УДК 004.852; 004.94

П. О. Кравець
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж

ІГРОВА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ З АВТОРИТАРНИМ ПРИЙНЯТТЯМ РІШЕНЬ

Побудовано стохастичну ігрову модель прийняття рішень в ієрархічних системах з авторитарним стилем управління. Розроблено адаптивний рекурентний метод для розв’язування стохастичної гри в умовах апріорної невизначеності на основі стохастичної апроксимації умови доповняльної нежорсткості, яка описує розв’язки гри за Нешем у змішаних стратегіях. Виконано комп’ютерне моделювання стохастичної гри прийняття рішень в авторитарній ієрархічній системі зі структурою бінарного дерева. Досліджено вплив параметрів на збіжність ігрового методу.

Ключові слова: ієрархічна система, авторитарне прийняття рішень, стохастична гра, умови невизначеності.

The stochastic game model of decision making in hierarchical systems with an authoritarian style of management was constructed. An adaptive recurrent method for solving a stochastic game under a priori uncertainty is developed on the basis of stochastic approximation of the complementary slackness condition, which describes the solutions of the game by Nash in mixed strategies. A computer simulation of a stochastic decision making game in an authoritarian hierarchical system with a binary tree structure is performed. The influence of parameters on the convergence of the game method is investigated.

Key words: hierarchical system, authoritarian decision-making, stochastic game, uncertainty conditions.

Вступ

Сучасні розподілені системи прийняття рішень – виробничі, економічні, політичні, соціальні, екологічні, освітні, військові, державного управління та інші найчастіше мають ієрархічну структуру. Ієрархія – це розміщення елементів системи у порядку від вищого до нижчого рівня або рангу. В ієрархічних системах функції прийняття рішень розподілені між елементами різного рівня. Елемент середнього рівня ієрархії керує елементами нижчого рівня, які перебувають у його прямому підпорядкуванні, і сам керується елементом вищого рівня [1–4].

Найпростіший варіант ієрархічної системи можна зобразити у вигляді дерева, вузли якого позначають активні елементи або інакше – інтелектуальні агенти прийняття рішень, а зв’язки між ними визначають їхню рангову підпорядкованість. Роль агентів прийняття рішень виконують суб’єкти, органи керування, підрозділи або підсистеми. Агент із найвищим рангом (корінь дерева) виробляє рішення та доводить їх до відома агентів середнього рівня, які, своєю чергою, виробляють рішення для агентів нижчого рівня. Агенти низового рівня, позначені листям дерева, не мають підпорядкованих агентів і виконують рішення безпосереднього вищого рівня.

Залежно від переважання одноосібного чи групового способу вироблення рішення, способів розподілу функцій у розв’язанні завдань, форм контролю за їх виконанням, оцінювання виконання рішень та розподілу відповідальності розрізняють авторитарні, ліберальні та демократичні системи прийняття рішень [5, 6].

Авторитарні системи засновані на беззастережному підпорядкуванні авторитету керівника або владі. Структура авторитарної системи є вертикально-ієрархічною. Рішення приймає керівник найвищого рівня. Можливість прийняття рішень на нижчих рівнях є обмеженою. Ухвалені на верхніх рівнях ієрархії рішення надходять на нижчі рівні як директиви, які не підлягають обговоренню та обов’язкові до виконання. Потік інформації спрямований згори донизу. Керівники та підрозділи нижчих рівнів ознайомлені тільки зі своїм функціональним завданням і не завжди мають уявлення про загальні цілі системи. Контроль та оцінювання якості роботи низових ланок системи здійснює вище керівництво.

Позитивними аспектами в організації авторитарної системи є висока виконавча дисципліна та висока мобільність. До негативних слід віднести низьку ініціативу низових ланок та можливе погіршення психологічного клімату в колективі.

Спосіб прийняття рішень у ліберальній системі є інверсним до авторитарної системи. Керівник найвищого рівня уникає прийняття самостійних рішень, перекладає прийняття рішень та відповідальність за них на керівників низових підрозділів. У таких системах переважає потік інформації знизу вгору. Часто такий стиль керівництва дезорієнтує роботу усієї системи. У ліберальній системі можуть виникати групи ініціативних працівників “за інтересами”. Граничним проявом ліберальної організації є анархічна система. Керованість таких систем досягається делегуванням повноважень самоорганізованих груп нижчого рівня своїм представникам на вищому рівні прийняття рішень.

Процес вироблення рішення у ліберальній системі може займати значний період часу. Така система може бути дієвою при виокремленні у ній груп свідомих працівників, здатних до самоорганізації та самоконтролю.

Демократична система ґрунтується на колегіальному прийнятті рішень керівниками усіх рівнів із можливим урахуванням думок і побажань підлеглих з передачею (за необхідності) їм частини повноважень та залученням вузьких спеціалістів для вироблення рішення. Усі учасники прийняття рішень повністю проінформовані про цілі і задачі системи. Контроль за виконанням рішень та оцінювання їх ефективності розподіляються між рівнями системи. Потоки інформації спрямовані в обох напрямках – згори донизу та знизу догори. Від керівництва до співробітників спрямовано потік сигналів керування. Керівники нижчої ланки виражають та захищають інтереси співробітників перед вищим керівництвом, що породжує зустрічний потік інформації від співробітників до керівництва.

Демократична організація системи забезпечує добрий психологічний клімат у колективі, стимулює підлеглих до прийняття самостійних рішень, але може призвести до низької дисципліни та невисокої мобільності у прийнятті рішень в екстремальних умовах.

Часто прийняття рішень агентами здійснюється в умовах неповноти інформації [7]. Так, проблема прийняття рішень на верхньому рівні менш структурована та формалізована, містить багато невизначеностей. Підсистемі вищого рівня можуть бути не повністю відомі цілі та обмеження підсистем нижчих рівнів.

Злагоджене функціонування таких систем у межах визначених цілей та обмежень забезпечується координацією дій усіх учасників прийняття рішень незалежно від джерел виникнення та напрямків потоків інформації. Метою ієрархічної системи є вироблення узгодженого колективного рішення. Прийняття скоординованих рішень в ієрархічних системах є актуальною науково-практичною проблемою, вирішення якої спрямоване на запобігання виникнення хаотичних режимів роботи системи, забезпечення стійкості до впливу зовнішніх факторів, підвищення надійності роботи, підвищення точності та оперативності рішень, зменшення витрат на організацію керування ієрархічною системою [8].

У процесі колективного прийняття рішення в ієрархічній системі виникають умови для виникнення узгоджених або конкурентних станів, які є предметом вивчення теорії ігор [9–12], а в умовах невизначеності – теорії стохастичних ігор [13–17]. Теоретико-ігрове моделювання [6] є основним методом досліджень ієрархічних систем. Воно дозволяє передбачити поведінку ігрових агентів та обрати способи управління, які переводять систему в оптимальні стани згідно із заданими критеріями функціонування. Глобальною метою ієрархічної системи є вироблення узгодженого колективного рішення, яке мінімізує середні витрати учасників прийняття рішень. Для моделювання ієрархічних систем прийняття рішень використовують ігри у нормальній формі або ієрархічні ігри.

Ігри у нормальній формі характеризуються одночасністю вибору дій усіма гравцями та незалежністю вибору дії одного гравця від вибору інших [9, 10]. Натомість в ієрархічних іграх виділяють центрального гравця, який робить перший хід, та гравців, які вибирають свої дії на основі відомої їм дії центру [11, 12].

Розв'язки гри у нормальній формі задовольняють умови колективної оптимальності або рівноваги, наприклад, за Парето або Нешем [9, 10]. Розв'язки ієрархічних ігор з правом першого ходу кореневого гравця описуються рівновагою за Штакельбергом [12].

В умовах неповної інформації про вибір варіантів рішень та їхні наслідки необхідно використати адаптивні ігрові методи, які в процесі самонавчання компенсують невизначеність параметрів їх стохастичною ідентифікацією.

Серед можливих варіантів організації ієрархічних систем прийняття рішень окремо виділимо авторитарні системи, які можуть бути ефективними, коли виникає потреба у швидкому реагуванні в екстремальних умовах, наприклад, у військовій сфері, для вирішення конфліктних та кризових ситуацій.

Об'єктом цього дослідження є процеси ігрового прийняття рішень в авторитарних системах, що функціонують в умовах невизначеності.

Предметом дослідження є ігрова модель прийняття рішення в ієрархічно організованих авторитарних системах.

Метою роботи є розв'язування стохастичної гри агентів для прийняття узгодженого рішення в ієрархічній авторитарній системі та визначення факторів збіжності ігрового методу в умовах невизначеності.

Наукова новизна роботи полягає у розробленні та застосуванні адаптивного методу навчання стохастичної гри для розв'язування задачі прийняття рішень в ієрархічних системах в умовах невизначеності.

Практична цінність роботи полягає у можливості застосування отриманих результатів для побудови ефективних систем прийняття рішень з ієрархічною структурою.

Постановка ігрової задачі

Розв'язування задачі прийняття рішень у деревоподібній ієрархічній системі виконаємо на основі моделі стохастичної гри у нормальній формі. Нехай D – дерево гравців ($|D| \geq 2$), які вибирають варіанти рішень з множини $U^i = \{u^i(1), u^i(2), ..., u^i(N_i)\}$ чистих стратегій $\forall i \in D$ у дискретні моменти часу $n = 1, 2, ...$. На вхід кожного гравця (крім кореневого) від керівника вищого рівня надходить вказівне рішення, на основі якого виробляється власне рішення, яке транслюється на нижчий рівень для виконання (крім найнижчого рівня).

Будемо вважати, що усі рішення вищого рівня є рекомендаційними і не обмежують свободу вибору гравців нижчого рівня. Після завершення вибору варіантів рішень $u_n^i = u^i \in U^i$ усіма гравцями кожен з них отримує комплексний штраф за недотримання керівних рішень. В авторитарних системах поточні штрафи гравців визначаються недотриманням керівного рішення їх безпосереднього начальника:

$$x_n^i(u_n^i, u_n^k) = |u_n^i - u_n^k| + m_n \quad \forall i \in D, \tag{1}$$

де $u_n^i \in R^1$ – числовий еквівалент варіанта рішення; k – гравець найвищого рівня (топ-менеджер); i – номер гравця; $m_n \sim Normal(0, d)$ – нормально-розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $d > 0$ або значення білого гаусівського шуму, який моделює вплив завад на канали зв'язку між ігровими агентами.

Штраф за будь-які дії гравця найвищого рівня не нараховується: $x_n^i(u_n^k, u_n^k) = 0$.

Середні програші гравців, обчислені після n кроків стохастичної гри, приймуть значення:

$$\Xi_n^i(\{u_n^{ik}\}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t^i \quad \forall i \in D. \tag{2}$$

Гравці прагнуть вибирати такі рішення, щоб з часом мінімізувати власні функції середніх програшів:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Xi_n^i \to \min_{\{u_n^i\}} \ \forall i \in D. \tag{3}$$

Отже, на основі спостереження поточних програшів $\{x_n^i\}$ гравці повинні навчитися вибирати чисті стратегії $\{u_n^i\}$ так, щоб з ходом часу $n=1,2,...$ забезпечити виконання системи критеріїв (3). В авторитарній системі колективне рішення буде сформованим, якщо у результаті самонавчання гравці усіх нижчих рівнів ієрархії приймуть до виконання керівне рішення топ-агента.

Метод розв'язування стохастичної гри

Формування послідовності варіантів рішень $\{u_n^i\}$ виконаємо на основі динамічних векторів змішаних стратегій p_n^i $\forall i \in D$, елементи $p_n^i(j)$, $j=1..N_i$ яких є умовними імовірностями вибору чистих стратегій при реалізації передісторії вибору стратегій $\{u_t^i \,|\, t=1,2,...,n-1\}$ та отриманих за це програшів $\{x_t^i \,|\, t=1,2,...,n-1\}$. Змішані стратегії приймають значення на одиничних N_i-вимірних симплексах S^{N_i}.

Гра розпочинається з ненавчених векторів змішаних стратегій зі значеннями елементів $p_0^i(j)=1/N_i$, де $j=1..N_i$. У наступні моменти часу вектори змішаних стратегій змінюються так, щоб зростали імовірності вибору тих варіантів рішень, які забезпечують найменші середні програші:

$$p_{n+1}^i = p_{e_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i - g_n x_n^i\left[e(u_n^i) - p_n^i\right]\right\}, \tag{4}$$

де $p_{e_{n+1}}^{N_i}$ – проектор на одиничний e-симплекс $S_{e_{n+1}}^{N_i} \subseteq S^{N_i}$ [16]; $p_n^i \in S_{e_n}^{N_i}$ – змішані стратегії i-го гравця; $g_n > 0$ – параметр, який регулює величину кроку методу; $e_n > 0$ – параметр, який регулює швидкість розширення e-симплексу; $x_n^i \in R^1$ – поточний програш гравця; $e(u_n^i)$ – одиничний вектор-індикатор вибору чистої стратегії $u_n^i \in U^i$.

Метод (4) отримано застосуванням стохастичної апроксимації [16 – 18] умови доповняльної не жорсткості [10], справедливої для розв'язків гри за Нешем у змішаних стратегіях.

Збіжність змішаних стратегій (4) до оптимальних значень з імовірністю 1 та у середньоквадратичному визначається співвідношеннями параметрів g_n та e_n, які повинні задовольняти фундаментальні умови стохастичної апроксимації [18].

Параметри g_n та e_n є монотонно спадними додатними величинами і можуть бути обчислені так:

$$g_n = g n^{-a}, \; e_n = e n^{-b}, \tag{5}$$

де $g>0$; $a>0$, $e>0$; $b>0$.

Значення чистої стратегії u_n^i визначається випадково на основі поточного розподілу імовірностей $p_n^i(u_n^i)$:

$$u_n^i = \left\{u^i(j) \,|\, j = \arg\min_j \sum_{k=1}^{j} p_n^i(k) > w \;\; (j=1..N_i)\right\}, \tag{6}$$

де $w \in [0,1]$ – випадкова величина з рівномірним розподілом.

Отже, у момент часу n гравці $\forall i \in D$ на основі власних змішаних стратегій p_n^i вибирають чисті стратегії u_n^i (6), за що, до моменту часу $n+1$, отримують поточні програші x_n^i (1), після чого обчислюють змішані стратегії p_{n+1}^i згідно з (4). Завдяки динамічній перебудові змішаних стратегій на основі опрацювання поточних програшів, метод (4) – (6) забезпечує адаптивний вибір чистих стратегій у часі.

Ефективність прийнятих рішень визначимо за такими показниками:

1) функція усереднених у часі втрат системи:

$$\Xi_n = (|D|)^{-1}\sum_{i\in D}\Xi_n^i; \tag{7}$$

2) коефіцієнт координації рішень гравців:

$$\mathrm{K}_n = (n\,|\,D\,|)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sum_{i \in D} c\left(\sum_{s \in D_i} |\, u_t^i - u_t^s \,| = 0 \right), \tag{8}$$

де $c\,(\,) \in \{0,1\}$ – індикаторна функція події;

3) середня похибка відхилення змішаних стратегій гравців від змішаної стратегії гравця-керівника найвищого рівня:

$$\Delta_n = (n\,|\,D\,|)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sum_{i \in D} \left\| p_{i,t} - p_{k,t} \right\|, \tag{9}$$

де $\|\cdot\|$ – евклідова норма вектора.

Результати комп'ютерного моделювання

Виконаємо розв'язування стохастичної гри для координації рішень в авторитарній системі зі структурою бінарного дерева, зображеною на рис. 1. Нехай m – кількість рівнів ієрархії системи прийняття рішень ($m = 0,1,2,...$). Тоді зображене дерево відповідає грі $L = 2^{m+1} - 1$ гравців. Стрілками позначено залежність функції втрат гравців від стратегій. На рис. 1 видно, що втрати гравців залежать від власних стратегій та стратегій гравця вищого рівня (керівника).

Поведінка гравця найвищого рівня є вільною від впливу стратегій інших гравців. Можливі два способи формування чистих стратегій цього гравця. Перший спосіб полягає в тому, що топ-гравець вибирає власні стратегії $u_n^k \in U^k$ за деяким дискретним розподілом p^k. Тобто, стратегія кореневого гравця змінюється у часі: $u_n^k = var$, $n = 1,2,...$. Що ближче розподіл p^k до рівноімовірного вибору чистих стратегій, то більше кореневий гравець дезорієнтує гравців нижчих рівнів. У результаті вихід системи на узгоджене рішення є проблематичним, або неможливим. Тому для дослідження виберемо другий, працездатний спосіб, коли стратегії кореневого гравця є постійними у часі: $u_n^k = u^k = const$.

Характеристики збіжності ієрархічної стохастичної гри прийняття рішень зображено на рис. 2 у логарифмічному масштабі. Результати отримано для значень параметрів: $L = 7$ (для $m = 2$ рівнів прийняття рішень), $N_i = N = 4$, $g = 1$, $e = 0.999/N$, $a = 0.1$, $b = 1$.

Зменшення функцій Ξ_n, Δ_n та зростання функції K_n у часі свідчать про збіжність ігрового методу до узгодженого колективного рішення. Порядок швидкості збіжності можна оцінити тангенсом кута, утвореного графіком лінійної апроксимації норми Δ_n відхилення змішаних стратегій гравців та віссю часу. Як видно на рис. 2, при відповідному підборі параметрів досягається близький до 1 порядок степеневої швидкості збіжності розглянутої стохастичної гри.

Значний вплив на координацію рішень гравців має розмірність стохастичної гри, яка визначається кількістю гравців та кількістю стратегій.

На рис. 3 зображено залежність середньої кількості кроків гри $\overline{n}$, необхідних для досягнення коефіцієнта узгоджених рішень $K_n = 0.9$, від кількості рівнів бінарного дерева прийняття рішень m. Результати усереднено за 100 експериментами. Зростання дерева і відповідне збільшення кількості гравців призводить до збільшення кількості кроків, необхідних для координації рішень усіх гравців.

Залежність середньої кількості кроків навчання $\overline{n}$, необхідних для досягнення коефіцієнта узгоджених рішень $K_n = 0.9$ від кількості чистих стратегій N для симетричної ієрархічної гри з m рівнями зображено на рис. 4. Із зростанням кількості варіантів рішень N зростає кількість кроків, необхідних для координації стратегій гравців.

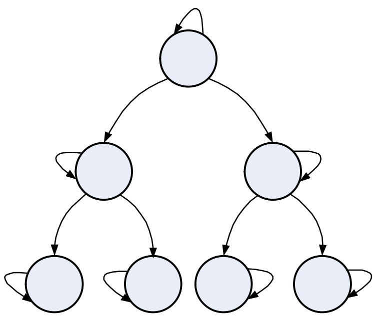

Рис. 1. Структура авторитарної системи прийняття рішень

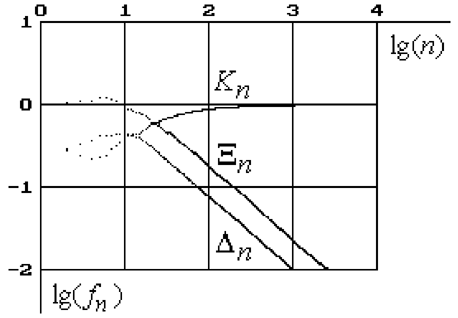

Рис. 2. Характеристики збіжності гри з авторитарним прийняттям рішень

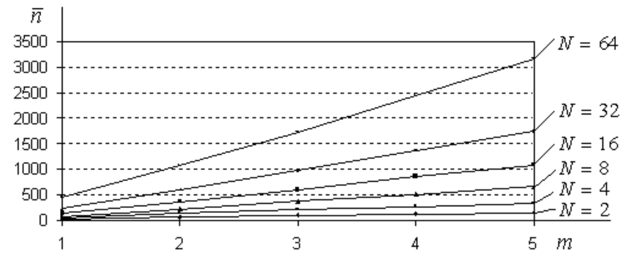

Рис. 3. Залежність часу навчання гри від кількості гравців

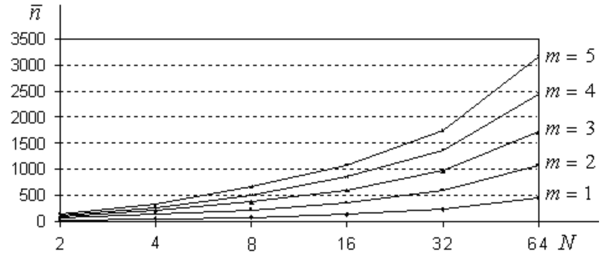

Рис. 4. Залежність часу навчання гри від кількості стратегій

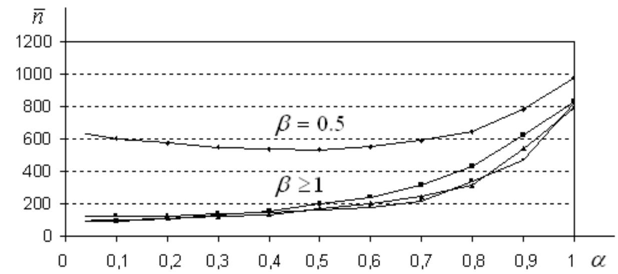

Рис. 5. Залежність часу навчання гри від параметрів ігрового методу

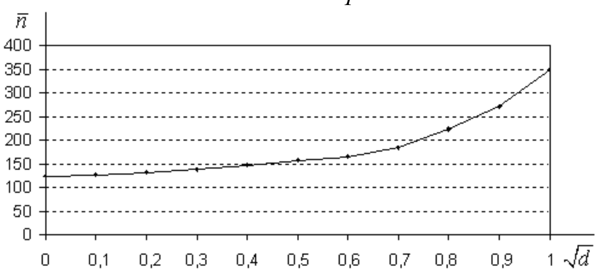

Рис. 6. Вплив дисперсії на збіжність стохастичної гри

Отже, при зростанні розмірності стохастичної гри зростає середня кількість кроків, необхідних для досягнення належного рівня координації стратегій гравців. Аналіз графіків, зображених на рис. 3 та рис. 4, показує, що на час навчання ієрархічної стохастичної гри більший вплив справляє кількість чистих стратегій, ніж кількість гравців. Наближено, вплив кількості гравців на час прийняття колективного рішення здійснюється за лінійним, а вплив кількості стратегій – за показниковим законом. Якщо інтерпретувати кількість чистих стратегій (варіантів можливих дій) як кількість прав і свобод агентів, то час виходу авторитарної ієрархічної системи на узгоджене рішення буде меншим при обмеженні цих прав і свобод. У грі з двома стратегіями, наприклад, при голосуванні „так” або „ні”, можна значно збільшити кількість гравців, які забезпечать вироблення узгодженого колективного рішення за час, зіставний з часом завершення гри меншої кількості гравців, що мають більшу кількість стратегій.

Крім розмірності гри, на швидкість збіжності ігрового методу значний вплив справляють параметри ігрового методу a та b . Співвідношення цих параметрів повинні задовольняти основні умови стохастичної апроксимації [18]. Залежність часу навчання гри $\bar{n}$ від параметрів a та b зображено на рис. 5. Для заданих параметрів ігрового методу мінімальна кількість кроків навчання ієрархічної гри досягається для $a \in (0;\ 0.1]$ та $b \geq 1$.

Вплив випадкових завад d на середній час $\bar{n}$ ігрового прийняття рішень зображено на рис. 6. Дія завад призводить до спотворення потоків інформації між вищим та нижчим рівнями ієрархічної системи прийняття рішень. Відповідно, із зростанням дисперсії завади час прийняття скоординованого колективного рішення в авторитарній ієрархічній системі зростає за показниковим законом.

Висновки

У цій роботі розв'язано актуальну науково-прикладну задачу координації рішень в авторитарних ієрархічних системах та отримано такі результати:

1. Виконано формулювання ігрової задачі прийняття рішень в авторитарних ієрархічних системах в умовах невизначеності та запропоновано адаптивний рекурентний метод для її розв'язування.
2. Виконано комп'ютерне моделювання стохастичної гри авторитарної ієрархічної системи прийняття рішень та обчислено показники ефективності самоорганізації гри. Спадання функції середніх програшів, зростання коефіцієнта узгоджених рішень та зменшення норми відхилення змішаних стратегій ілюструють збіжність ігрового методу згідно із сформульованою метою.
3. Швидкість збіжності стохастичної гри залежить від розмірності ігрової задачі та параметрів рекурентного методу для її розв'язування. Оптимізація параметрів ігрового методу при обмежувальній дії фундаментальних умов стохастичної апроксимації забезпечує близький до 1 степеневий порядок швидкості збіжності.
4. Вірогідність результатів забезпечується усередненням показників збіжності гри за 100 експериментами для різних послідовностей випадкових величин.
5. Результати проведених досліджень можуть бути використані для побудови ієрархічних систем прийняття рішень з авторитарним стилем керування, ефективним у надзвичайних та кризових ситуаціях.

1. Дубовой В. М. Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами: монографія / В. М. Дубовой, О. О. Ковалюк. – Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2008. – 185 с. 2. Verma D. Decision Making Style: Social and Creative Dimensions / D. Verma. – Global India Publications Pvt Ltd, 2009. – 309 pp. 3. Воронин А. А. Оптимальные иерархические структуры / А. А. Воронин, С. П. Мишин. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с. 4. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с. 5. Пушкар Р. М. Менеджмент: теорія і практика: підручник / Р. М. Пушкар, Н. П. Тарнавська. Тернопіль: Карт-бланш, 2003. – 490 с. 6. Теорія і практика прийняття управлінських рішень / А. С. Крупник, К. О. Линьов, Є. М. Нужний, О. М. Рудик. – К.: Видавничий дім "Простір", 2007. – 119 с. 7. Демидова Л. Принятие решений в условиях неопределенности / Л. Демидова, В. Кираковский, А. Пылькин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 284 с. 8. Катренко А. В. Механізми координації у складних ієрархічних системах / А. В. Катренко, І. В. Савка / Інформаційні системи та мережі: Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 631. – С. 156–166. 9. Peters H. Game Theory: A Multi-Leveled Approch / H. Peters. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. – 493 pp. 10. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. – М.: Мир, 1985. – 200 с. 11. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными інтересами / Ю. Б. Гермейер. – М.: Наука, 1976. – 328 с. 12. Губко М. В. Теория игр в управлении организационными системами / М. В. Губко, Д. А. Новиков. – М.: Синтег, 2002. – 148 с. 13. Stochastic Games and Application / Neyman A., Sorin S. (editors), NATO Science Series, Springer Science & Business Media New York, 2003. – 473 pp. 14. Доманский В. К. Стохастические игры / Доманский В. К. // Математические вопросы кибернетики. – 1988. – № 1. – С. 26–49. 15. Fudenberg D. The Theory of Learning in Games / D. Fudenberg, D. K. Levine. – Cambridge, MA: MIT Press, 1998. – 292 pp. 16. Назин А. В. Адаптивный выбор вариантов / А. В. Назин, А. С. Позняк. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 17. Кравець П. О. Ігрова модель прийняття рішень в ієрархічних системах / П. О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2017. – № 872. – С. 111–120. 18. Граничин О. Н. Введение в методы стохастической аппроксимации и оценивания: учеб. пособ. / О. Н. Граничин. – СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2003. – 131 с.