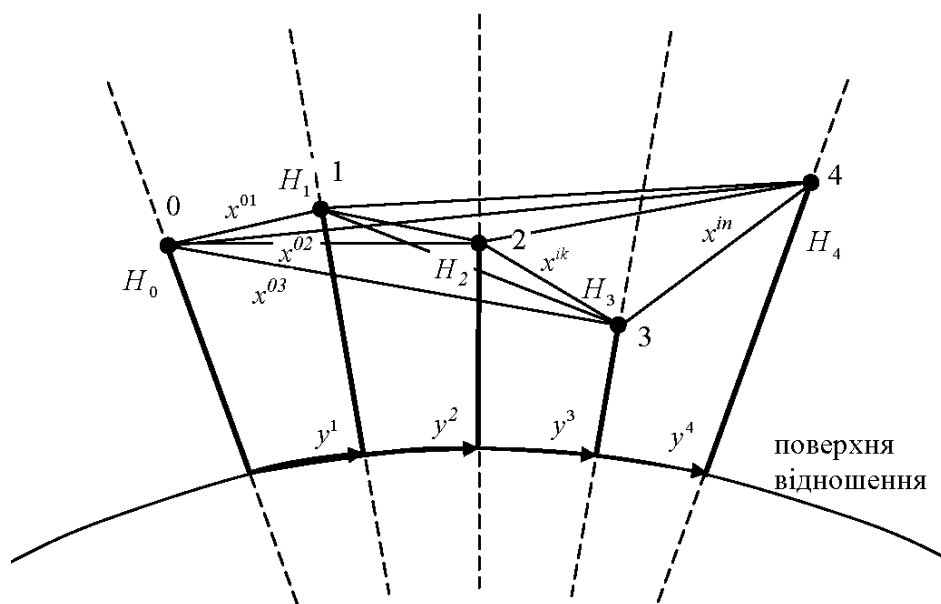


Рис. 1. Принципова схема вимірювань на польовому компараторі

Краще фіксувати або синхронізувати час вимірювань віддалей та метеопараметрів автоматичними метеостанціями і вводити відповідні поправки у віддалі під час опрацювання з урахуванням показів всіх метеоприладів та з урахуванням висот точок компаратора відносно метеостанцій. Докладно таку методику викладено в [Самойленко, Березань, 2008].

Трегерів повинно бути стільки, скільки точок польового компаратора. Їх потрібно встановити на тих самих точках на весь час калібрування чи зв'язень.

Важливо, щоб віддалеміри та відбивачі, між вимірюваннями на різні точки, оберталися виключно навколо вертикальної осі. Якщо обертати труби тахеометрів та відбивачі навколо горизонтальної осі (через зеніт), то потрібні систематичні зміщення обчислити неможливо.

Під час сумісного опрацювання результатів усіх вимірювань усіма віддалемірами необхідно виконати редукування усіх вимірних віддалей на поверхню відношення (рис. 1). За форму поверхні відношення рекомендують вибрати сферу, радіус якої відповідає серед-

ньому радіусу кривизни земного еліпсоїда у місці розташування польового компаратора. Редуковані на поверхню відношення виміряні віддалі можна порівнювати між собою і використовувати для подальшого сумісного оброблення.

Після редукування подальшому опрацюванню підлягають фактично приростки довжини дуг x_m^{ik} на сферичній поверхні відношення. Визначувані параметри польового компаратора під час звірень або його калібрування – це довжина дуг на сфері y^i від початкової точки польового компаратора до кожної наступної (рис. 1).

2. Зрівнювання результатів вимірювань під час калібрування польового компаратора одним еталонним віддалеміром

Під час калібрування польового компаратора за допомогою еталонного віддалеміра вимірювання віддалей між стовпами польового компаратора виконують тільки одним віддалеміром. Для нього модель віддалемірних вимірювань (2.48, VIM [4]) виглядає так:

$$x_m^{ik} = y_m^k - y^i + p_m - d, \quad (1)$$

де $i = 0...n$ – номер точки польового компаратора, на якій встановлено віддалемір ($i = 1...n$ – номер лінії польового компаратора, довжину якої визначають); $k = 0...n$ – номер точки польового компаратора, на якій встановлено відбивач; $m = 1...M$ – номер відбивача; x_m^{ik} – приросток довжини між точками i та k польового компаратора, одержаний за виміряною еталонним віддалеміром віддаллю на відбивач з номером m , після її редукування на поверхню відношення (в рівнянні беруть за виміряну величину); y^i, y_m^k – оцінювані невідомі значення довжини ліній польового компаратора від початкової точки з номером нуль до кожної (див. рис. 1) з номерами i та k , при $i \neq k$, між якими виконувалися вимірювання; d – оцінюване невідоме адитивне систематичне зміщення, внесене віддалеміром у вимірювання довжини; p_m – оцінюване невідоме адитивне систематичне зміщення, внесене відбивачем із номером m у вимірювання довжини.

Рівняння (1) перетворюємо на рівняння поправок (2):

$$v_{x_m^{ik}} = \delta y_m^k - \delta y^i + p_m - d + l_{x_m^{ik}}, \quad (2)$$

де $v_{x_m^{ik}}$ – поправка до виміряного значення приростку довжини лінії польового компаратора; δy_m^k , та δy^i – поправки до наближених значень довжини ліній польового компаратора; $l_{x_m^{ik}} = y_m^{0k} - y^{0i} - x_m^{ik}$ – вільний член рівняння поправок; y^{0i}, y_m^{0k} – наближені значення довжини ліній польового компаратора з номерами i та k .

У [Сох, 2002] величину d названо ступенем еквівалентності. В нашому випадку краще використовувати термін – адитивне систематичне зміщення вимірювань віддалеміром d , оскільки початок шкали повинен збігатися з віссю обертання віддалеміра і ми оцінюємо фактичний відхил нуля шкали віддалеміра від осі обертання. Величину d потрібно визначати під час ключових або регіональних звірень або під час калібрування на польовому компараторі. Її потрібно використовувати як поправку під час обчислення виміряних віддалей в експлуатації.

Значення довжини ліній польового компаратора це фактично одномірні координати його точок в умовній одномірній системі координат.

Початок системи координат зручно помістити в початкову точку польового компаратора, якій присвоюється нульовий номер. Тоді, для початкової точки з номером нуль рівняння поправок (2) запишемо:

$$v_{x_m^{ik}} = \delta y_m^k - \delta y^0 + p_m - d + l_{x_m^{ik}}, \quad (3)$$

Координата цієї точки, в умовній системі координат, дорівнює нулю. Під час оброблення, ця координата не отримує поправки (не змінюється), поправки одержують тільки одномірні координати всіх інших точок. Тобто, $\delta y^0 = 0$. Ця умова забезпечує від виродження матрицю нормальних рівнянь (7), (14) та (22).

Тоді, для всіх виміряних приростків довжини ліній, виміряних із початкової точки з номером нуль, рівняння (3) виглядатиме так:

$$v_{x_m^{ik}} = \delta y_m^k + p_m - d + l_{x_m^{ik}}. \quad (4)$$

Для всіх приростків довжини ліній вимірних з будь-якої точки на точку з номером нуль, рівняння (3) набуде такого вигляду:

$$v_{x_m^{ik}} = -\delta y^i + p_m - d + l_{x_m^{ik}}, \quad (5)$$

де p_m – у цьому разі невідоме систематичне зміщення вимірюваної довжини, внесене відбивачем з номером m , який було встановлено на точці з номером нуль.

3. Структура рівнянь поправок та нормальних рівнянь

Рівняння поправок (3), (4) та (5) в загальній матричній формі виглядає так:

$$V_x = A_y \cdot \delta y + A_p \cdot p + A_d \cdot d + l, \quad (6)$$

де A_y – матриця коефіцієнтів лінійних рівнянь поправок за невідомих значень вимірюваної довжини ліній польового компаратора; A_d – матриця коефіцієнтів лінійних рівнянь поправок за невідомого систематичного зміщення, яке вносить у вимірювану довжину віддалемір, яким калібрується компаратор; A_p – матриця коефіцієнтів лінійних рівнянь поправок у разі систематичних зміщень, які вносять у вимірювану довжину відбивачі з комплекту польового компаратора; δy – вектор-стовпчик поправок до наближених значень довжини ліній польового компаратора; d – систематичне зміщення, яке вносить у вимірювану довжину віддалемір; p – вектор-стовпчик систематичних зміщень, які вносять у вимірювану довжину відбивачі з комплекту польового компаратора; l – вектор-стовпчик вільних членів лінійних рівнянь; V_x – діагональна матриця поправок до вимірних значень приростків довжини ліній польового компаратора.

Загалом матриця коефіцієнтів і вектор вільних членів нормальних рівнянь виглядають так:

$$N = A^T W A = \begin{bmatrix} A_y^T W A_y & A_y^T W A_p & A_y^T W A_d \\ A_p^T W A_y & A_p^T W A_p & A_p^T W A_d \\ A_d^T W A_y & A_d^T W A_p & A_d^T W A_d \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$L = A^T W l = \begin{bmatrix} A_y^T W l \\ A_p^T W l \\ A_d^T W l \end{bmatrix},$$

де W – матриця ваг вимірних значень приростків довжини ліній польового компаратора.

$$W = \begin{bmatrix} W_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\text{де } W_0 = \begin{bmatrix} w_{x_m^{01}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_{x_m^{0k}} \end{bmatrix};$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_{x_m^{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_{x_m^{1k}} \end{bmatrix}; \quad W_i = \begin{bmatrix} w_{x_m^{i1}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_{x_m^{ik}} \end{bmatrix};$$

$$W_n = \begin{bmatrix} w_{x_m^{n1}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_{x_m^{nk}} \end{bmatrix},$$

де $w_{x_m^{ik}} = \frac{u^2(x^0)}{u^2(x_m^{ik})}$, де $u(x^0)$ – невизначеність

вимірювання, для якого вага вимірювання взята за одиницю; $u(x_m^{ik}) = u(d) + u(b) \cdot x_m^{ik}$ – невизначеність вимірювань приростка довжини; $u(d)$ – одержана зі зв'язу невизначеність адитивного систематичного зміщення вимірювань довжини віддалеміром; $u(b)$ – одержана зі зв'язу невизначеність мультиплікативного ступеня еквівалентності вимірювань довжини віддалеміром.

Для кожної точки польового компаратора, на якій встановлюють віддалемір і проводять вимірювання, блоки матриці коефіцієнтів рівнянь поправок виглядатимуть так:

$$A_{y,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E;$$

$$A_{y,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{y,2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_{y^n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Якщо відбивачів буде на один менше, ніж точок польового компаратора, і найближчий відбивач змінюватимуть місцями із віддалеміром, то блок матриці нормальних рівнянь за невідомих систематичних зміщень відбивачів виглядатиме як одинична матриця для кожної точки, де встановлено віддалемір:

$$A_{p_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E. \quad (10)$$

Якщо відбивачів менше, ніж визначуваних значень довжини ліній і їх переставляли на різні точки польового компаратора, поки віддалемір знаходився на одній, то матриця (10) матиме іншу структуру. Наприклад, якщо визначуваних значень довжини вісім, а відбивачів чотири:

$$A_{p_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Тобто під час вимірювань з початкової точки перший відбивач встановлено на першій і п'ятій точках, другий – на другій і шостій і т. д.

Матриця коефіцієнтів у разі невідомого систематичного зміщення вимірювань віддалей віддалеміром на кожній точці виглядатиме так:

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Враховуючи (9), (10) та (12), всю матрицю нормальних рівнянь у блочному

вигляді можна одержати після перемноження матриць:

$$A^T W A = \begin{bmatrix} E & A_{y^1}^T & A_{y^2}^T & \dots & A_{y^n}^T \\ E & E & E & \dots & E \\ A_d^T & A_d^T & A_d^T & \dots & A_d^T \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} E & E & A_d \\ A_{y^1} & E & A_d \\ A_{y^2} & E & A_d \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{y^n} & E & A_d \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Після перемноження (13) матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь і вільних членів буде спрощена щодо (7):

$$N = A^T W A = \begin{bmatrix} W_0 + \sum_{i=1}^n A_{y^i}^T W_i A_{y^i} & W_0 + \sum_{i=1}^n W_i A_{y^i} & 0 \\ W_0 + \sum_{i=1}^n W_i A_{y^i}^T & \sum_{i=0}^n W_i & \sum_{i=0}^n W_i A_d \\ 0 & A_d^T \sum_{i=0}^n W_i & \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n W_{x_m}^{i,k} \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$L = A^T W l = \begin{bmatrix} W_0 l_{x_m}^{0,k} + \sum_{i=1}^n A_{y^i}^T W_i l_{x_m}^{i,k} \\ \sum_{i=0}^n W_i l_{x_m}^{i,k} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n W_{x_m}^{i,k} l_{x_m}^{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_y \\ L_p \\ L_d \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Нормальні рівняння загалом запишуть:

$$N \cdot \begin{bmatrix} \delta y \\ p \\ d \end{bmatrix} + L = 0. \quad (16)$$

Викладена вище методика оброблення вимірювань розрахована на випадок, коли стоїть завдання проконтролювати, за результатами калібрування польового компаратора, адитивне систематичне зміщення еталонного віддалеміра. Але в цьому разі матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь (13) має неповний ранг, тому для одержання всіх невідомих потрібно одержати псевдообернену матрицю [Lawson, & Henson, 1986] щодо матриці нормальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \delta y \\ p \\ d \end{bmatrix} = -N^+ \cdot L = -Q \cdot \begin{bmatrix} L_y \\ L_p \\ L_d \end{bmatrix}, \quad (17)$$

де $Q = N^+$ – матриця псевдообернена до матриці нормальних рівнянь.

Аддитивне систематичне зміщення d та мультиплікативна ступінь еквівалентності вимірювань віддалеміром b , одержані під час звірень, потрібно обов'язково використовувати для обчислення поправок до виміряних значень віддалей перед обробленням під час калібрування.

Тоді у наведених вище рівняннях невідомого d не буде. Матриця нормальних рівнянь матиме повний ранг.

4. Зрівнювання результатів вимірювань під час звірень віддалемірів на польовому компараторі

Під час звірень віддалемірів на польовому компараторі методика оброблення ускладнюється щодо методики калібрування компаратора. По-перше, кожний з віддалемірних приладів має своє адитивне зміщення, яке треба оцінити зі звірень, по-друге, віддалеміри вимірюють довжину в межах свого діапазону з мультиплікативною (пропорційною вимірюваній довжині) систематичною похибкою, з причин, які не проаналізовані в межах дослідження. Оцінка цього коефіцієнта пропорційності, одержана за результатами звірень, є типовим мультиплікативним ступенем еквівалентності еталона розглянутим, наприклад, у [Кузьменко, Самойленко, 2018].

Модель вимірювань (2.48, VIM [JCGM 200:2012]) віддалемірами матиме дещо інший, ускладнений вигляд:

$$x_{jm}^{ik} = y_m^k - y_j^i + p_m - d_j + x_{jm}^{ik} \cdot b_j, \quad (18)$$

де $i = 0 \dots n$ – номер точки польового компаратора, на якій встановлювався віддалемір ($i = 1 \dots n$ – номер лінії польового компаратора, довжину якої визначають); $k = 0 \dots n$ – номер точки польового компаратора, на якій встановлено відбивач; $m = 1 \dots M$ – номер відбивача; $j = 1 \dots J$ – номер еталонного віддалеміра, який використовують у звірнях; x_{jm}^{ik} – приросток довжини між точками i та k польового компаратора, одержаний за виміряною еталонним віддалеміром із номером j віддаллю на відбивач з номером m , після її редукування на поверхню відношення (в рівнянні беруть за виміряну величину); y_j^i, y_m^k – оцінювані невідомі значення довжини ліній

польового компаратора від початкової точки з номером нуль до кожної (рис. 1) з номерами i та k , при $i \neq k$, між якими виконано вимірювання; d_j – оцінюване невідоме адитивне систематичне зміщення внесене віддалеміром з номером j у вимірювання довжини; p_m – оцінюване невідоме адитивне систематичне зміщення внесене відбивачем з номером m у вимірювання довжини; b_j – мультиплікативна ступінь еквівалентності еталонного віддалеміра з номером j (можна інтерпретувати як різницю, відносно мірою, між величиною одиниці вимірювань відтвореною конкретним еталонном та величиною одиниці вимірювань усередненою (оціненою) за результатами звірень).

Рівняння (18) перетворюємо на рівняння поправок (19):

$$v_{x_{jm}^{ik}} = \delta y_m^k - \delta y_j^i + p_m - d_j + b_j \cdot x_{jm}^{ik} + l_{x_{jm}^{ik}}, \quad (19)$$

де $v_{x_{jm}^{ik}}$ – поправка до виміряного значення приростку довжини лінії польового компаратора; δy_j^i та δy_m^k – поправки до наближених значень довжини ліній польового компаратора, взятих за опорні (референсні) значення; $l_{x_{jm}^{ik}} = y_m^{0k} - y_j^{0i} - x_{jm}^{ik}$ – вільний член рівняння поправок; y_j^{0i}, y_m^{0k} – наближені значення довжини ліній польового компаратора з номерами i та k .

Для зрівнювання результатів ключових звірень необхідно додати таке додаткове рівняння до системи рівнянь (19):

$$\sum_{j=1}^J b_j = 0. \quad (20)$$

Тільки додавання рівняння (20) до системи рівнянь (19) дає змогу усереднювати величину одиниці вимірювань довжини, відтворену всіма конкретними еталонами учасників.

Рівняння поправок (19) у матричному вигляді:

$$V_x = \bar{A}_y \cdot \delta y + \bar{A}_p \cdot p + \bar{A}_d \cdot d + \bar{A}_b \cdot b + l. \quad (21)$$

Якщо кожним віддалеміром, який використовують у звірнях, вимірювання на

польовому компараторі виконували за однаковою програмою, то матриці коефіцієнтів із (21) будуть складатись із відповідних блоків рівняння (6):

$$\bar{A}_y = \begin{bmatrix} A_y \\ A_y \\ \dots \\ A_y \end{bmatrix}; \bar{A}_p = \begin{bmatrix} A_p \\ A_p \\ \dots \\ A_p \end{bmatrix}; \bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_d & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_d \end{bmatrix};$$

$$\bar{A}_b = \begin{bmatrix} A_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_b \end{bmatrix}, \text{ де } A_b = \begin{bmatrix} x_{jm}^{i1} \\ x_{jm}^{i2} \\ \dots \\ x_{jm}^{in} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Матриця нормальних рівнянь та вектор вільних членів у загальному вигляді:

$$N = \begin{bmatrix} \bar{A}_y^T \bar{W} \bar{A}_y & \bar{A}_y^T \bar{W} \bar{A}_p & \bar{A}_y^T \bar{W} \bar{A}_d & \bar{A}_y^T \bar{W} \bar{A}_b \\ \bar{A}_p^T \bar{W} \bar{A}_y & \bar{A}_p^T \bar{W} \bar{A}_p & \bar{A}_p^T \bar{W} \bar{A}_d & \bar{A}_p^T \bar{W} \bar{A}_b \\ \bar{A}_d^T \bar{W} \bar{A}_y & \bar{A}_d^T \bar{W} \bar{A}_p & \bar{A}_d^T \bar{W} \bar{A}_d & \bar{A}_d^T \bar{W} \bar{A}_b \\ \bar{A}_b^T \bar{W} \bar{A}_y & \bar{A}_b^T \bar{W} \bar{A}_p & \bar{A}_b^T \bar{W} \bar{A}_d & \bar{A}_b^T \bar{W} \bar{A}_b \end{bmatrix}; \quad (23)$$

$$L = \bar{A}^T l = \begin{bmatrix} \bar{A}_y^T W l \\ \bar{A}_p^T W l \\ \bar{A}_d^T W l \\ \bar{A}_b^T W l \end{bmatrix}.$$

У формулах (23) вагу вимірювань можна обчислити за формулами аналогічними до формул (8), з певними уточненнями:

$u(x_{jm}^{ik}) = u(d_j) + u(b_j) \cdot x_{jm}^{ik}$ – невизначеність вимірювань приростка довжини віддалеміром із номером j ; $u(d_j)$ – заявлена учасником звірень невизначеність адитивного систематичного зміщення вимірювань довжини віддалеміром; $u(b_j)$ – заявлена учасником невизначеність мультиплікативної ступені еквівалентності вимірювань довжини віддалеміром.

Як і в описаному в пункті 3 випадку, матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь (23) має неповний ранг, тому для одержання всіх невідомих треба одержати псевдообернену матрицю [Lawson, & Henson, 1986] щодо матриці нормальних рівнянь за аналогією з (17). Ранг матриці (23) буде меншим за кількість нормальних рівнянь на кількість віддалемірів, що застосовували у звірнях.

5. Оцінювання невизначеності вимірювань довжини за типом А

Розглянемо оцінювання невизначеності за типом А, вважаючи розгляд питання оцінювання невизначеності за типом В окремою темою.

У [JCGM 100:2008] не описано оцінювання невизначеності за типом А за методом найменших квадратів. Однак за [JCGM 100:2008; ISO 17123-4:2012], а також згідно з [JCGM 102:2011] наведемо оцінювання невизначеності у два етапи. На першому етапі ця процедура торкнеться калібрування польового компаратора за допомогою одного еталонного віддалеміра (пункт 2 та 3). На другому – оцінювання невизначеності результатів звірень еталонних віддалемірів на польовому компараторі (пункт 4). Процедура, розроблена для першого етапу, має важливе самостійне значення під час виконання другого.

У процесі опрацювання результатів калібрування польового компаратора, після вирішення системи нормальних рівнянь і знаходження невідомих опорних (референсних) значень довжини ліній, адитивних зміщень віддалеміра та відбивачів, знаходимо значення стандартного відхилення вимірюваного значення довжини, вага якого дорівнює одиниці, за формулою:

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_{x_m^{ik}} \cdot v_{x_m^{ik}}^2}{r}}, \quad (24)$$

де $v_{x_m^{ik}}$ – обчислюють після вирішення нормальних рівнянь за формулами (2)–(5).

Максимальна кількість ступенів свободи у формулі (24), за умови, що вимірювали довжину у всіх можливих комбінаціях, розраховують за формулою:

$$r = n \cdot (n - 1) - M - 1. \quad (25)$$

У формулі (24) після позначення стандартного відхилення S стоїть нижній індекс j , який позначає номер тахеометра. На першому етапі опрацювання результатів звірень можна скористатися тою самою методикою, що і для опрацювання результатів калібрування польового компаратора, зокрема для обчислення стандартного відхилення.

Після вирішення системи нормальних рівнянь і знаходження невідомих опорних (референсних) значень довжини ліній, адитивних зміщень віддалемірів та відбивачів, а також мультиплікативних ступенів еквівалентності віддалемірів знаходимо значення стандартного відхилення вимірюваного значення довжини, вага якого дорівнює одиниці за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_{x_{jm}^{ik}} \cdot v_{x_{jm}^{ik}}^2}{r}}, \quad (26)$$

де $v_{x_{jm}^{ik}}$ – обчислюють після вирішення нормальних рівнянь за формулою (19).

Максимальну кількість ступенів свободи у формулі (26) розраховують за формулою:

$$r = n \cdot (n - 1) \cdot J - M - 2 \cdot J. \quad (27)$$

Невизначеності за типом А параметрів польового компаратора та віддалемірів під час їх калібрувань та звірень обчислюють за формулами:

$$u_A(y_i) = S \cdot \sqrt{Q_{y_{ii}}}; \quad u_A(p_m) = S \cdot \sqrt{Q_{p_{mm}}}; \quad (28)$$

$$u_A(d_j) = S \cdot \sqrt{Q_{d_{jj}}}; \quad u_A(b_j) = S \cdot \sqrt{Q_{b_{jj}}}, \quad (29)$$

де $Q_{y_{ii}}$, $Q_{p_{mm}}$, $Q_{d_{jj}}$ та $Q_{b_{jj}}$ – діагональні члени, відповідно, першого, другого, третього і четвертого діагональних блоків матриці псевдооберненої [Lawson, & Henson, 1986] до матриці нормальних рівнянь (23); $u_A(y_i)$ – невизначеність опорних (референсних) значень довжин ліній польового компаратора; $u_A(p_m)$ – невизначеність систематичних зміщень, які вносять у вимірювання довжини відбивач; $u_A(d_j)$ – невизначеність адитивних систематичних зміщень вимірювань еталонними віддалемірами; $u_A(b_j)$ – невизначеність мультиплікативного ступеня еквівалентності еталонних віддалемірів.

Оцінювання невизначеності відтворення початку та одиниці вимірювань за шкалою довжини усіма віддалемірами за всіма точками шкали, які враховано у звіреннях, виконаємо через складання вагових функцій:

$$F_{\bar{d}} = \frac{\sum_{j=1}^J d_j}{J}; \quad F_{\bar{b}} = \frac{\sum_{j=1}^J b_j}{J}. \quad (30)$$

Обчислимо обернені ваги цих функцій за формулами:

$$Q_{\bar{d}} = f_{\bar{d}} \cdot Q \cdot f_{\bar{d}}^T; \quad Q_{\bar{b}} = f_{\bar{b}} \cdot Q \cdot f_{\bar{b}}^T, \quad (31)$$

де $f_{\bar{d}} = [1/J \dots 1/J \dots 1/J]$ – вектор часткових похідних від першої функції (30) за адитивними зміщеннями віддалемірів;

$f_{\bar{b}} = [1/J \dots 1/J \dots 1/J]$ – вектор часткових похідних від другої функції (30) за мультиплікативними ступенями еквівалентності.

Невизначеність відтворення початку шкали та одиниці вимірювань довжини усіма еталонними віддалемірами за всіма точками шкали, в яких виконано вимірювання під час звірень:

$$u_A(\bar{d}) = S \cdot \sqrt{Q_{\bar{d}}}; \quad u_A(\bar{b}) = S \cdot \sqrt{Q_{\bar{b}}}. \quad (32)$$

Отже, кожний учасник отримує найімовірніше значення адитивного систематичного зміщення та мультиплікативного ступеня еквівалентності свого еталонного віддалеміра та невизначеності цих значень, а також невизначеність початку шкали довжини та величину одиниці вимірювань загалом для звірень.

6. Приклад зрівнювання результатів вимірювань довжини, виконаних на польовому компараторі

У табл. 1 та 2 наведено тестове зрівнювання результатів вимірювань еталонним віддалеміром довжини ліній польового компаратора під час його калібрування за тестовими даними, наведеними у [ISO 17123-4:2012] за методикою описаною в пунктах 2, 3 та 4 цієї статті. Для такого компаратора необхідно одержати довжину шести його ліній від точки з номером 0 до кожної з номерами від 1 до 6. Ця довжина ліній позначена від y^1 до y^6 . На польовому компараторі виміряно всі приростки довжини x_m^{ik} між точками в одному напрямку, разом 21 віддаль. В другому стовпці табл. 1 наведено виміряні значення приростків довжини ліній польового компаратора. Для тестового зрівнювання результати вимірювань прийнято рівноточними, як і в [ISO 17123-4:2012].

Таблиця 1

Виміряні значення довжини ліній польового компаратора, коефіцієнти та вільні члени рівнянь поправок, поправки $v_{x_m^{ik}}$ до виміряних значень довжини ліній x_m^{ik} польового компаратора, кількість ступенів свободи та стандартні відхили вимірювань для моделей вимірювань 1, 2, 3 та 4

№ ліній	Значення довжини ліній, м	Коефіцієнти рівнянь поправок для:									Вільні члени, мм	Поправки до значень довжини для моделей вимірювань, мм			
		моделі вимірювань 3										1	2	3	4
		моделі вимірювань 2					d_1	p_1	p_2						
		моделі вимірювань 1													
ik	x_m^{ik}	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	d_1	p_1	p_2	$l_{x_m^{ik}}$	$v_{x_m^{ik}}$	$v_{x_m^{ik}}$	$v_{x_m^{ik}}$	$v_{x_m^{ik}}$
01	50,801	1						-1	1		0,0	3,9	2,9	0,1	0,1
02	162,806		1					-1	1		0,0	2,9	2,3	0,1	0,1
03	335,904			1				-1		1	0,0	-1,3	-1,5	1,0	1,0
04	478,407				1			-1		1	0,0	-6,0	-5,8	-3,5	-3,5
05	559,810					1		-1		1	0,0	-1,6	-1,0	1,9	1,9
06	580,098						1	-1	1		0,0	2,1	3,1	0,4	0,4
12	112,007	-1	1					-1		1	-2,0	-3,0	-3,9	-0,6	-0,6
13	285,096	-1		1				-1	1		7,0	1,9	1,3	-0,3	-0,3
14	427,594	-1			1			-1	1		12,0	2,1	2,0	0,3	0,3
15	509,004	-1				1		-1	1		5,0	-0,4	-0,2	-1,3	-1,3
16	529,292	-1					1	-1	1		5,0	3,3	3,8	2,0	2,0
23	173,091		-1	1				-1	1		7,0	2,9	1,9	-0,2	-0,2
24	315,592		-1		1			-1		1	9,0	0,1	-0,4	2,1	2,1
25	396,999		-1			1		-1	1		5,0	0,6	0,4	-1,3	-1,3
26	417,295		-1				1	-1		1	-3,0	-3,7	-3,5	-1,2	-1,2
34	142,494			-1	1			-1	1		9,0	4,3	3,4	1,2	1,2
35	223,904			-1		1		-1	1		2,0	1,7	1,2	-0,4	-0,4
36	244,200			-1			1	-1		1	-6,0	-2,6	-2,8	-0,3	-0,3
45	81,409				-1	1		-1		1	-6,0	-1,6	-2,5	0,8	0,8
46	101,697				-1		1	-1	1		-6,0	2,1	1,6	-0,7	-0,7
56	20,293					-1	1	-1		1	-5,0	-1,3	-2,2	-0,3	-0,3
Сума вільних членів та поправок $\sum l_{x_{jm}^{ik}}$ та $\sum v_{x_{jm}^{ik}}$, мм											33,0	6,4	0,0	0,0	0,0
Сума квадратів вільних членів та поправок $\sum l_{x_{jm}^{ik}}^2$ та $\sum v_{x_{jm}^{ik}}^2$, мм											629,0	154,7	146,4	33,6	100,8
Кількість ступенів свободи												15	14	12	50
Стандартний відхил S , мм												3,21	3,23	1,67	1,42

Щоб показати ефект від зрівнювання, одні і ті самі результати вимірювань опрацьовано за трьома моделями вимірювань.

Перша модель максимально спрощена щодо моделі вимірювань (1):

$$x_m^{ik} = y_m^k - y^i. \quad (33)$$

тут відсутні, як визначувані параметри, систематичні зміщення вимірювань віддалеміром. Зі

зрівнювання визначають тільки шість значень довжини ліній польового компаратора (стовпці 3–8 табл. 1).

Друга модель передбачає систематичне зміщення, яке вносять сумарно у вимірювання комплекту віддалемір-відбивачі (стовпець 9 табл. 1 та 2):

$$x_m^{ik} = y_m^k - y^i - d. \quad (34)$$

Таблиця 2

Поправки до наближених значень довжини ліній та їх невизначеності типу А

Наближені значення		Модель вимірювань 1		Модель вимірювань 2		Модель вимірювань 3		Модель вимірювань 4	
		Поправки	Невизначеність	Поправки	Невизначеність	Поправки	Невизначеність	Поправки	Невизначеність
y^1 , мм	50801	3,9	1,7	4,2	1,8	3,4	0,9	4,0	0,46
y^2 , мм	162806	2,9	1,7	3,6	1,9	3,4	1,0	5,0	0,49
y^3 , мм	335904	-1,3	1,7	-0,2	2,1	-0,5	1,1	2,9	0,56
y^4 , мм	478407	-6,0	1,7	-4,5	2,4	-4,9	1,2	-0,1	0,65
y^5 , мм	559810	-1,6	1,7	0,3	2,7	0,5	1,4	6,1	0,73
y^6 , мм	580098	2,1	1,7	4,3	3,0	3,8	1,6	9,6	0,82
d_1 , мм	0	-	-	1,3	1,4	0,6	0,5	0,4	0,51
d_2 , мм	0	-	-	-	-	-	-	0,4	0,51
d_3 , мм	0	-	-	-	-	-	-	0,4	0,51
p_1 , мм	0	-	-	-	-	-2,7	0,4	-3,0	0,28
p_2 , мм	0	-	-	-	-	2,1	0,5	1,8	0,30
b_1 , ppm	0	-	-	-	-	-	-	-10	1,5
b_2 , ppm	0	-	-	-	-	-	-	-20	1,5
b_3 , ppm	0	-	-	-	-	-	-	30	1,5

Внаслідок зрівнювання одержано доволі істотне систематичне зміщення: $d = -1,3$ мм з невизначеністю типу А $u_A(d) = 1,44$ мм. Ці результати точно відповідають результатам, наведеним у [ISO 17123-4:2012] у розділі В.3.

Третя модель вимірювань відповідає формулі (1). Для двох відбивачів із номерами 1 і 2 модель вимірювань (1) виглядає так:

$$x_1^{ik} = y_1^k - y^i - d + p_1; \quad (35)$$

$$x_2^{ik+1} = y_2^{k+1} - y^i - d + p_2;$$

Коефіцієнти рівнянь поправок і нормальних рівнянь, які відповідають відбивачам 1 і 2 з рівнянь (35), наведено в стовпцях 10 і 11 табл. 1.

Зрівнювання за третьою моделлю розділило загальне систематичне зміщення, одержане за другою моделлю, між віддалеміром та двома відбивачами: $d = 0,6$ мм; $p_1 = -2,7$ мм; $p_2 = 2,1$ мм. У цьому конкретному випадку ефект від такого розподілення дуже значний. Уведення цих систематичних зміщень у модель вимірювань дало змогу зменшити стандартний відхил вимірювання довжини вдвічі з $S = 3,23$ мм до $S = 1,67$ мм.

Четверта модель вимірювань відповідає формулам (18)–(23) і моделює звірення трьох віддалемірів з номерами 1, 2 і 3 на тому самому польовому компараторі. Вимірювання виконували на два ті самі відбивачі з номерами 1 і 2. Всіх коефіцієнтів рівнянь поправок для моделі 4 не наведено, адже тоді табл. 1 треба було б розширити і повторити тричі. Для обчислення коефіцієнтів для мультиплікативних ступенів еквівалентності віддалемірів застосовують довжини ліній із другого стовпця табл. 1.

З метою перевірки правильності обчислень мультиплікативних ступенів еквівалентності віддалемірів вважали, що віддалеміри виконували вимірювання з мультиплікативними систематичними похибками $b_1^{\text{mod}} = 0$ ppm, $b_2^{\text{mod}} = -10$ ppm, $b_3^{\text{mod}} = 40$ ppm. У реальних вимірюваннях ці похибки невідомі. Інших похибок вимірювань, стосовно моделі 3, не змодельовано. Завдяки цьому поправки до результатів вимірювань довжини у моделі 4 точно відповідають поправкам із моделі 3 для усіх трьох віддалемірів (два останніх стовпці табл. 1).

Поправки до наближених значень довжини ліній і параметрів віддалемірів за результатами зрівнювання за моделлю 4 та їхні стандартні невизначеності за типом А наведено у двох останніх стовпцях табл. 2. Зрівняні значення мультиплікативних ступенів еквівалентності віддалемірів з табл. 2 становили $b_1 = -10$ ppm, $b_2 = -20$ ppm, $b_3 = 30$ ppm, тобто умова (20) після зрівнювання виконується. Різниця поправок до наближених значень довжин ліній польового компаратора для моделей 3 та 4 з табл. 2 становить 10 ppm. Отже, використання моделі вимірювань (18) дає змогу усереднити одиницю вимірювань довжини за результатами звірень.

Під час зрівнювання для моделей вимірювань 1 та 2 застосовано звичайне обернення матриці нормальних рівнянь, а для моделі 3 та 4 – псевдообернення.

Для польового застосування обчислюють постійні поправки до комплекту віддалеміра та кожного відбивача, наприклад, $c_1 = d + p_1 = -3,3$ мм та $c_2 = d + p_2 = 1,5$ мм.

Висновки

1. Запропонована методика зрівнювання за МНК результатів вимірювань під час звірень віддалемірів на польовому компараторі дає змогу оцінити адитивні систематичні зміщення вимірювань довжини окремо для віддалемірів та відбивачів, а також мультиплікативні ступені еквівалентності віддалемірів (параметри віддалемірів) та їх невизначеності типу А.

2. Зрівняні параметри віддалемірів можна використати для побудови обґрунтованої низки простежуваності результатів вимірювань довжини. Параметри віддалемірів, оцінені під час ключових звірень, використовують як поправки під час регіональних та додаткових звірень та/або калібрувань і польових компараторів, і віддалемірів нижчого ступеня у схемі.

3. Під час зрівнювання результатів ключових звірень виникає проблема неповного рангу матриці нормальних рівнянь. Її запропоновано вирішувати методом псевдообернення матриці нормальних рівнянь.

4. Мультиплікативний ступінь еквівалентності кожного віддалеміра можна інтерпретувати як різницю, відносно, між величиною

одиниці вимірювань, відтвореною конкретним еталоном, щодо величини одиниці вимірювань усередненої (оціненої) за результатами звірень. Невизначеність відтворення величини одиниці вимірювань всіма віддалемірами за всіма точками вимірювань у діапазоні польового компаратора за результатами звірень оцінюють також.

5. Референсні значення ключових звірень для довжини ліній польового компаратора не викривлено в межах оціненої невизначеності систематичними похибками вимірювань віддалемірами тому, як мультиплікативні ступені еквівалентності та адитивні зміщення, окремо для віддалемірів та відбивачів, оцінюють за результатами зрівнювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Костецкая Я. М. Свето- и радиодальномеры. Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1986, 264 с.
- Кравченко Н. И., Неежмаков П. И. Методы и средства метрологического обеспечения линейных измерений на геодинимических полигонах Украины. Український метрологічний журнал. 2004, Вип. 2, С. 23–28.
- Кузьменко Ю., Самойленко О. Опрацювання за методом найменших квадратів результатів вимірювань за ключових, регіональних та додаткових звірень еталонів. Метрологія та прилади. Харків: ВКФ “Фавор”, 2018, № 2.
- Купко В., Прокопов О., Лукін І., Соболь В., Косенко О., Кофман О. Національний еталонний лінійно-геодезичний полігон. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. праць. Львів, 2004, С. 98–104.
- Райшманн С. Аккредитация вызывает доверие. 2010. Режим доступу: https://w3.leica-geosystems.com/media/new/product_solution/Report_er63_MAG_201009_ru.pdf
- Самойленко О. М., Адаменко О. В., Болотіна О. В., Заєць В. В., Хо́да О. О. Результати третьої геодезичної кампанії на локальному геодинимічному полігоні ГАО НАН України. Кинематика и физика небесных тел. К.: 2008, 24, № 6, С. 452–462.
- Самойленко О. М., Березань І. О. Редукування виміряних довжин та зенітних відстаней до усереднених значень метеорологічних параметрів атмосфери та до реперних точок пунктів локальної геодезичної мережі. Інженерна геодезія. К.: “Будівельник”, 2008. Вип. 546 С. 190–200.

- Тревого И., Савчук С., Денисов А., Волчко П. Новый образцовый геодезический базис. Вісник геодезії і картографії. 2004, № 1, С. 12-16.
- Тревого І. С., Денисов О., Цюпак І., Герер В., Тимчук В. Еталонний геодезичний базис оригінальної конструкції. Сучасні досягнення геодезичної науки і виробництва. Львів: Ліга-Прес, 2010, Вип. 1(19), С. 43–49.
- Тревого І. С., Цюпак І. М. Особливості метрологічної атестації еталонних геодезичних базисів. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. праць. Львів, 2014, Вип. I (27), С. 29–33.
- Braun, J., Dvořáček, F., Štroner, M. Absolute Baseline for Testing of Electronic Distance Meters. *Geoinformatics FCE CTU*, 2014, 12, 28-33
- Сох, М. G. The evaluation of key comparison data: An introduction. *Metrologia*, 2002, 39(6), 587.
- ISO 17123-4:2012 Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments. Part 4: Electro-optical distance meter (EDM measurements to reflectors)
- JCGM 100:2008 Evaluation of Measurement Data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Joint Committee for Guides in Metrology. Режим доступу: https://www.bipm.org/utis/common/documents/-jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf
- JCGM 200:2012. International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM). Joint Committee for Guides in Metrology. Режим доступу: https://www.bipm.org/utis/common/documents/-jcgm/JCGM_200_2012_E.pdf
- JCGM 102:2011 Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” Extension to any number of output quantities. Joint Committee for Guides in Metrology. Режим доступу: https://www.bipm.org/utis/common/documents/-jcgm/JCGM_102_2011_E.pdf
- Jokela, J., Häkli, P., Ahola, J., Buga, A., & Putrimas, R. (2009, September). On traceability of long distances. In *Proceedings of XIX IMEKO World Congress, Fundamental and Applied Metrology* (pp. 6-11).
- Jokela, J., Häkli, P., Kugler, R., Skorpil, H., Matus, M., & Poutanen, M. (2010, April). Calibration of the BEV geodetic baseline. In *FIG Congress 2010* (pp. 2873-87).
- JRP SIB 60 Metrology for long distance surveying. Режим доступу: <http://www.ptb.de/emrp/sib60-home.html>.
- Lawson, R. Henson Solving Least Squares Problems / Trans. from English. Moscow: Science. Head Editor phys.-mat. lit., 1986. 232 p.
- Nielsen, L. Identification and handling of discrepant measurements in key comparisons. *Measurement Techniques*, 2003, 46(5), 513–522. Режим доступу: <https://doi.org/10.1023/A:1025373701977>
- Nielsen, L. Evaluation of measurement intercomparisons by the method of least squares. *Danish Institute of Fundamental Metrology, 2000, Technical Report DFM-99-R39*.
- Pollinger, F., Meyer, T., Beyer, J., Doloca, N. R., Schellin, W., Niemeier, W., ... & Meiners-Hagen, K. (2012). The upgraded PTB 600 m baseline: a high-accuracy reference for the calibration and the development of long-distance measurement devices. *Measurement Science and Technology*, 23(9), 094018

O. SAMOILENKO, O. ADAMENKO

Research and Production Institute SE “UKRMETRTESTSTANDART”, 12/314, Tsvetaeva Str., Kyiv, 02232, Ukraine

PROCESSING OF THE LENGTH MEASURING RESULTS DURING COMPARISONS OR CALIBRATIONS THE DISTANCE METERS AND TOTAL STATIONS ON A FIELD COMPARATOR

The method of adjustment the results of measurements of the length during calibration of a field comparator for verification (calibration) of distance meters and distance metric parts of total stations is developed. The method of processing the results of comparisons of distance meters at the field comparator using the least squares method (LSM) was also developed on its basis. The additive biases of length measurements by each distance meter are evaluated according to the LSM, as well as the biases that are entered to the results of length measurements by each reflector. Multiplicative degrees of equivalence of the distance meters are calculated too. During calibrations of field comparators, the biases and degrees of equivalence, obtained during the comparisons of distance meters, should be used as corrections. According to the LSM, the uncertainty is evaluated by type A of the value of the length of the field comparator lines, as well as the biases of measurements by distance meters.

Key words: measuring standard, comparison, calibration, distance meter, total station, field comparator, additive biases, multiplicative degree of equivalence, uncertainty.

Надійшла 20.01.2019 р.