УДК 528.33:551.24

М. М. ФИС[1], А. М. БРИДУН[2], М. І. ЮРКІВ[3]

[1,2,3] Кафедра картографії та геопросторового моделювання, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, ел. пошта [1]Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, [2]Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, [3]Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ НЕОДНОРІДНОСТІ РОЗПОДІЛУ МАС НАДР ПЛАНЕТИ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ФОРМИ НА ЇЇ СТОКСОВІ ПОСТІЙНІ

https://doi.org/10.23939/jgd2019.01.017

Мета. Параметри гравітаційного поля Землі ($C_{n,k}$, $S_{n,k}$) визначаються її фігурою та внутрішнім наповненням(розподілом мас), які по різному впливають на їх формування. Подаючи функцію розподілу мас надр планети у вигляді біортогональних рядів, встановимо зображення стоксових постійних $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ через коефіцієнти b_{mnk} розкладу потенціалу планети та лінійні комбінації геометричних характеристик еліпсоїда. На основі отриманих формул вивчити можливий вплив неоднорідності функції розподілу мас надр Землі та подання її фігури еліпсоїдом обертання на значення величин стоксових постійних та дослідити вклад радіального розподілу густини мас Землі у значення цих постійних. **Методика.** Подання функції густини надр планети у вигляді суми многочленів Лежандра трьох змінних і апроксимація її поверхні еліпсоїдом, а також, представлення внутрішніх кульових функцій у прямокутній системі координат, роблять можливим інтегрування виразів для стоксових постійних $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ та отримання співвідношення між цими величинами різних порядків і лінійною комбінацією коефіцієнтів розкладу b_{pqs} потенціалу планети й геометричних параметрів еліпсоїда α, β, γ. Числові дані, отримані за виведеними співвідношеннями, і побудовані графіки дають можливість провести аналіз впливу неоднорідності розподілу мас надр планети еліпсоїдальної форми на значення стоксових постійних та визначити інтервали максимального впливу. **Результати.** Отримано загальні співвідношення між коефіцієнтами розкладу b_{mnk} функції розподілу та інтегралами від кульових функцій по еліпсоїдальній поверхні, які визначають стоксові постійні заданого порядку. При цьому стоксові постійні n-го порядку виражаються через величини $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ нижчих порядків. Проведені обчислення дають загальну картину формування значень стоксових постійних, з якої чітко випливає висновок про невеликий вплив еліпсоїдальної форми планети на їх величину та про тривимірність гравітаційного поля Землі як результату неоднорідного за всіма координатами розподілу мас її надр. Підтверджена залежність значень величини $C_{2m,0}$ від геометричного стиснення двохосьового земного еліпсоїда постійної густини. **Наукова новизна.** Визначені формули зв'язку між стоксовими постійними різних порядків та лінійними комбінаціями параметрів еліпсоїда α, β, γ. Проведені обчислення та перевірка отриманих співвідношень для різних наборів коефіцієнтів b_{pqs} розкладу потенціалу дають можливість зробити висновок про переважний вклад тривимірності гравітаційного поля Землі в значення стоксових постійних, за вийнятком $C_{2,0}$, а побудовані графіки визначають інтервали її максимального вкладу в розподіл мас за глибиною. **Практична значущість.** Отримані залежності дозволяють перевіряти степінь наближення побудованої моделі густини еліпсоїдальної планети шляхом порівняння обчислених за нею та взятих зі спостережень стоксових постійних . Крім цього, з'являється можливість оптимального узгодження геометричних характеристик еліпсоїда планети з її гравітаційним полем.

Ключові слова: потенціал планети, модель розподілу мас, стоксові постійні, еліпсоїд.

Вступ

Характеристики зовнішнього гравітаційного поля планети поряд з даними сейсмології є важливими елементами у вивченні внутрішньої будови, а, особливо, у дослідженні функцій розподілу мас надр Землі. Оскільки, відмінність від нуля стоксових постійних $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ є результатом тривимірності планети, то встановлення області можливого формування значень цих величин є важливим аспектом досліджень. Необхідно відмітити, що в такій постановці задача розглядається не вперше. Так. в статтях [Тараканов, 1979], [Винник и др., 1978] пропонується розміщувати аномальні маси на глибині 600-800 км при інтерпретації стоксових постійних 2-6-го порядку, а для постійних 2-4-го порядку змістити центр залягання до 1000 км. Схожі дослідження запропоновані в праці [Остач, Агеева, 1982], де таке вивчення пов'язується з розміщенням точкових мас для найкращого наближення потенціалу. Теоретичні аспекти даної проблеми детально розглянуті в монографії [Антонов, Тимошкова, Холшевников, 1988]. Продовження цих досліджень виконано в роботі [Kholshevnikov, Shaidulin, 2015], а частковий випадок розглянутий в статті [Холшевников, Миланов, Шайдулин, 2017]. Подальша деталізація підінтегральної функції, а саме подання сумою многочленів Лежандра трьох змінних, дозволяє представити формули для стоксових постійних лінійною комбінацією коефіцієнтів b_{pqs} і геометричних параметрів еліпсоїда та дослідити їх особливості.

Мета

За відомим представленням функції розподілу мас надр планети у вигляді біортогональних рядів встановити зображення стоксових постійних $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ через коефіцієнти b_{mnk} розкладу потенціалу планети. На основі отриманих формул вивчити можливий вплив неоднорідності функції розподілу мас надр Землі та подання її фігури еліпсоїдом обертання на значення величин стоксових постійних та дослідити вклад радіального розподілу густини мас еліпсоїдальної Землі у значення цих постійних.

Методика

Стоксові постійні планети σ, фігура якої обмежена поверхнею Ω, повністю визначаються інтегральною формулою:

$$C_{n,k}+iS_{n,k}=\frac{1}{Ma_e^n}\int_\sigma \delta\left(U_{nk}+iV_{nk}\right)d\tau,\quad n,k=0,1,2,... \tag{1}$$

де M, a_e − маса та екваторіальний радіус планети, відповідно; δ − функція розподілу мас надр планети; U_{nk}, V_{nk} – внутрішні кульові функції і

$$U_{nk}+iV_{nk}=\sum_{p+q+s=n}\left(\alpha_{pqs}^n+i\beta_{pqs}^n\right)x_1^p x_2^q x_3^s\ . \tag{2}$$

Аналіз параметрів гравітаційного поля планети (1) вказує на неоднорідність розподілу мас її надр та відхилення фігури від сферичної форми. Якщо поверхня тіла (що важливо для геодезії) є однорідним тривісним еліпсоїдом, то тільки стоксові постійні $C_{2n,2k}\neq 0$, а якщо двовісним – лише $C_{2n,0}\neq 0$. Цей факт є однією з умов гідростатичного стану планети.

Надалі, фігуру Землі приймаємо за еліпсоїд $\tau:\left\{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\le 1\right\}$ з півосями a_1,a_2,a_3. Кусково-неперервну функцію розподілу мас $\delta(x_1,x_2,x_3)$ доповнюємо так:

$$\delta^*(P)=\begin{cases}\delta(P), & P\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\sigma,\\ 0, & P\in\tau/\sigma.\end{cases} \tag{3}$$

За такої інтерпретації всі інтегральні характеристики пов'язані з розподілом мас надр планети залишаються незмінними, тобто виконується тотожність

$$\int_\sigma \delta\ (P)f(P)d\sigma=\int_\tau \delta^*(P)f(P)d\tau.$$

Врахувавши сказане вище, розглянемо наступну задачу: дослідити вплив тривимірної структури розподілу мас надр планети та наближення її фігури еліпсоїдом на значення стоксових постійних (1).

Відповідно до (3), кускова неперервність досліджуваної функції дозволяє подати її у вигляді розкладу в ряд [Мещеряков, 1991]

$$\delta=\sum_{N=m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk}W_{mnk}+\delta^0(\rho)\,, \tag{4}$$

де $\delta^0(\rho)$ – одна з загальноприйнятих радіальних (сферичних) моделей густини, W_{mnk} – узагальнені многочлени Лежандра трьох змінних [Бейтмен, 1953], [Мещеряков, 1991], b_{mnk} – коефіцієнти розкладу, $m+n+k=N$ і

$$W_{nmk}=\frac{1}{a_1^m a_2^n a_3^k 2^N m!n!k!}\frac{\partial^N}{\partial x_1^m\partial x_2^n\partial x_3^k}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1\right)^N \tag{5}$$

$$b_{mnk}=\frac{\int_\tau W_{mnk}\delta d\tau}{\int_\tau W_{mnk}\omega_{mnk}d\tau}\,. \tag{6}$$

Для подальших досліджень зручно використати запис внутрішніх кульових функцій в прямокутній системі координат [Фис, Зазуляк, Заяць, 2004], поданий за допомогою комплексних змінних

$$U_{nk}+iV_{nk}=\frac{RR(n-k)!}{Ma_e^n 2^k}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\frac{x_3^{n-k-2m}(-1)^m(x_1^2+x_2^2)^m}{\left(n-k-2m\right)!(k+m)!m!}(x_1+ix_2)^k=$$

$$=\sum_{p+q+s=n}(\alpha_{pqs}^n+i\beta_{pqs}^n)x_1^p x_2^q x_3^s\ . \tag{7}$$

Підставивши (4), (5) та (7) в (1), отримаємо

$$C_{n,k} + iS_{n,k} = C_{n,k}^{pr} + iS_{n,k}^{pr} + \sum_{t=0}^{n}\left(C_{n,k}^{t} + iS_{n,k}^{t}\right), \qquad (8)$$

де $C_{n,k}, S_{n,k}$ - задані стоксові постійні; $C_{n,k}^{pr}, S_{n,k}^{pr}, C_{n,k}^{t}, S_{n,k}^{t}$ - стоксові постійні, обчислені за допомогою моделі PREM та за коефіцієнтами b_{mnk} *t*-го порядку

і

$$C_{n,k}^{t} + iS_{n,k}^{t} = \frac{RR(n-k)!}{2^k M a_e^n} \sum_{p+q=s=t} \int_{\tau} \frac{b_{pqs}}{2^t\, p!q!s!} \frac{\partial^t \left(\rho^2 - 1\right)^t}{a_1^m a_2^n a_3^k \partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^s} \left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^m x_3^{n-k-2m} (x_1^2 + x_2^2)^m}{\left(n-k-2m\right)! m! (k+m)!} (x_1 + ix_2)^k \right) d\tau, \qquad (9)$$

$$C_{n,k}^{pr} + iS_{n,k}^{pr} = \frac{RR(n-k)!}{2^k M a_e^n} \int_{\tau} \delta^0(\rho) \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \int_{\tau} \frac{(-1)^m x_3^{n-k-2m} (x_1^2 + x_2^2)^m}{\left(n-k-2m\right)! m! (k+m)!} (x_1 + ix_2)^k \, d\tau. \qquad (10)$$

Перехід до узагальненої сферичної системи координат за формулами

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \rho \sin\vartheta \cos\lambda, \\ x_2 = a_2 \rho \sin\vartheta \sin\lambda, \\ x_3 = a_3 \rho \cos\vartheta, \end{cases} \qquad (11)$$

та відповідне інтегрування дають наступне співвідношення, де $\alpha = \frac{a_1}{a_e}, \beta = \frac{a_2}{a_e}, \gamma = \frac{a_3}{a_e}$:

$$C_{n,k}^{pr} + iS_{n,k}^{pr} = \frac{3RR(n-k)!k!\delta_c}{2^k (n+1)!!} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^{n+2} d\rho \frac{1}{(n+1)!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n-k-2m-1)!!k!}{2^{2m} (n-k-2m)!(k+m)!} \sum_{l=0}^{n-k-2m} \alpha^{2m+k-l} \beta^l \sum_{i+j=l} \frac{(-1)^{\frac{j}{2}} (2m+k-l-1)!!(l-1)!!}{(m-i)!i!(k-j)!j!} i^{j-2k}, \qquad (12)$$

Зокрема, для постійної густини δ_0 маємо:

$$C_{n,k}^{pr} + iS_{n,k}^{pr} = \frac{3RR(n-k)!k!\delta_0}{2^k (n+3)!!\delta_c} \sum_{\text{ь}=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^m \gamma^{n-k-2m}}{2^{2m} (n-k-2m)!!(k+m)!} \sum_{l=0}^{2m+k} \left(\sum_{i+j=l} \frac{(-1)^{\frac{j}{2}}}{i!(m-i)!(k-j)!j!} i^{j-2\left[\frac{j}{2}\right]} \right) \frac{\alpha^{2m+k-l} \beta^l (2m+k-l-1)^k}{(l-1)!!}, \qquad (13)$$

а для еліпсоїда обертання ($\alpha_1 = a_2$), відповідно

$$C_{n,0}^{p} = \frac{3\delta_0}{\delta_C} \frac{n!}{(n+3)!!} \sum_{m=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^m \gamma^{n-2m} (2m)!!}{(n-2m)!!(m)!2^{2m}} \alpha^{2m} = \frac{3\delta_0}{\delta_C} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!(n-1)!!2^{\frac{n}{2}}}{(n+3)!!} \sum_{m=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^m \gamma^{n-2m} \left(\alpha^2\right)^m 2^m}{\left(\frac{n}{2} - m\right)!(m)!2^{3m} 2^{\frac{n}{2}-m}}, \qquad (14)$$

або

$$C_{n,0}^{p} = \frac{3\delta_0}{\delta_C} \frac{\left(\gamma^2 - 1\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(n+1\right)\left(n+3\right)}, \qquad (15)$$

де δ_C – середня густина.

Цей вираз є відомим співвідношенням між стоксовими постійними та геометричним стисненням для однорідної двохосьової еліпсоїдальної планети [Cunningham, 1970], а рівність (13) визначає вклад радіального розподілу мас та є однією з умов гідростатичного стану планети. Значення стоксових постійних, крім величин $C_{2,0}$, не корелюють з виразом (15), що означає відхилення стану Землі від гідростатично врівноваженого стану.

Продовжимо дослідження вкладу неоднорідності функції розподілу мас та апроксимації фігури планети еліпсоїдом. Насамперед, зауважимо, що тривимірність визначається наявністю елементів ряду (4) у виразі (9), а індекси t та n впливають на формування стоксових постійних. Насамперед, всі значення в (9) перетворюються в нулі якщо $t > n$ (похідна *t*-го порядку від многочлена меншого степеня). Тому сумі (8) вклад розкладу функції δ в ряд (4) обмежується врахуванням коефіцієнтів b_{pqs} до n-го порядку. Для випадку $t = n$ доданок (9) є наступним:

$$C_{nk}^{n} + iS_{nk}^{n} = 3V_e \sum_{p+q+s=n} \frac{b_{pqs}\left(\alpha_{pqs}^{n} + i\beta_{pqs}^{n}\right)_1}{2^n} \int_{\tau} \left(\rho^2 - 1\right)^n \rho^2 d\rho = \frac{3}{\delta_C} \frac{n!}{(2n+3)!!} \sum_{p+q+s=n} \left(\alpha_{pqs}^{n} + i\beta_{pqs}^{n}\right) b_{pqs} \qquad (16)$$

або ж

$$C_{nk}^{n} + iS_{nk}^{n} =$$

$$\sum_{p+q+s=n} \frac{\left(\mu_{nk}^{n} + i\nu_{nk}^{n}\right)}{\delta_C} \int_0^1 \rho^{n-t+2} \left(\left(\rho^2 - 1\right)^t\right) d\rho \quad (17)$$

де

$$\mu_{nk}^{n} + i\nu_{nk}^{n} = \frac{3}{\delta_C} \frac{n!}{(2n+3)!!} \sum_{p+q+s=n} \left(\alpha_{pqs}^{k} + i\beta_{pqs}^{k}\right) b_{pqs} .$$

Отже, коефіцієнти при величинах b_{pqs} у стоксових постійних n-го порядку є такими ж, як і в комбінаціях змінних x_1, x_2, x_3 у відповідних внутрішніх кульових функціях U_{nk}, V_{nk}, що в подальшому дозволяє визначати їх лінійні комбінації через задані стоксові постійні.

Проаналізуємо структуру доданків виразу (9) коли $t < n$. Для цього подаємо (9) так:

$$C_{n,k}^{t} + iS_{n,k}^{t} =$$

$$\frac{RR(n-k)!}{2^k M a_e^n} \sum_{t=p+q+s} \frac{b_{pqs}}{2^t p!q!s!} \left(\int_\tau \frac{\partial^t}{\partial x_1^p \partial x_1^q \partial x_1^s} \left(\rho^2 - 1\right)^t \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^m x_3^{n-k-2m} m! k!}{2^{2m} m!(n-k-2m)!(m+k)!} \sum_{l=0}^{2m+k} \sum_{2r+j=l} \frac{(-1)^{\frac{j}{2}} (i)^{j-2\left[\frac{j}{2}\right]}}{(m-r)! r! (k-j)! j!} x_1^{2m+k-l} x_2^l d\tau \right) =$$

$$\frac{k! \int_0^1 (\rho^2 - 1)^t \rho^{n-t+2} d\rho}{(n-t+1)!!} \sum_{p+q+s=t} \frac{2^{-t} b_{pqs}}{p!q!s!} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^m \gamma^{n-k-s-2m} (2m+k)!}{2^{2m} (m+k)!(n-k-2m-s)!!} \sum_{l=0}^{2m+k} \sum_{2r+j=l} \frac{(-1)^{\frac{j}{2}} (i)^{j-2\left[\frac{j}{2}\right]} l!(2m+k-l)! \alpha^{2m+k-l} \beta^l}{(m-r)! r! (k-j)! j! (2m+k-l-p)!!(l-q)!!}. \quad (18)$$

Можна вважати, що рівність (18) є сукупністю виразів (9) відповідних порядків та величин α, β, γ, що є поверхневими інтегралами по еліпсоїду від внутрішніх кульових функцій. Перевірка цієї гіпотези виконана на конкретних прикладах в роботі [Фис, 1982]. З урахуванням цього, вираз (18) можна записати так:

$$C_{n,k}^{t} + iS_{n,k}^{t} = \frac{t!}{\left(t+n+3\right)!! \delta_C} \sum_{l,s} \left(C_{t,l}^{t} + iS_{t,l}^{t}\right) \int_\tau u_{n-t,s} d\tau, \quad t \le n \quad (19)$$

і, враховуючи (8) та (16), одержимо

$$\sum_{p+q+s=n} \left(\alpha_{pqs}^{n} + i\beta_{pqs}^{n}\right) b_{pqs} =$$

$$\frac{\delta_C \left(2n+3\right)!!}{2^n n! 3} \left(C_{n,k} + iS_{n,k} - \frac{1}{\delta_C} \sum_{t=0}^{n-1} \left(C_{n,k}^{t} + iS_{n,k}^{t}\right) \right). \quad (20)$$

Права частина (20) виражається через задані стоксові постійні n-го порядку. Значення суми обчислюється з використанням комбінацій коефіцієнтів b_{pqs}, що обчислені з використанням стоксових постійних нижчих порядків. Тому, в кінцевому результаті, права частина (20) є сумою стоксових постійних до n-го порядку включно, а тому і права частина (8).

Рівність (20) можна подати ще так

$$C_{n,k} + iS_{n,k} =$$

$$\frac{1}{\delta_C} \sum_{t=0}^{n} \int_0^1 \left[\sum_{l,s} \left(\mu_{tl}^{t} + i\nu_{tl}^{t}\right) \int_\Omega u_{n-t,s} d\Omega \right] \left(\rho^2 - 1\right)^t \rho^{n-t+2} d\rho . \quad (21)$$

Вираз (19) є лінійною комбінацією коефіцієнтів b_{pqs} та параметрів α, β, γ. Це пояснюється тим, що похідні від сферичних функцій є сумою знову ж таки сферичних функцій нижчих порядків. Встановити загальний вигляд такої залежності надзвичайно складно, оскільки це вимагає трудомістких і складних перетворень, але це не є необхідним для розв'язання нашого завдання, позаяк в силу неоднозначності подання потенціалу достатньо встановити лише деякі з коефіцієнтів, що забезпечують виконання рівностей (лінійних комбінацій в (16)).

Насамперед у всіх співвідношеннях (19), крім випадку k=n є присутній доданок виду $C_{n-2,k}^{n-2} \int_\Omega u_{2,0} d\Omega$ (після перетворень $\left(\gamma^2 - 1\right) C_{n-2,k}^{n-2}$), що означає невідповідність спадання значень стоксових постійних цих порядків степеневому закону. Значення $C_{n,k}, S_{n,k}$ отримуються в основному за рахунок неоднорідності розподілу мас, що доволі очікувано, адже для кульової планети в (19) сума відсутня, оскільки всі $\int_\tau u_{nk} d\tau = 0$ або ж $\int_\Omega u_{nk} d\Omega = 0$ крім випадку $n = k = 0$.

Таким чином, короткий алгоритм реалізації приведеної методики є наступним:

1. Визначаємо за стоксовими постійними коефіцієнти $b_{000}, b_{100}, b_{010}, b_{001}$ нульового та першого порядку.
2. Обчислюємо за стоксовими постійними другого порядку і формулами (16) один з варіантів коефіцієнтів $b_{pqs} (p+q+s=2)$.
3. За відомими вже коефіцієнтами другого порядку b_{pqs} обчислюємо відповідно до (20) коефіцієнти третього порядку.

4. Ітераційний процес продовжуємо до встановленого порядку N.

5. На кожному кроці за вже обчисленими величинами b_{pqs} повертаємось до визначення коефіцієнтів многочленів μ^t_{nk}, ν^t_{nk} за якими в подальшому будуємо графіки підінтегральних функцій (21), а також вираховуємо послідовності $\sum_{t=0}^{\lambda+4} C^t_{n,k}$, $\sum_{t=0}^{\lambda+2} S^t_{n,k}$, що визначають стоксові постійні $C_{n,k}, S_{n,k}$ за формулою (20).

Результати

За поданим алгоритмом проведемо обчислення, використовуючи одну з моделей гравітаційного поля Землі (EGM2008) та наведемо в Таблиці 1 значення $C^\lambda_{n,k}, S^\lambda_{n,k}$ отримані за формулою (20), де $\lambda = \begin{cases} 0, & (n-k)-\textit{парне}, \\ 1, & (n-k)-\textit{непарне}. \end{cases}$ Побудуємо графіки залежності вкладу розподілу мас (21) за радіусом (глибиною) у стоксові постійні (див. Рис. 1,2) та проведемо аналіз отриманих результатів.

Таблиця 1

Значення заданих стоксових постійних (модель EGM2008) та вирахувані значення для різних порядків

n	k	$C_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda} C^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+2} C^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+4} C^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+6} C^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+8} C^t_{n,k}$	$S_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+2} S^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+4} S^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+6} S^t_{n,k}$	$\sum_{t=0}^{\lambda+8} S^t_{n,k}$
0	0	1.0E+00	1.0E+00	0.0E+00	–	–	–	–	–	–	–	–
1	0	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	–	–	–	0.0E+00	–	–	–	–
1	1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	–	–	–	0.0E+00	–	–	–	–
2	0	-1.1E-03	-1.3E-03	-1.1E-03	–	–	–	0.0E+00	–	–	–	–
2	1	-2.8E-10	0.0E+00	-2.8E-10	–	–	–	1.9E-09	1.9E-09	–	–	–
2	2	1.6E-06	0.0E+00	1.6E-06	–	–	–	-9.0E-07	-9.0E-07	–	–	–
3	0	2.5E-06	0.0E+00	0.0E+00	2.5E-06	–	–	0.0E+00	0.0E+00	–	–	–
3	1	2.2E-06	0.0E+00	0.0E+00	2.2E-06	–	–	2.7E-07	0.0E+00	2.7E-07	–	–
3	2	3.1E-07	0.0E+00	0.0E+00	3.1E-07	–	–	-2.1E-07	0.0E+00	-2.1E-07	–	–
3	3	1.0E-07	0.0E+00	0.0E+00	1.0E-07	–	–	2.0E-07	0.0E+00	2.0E-07	–	–
4	0	1.6E-06	3.8E-06	2.7E-06	1.6E-06	–	–	0.0E+00	0.0E+00	–	–	–
4	1	-5.1E-07	0.0E+00	6.3E-13	-5.1E-07	–	–	-4.5E-07	-4.2E-12	-4.5E-07	–	–
4	2	7.8E-08	0.0E+00	-1.2E-09	7.8E-08	–	–	1.5E-07	6.7E-10	1.5E-07	–	–
4	3	5.9E-08	0.0E+00	0.0E+00	5.9E-08	–	–	-1.2E-08	0.0E+00	-1.2E-08	–	–
4	4	-4.0E-09	-2.2E-15	-2.2E-15	-4.0E-09	–	–	6.5E-09	0.0E+00	6.5E-09	–	–
5	0	2.3E-07	0.0E+00	0.0E+00	-1.5E-08	2.3E-07	–	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	–
5	1	-5.4E-08	0.0E+00	0.0E+00	-8.0E-09	-5.4E-08	–	-8.1E-08	0.0E+00	-9.8E-10	-8.1E-08	–
5	2	1.1E-07	0.0E+00	0.0E+00	-5.6E-10	1.1E-07	–	-5.2E-08	0.0E+00	3.9E-10	-5.2E-08	–
5	3	-1.5E-08	0.0E+00	0.0E+00	-6.1E-11	-1.5E-08	–	-7.1E-09	0.0E+00	-1.2E-10	-7.1E-09	–
5	4	-2.3E-09	0.0E+00	0.0E+00	8.5E-21	-2.3E-09	–	3.9E-10	0.0E+00	0.0E+00	3.9E-10	–
5	5	4.3E-10	0.0E+00	0.0E+00	-1.4E-21	4.3E-10	–	-1.6E-09	0.0E+00	8.2E-21	-1.6E-09	–
6	0	-5.4E-07	-1.4E-08	-9.1E-09	-7.4E-10	-5.4E-07	–	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	–
6	1	-6.0E-08	0.0E+00	-1.9E-15	2.6E-09	-6.0E-08	–	2.1E-08	1.3E-14	2.3E-09	2.1E-08	–
6	2	6.1E-09	0.0E+00	2.1E-12	-2.4E-10	6.1E-09	–	-4.7E-08	-1.2E-12	-4.6E-10	-4.7E-08	–
6	3	1.2E-09	0.0E+00	-8.7E-25	-9.1E-11	1.2E-09	–	1.9E-10	-5.8E-24	1.9E-11	1.9E-10	–
6	4	-2.3E-11	-3.6E-16	-3.6E-16	2.1E-12	-2.3E-11	–	-1.8E-09	0.0E+00	-3.4E-12	-1.8E-09	–
6	5	-2.2E-10	0.0E+00	-1.1E-25	-6.9E-22	-2.2E-10	–	-4.3E-10	-3.6E-25	-4.2E-22	-4.3E-10	–
6	6	2.2E-12	3.0E-17	3.0E-17	3.0E-17	2.2E-12	–	-5.5E-11	-1.7E-22	-4.0E-22	-5.5E-11	–
7	0	3.5E-07	0.0E+00	0.0E+00	8.3E-11	-2.2E-09	3.5E-07	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
7	1	2.1E-07	0.0E+00	0.0E+00	3.1E-11	3.4E-10	2.1E-07	7.0E-08	0.0E+00	3.8E-12	5.4E-10	7.0E-08
7	2	3.3E-08	0.0E+00	0.0E+00	1.5E-12	-4.7E-10	3.3E-08	9.3E-09	0.0E+00	-9.9E-13	2.3E-10	9.3E-09

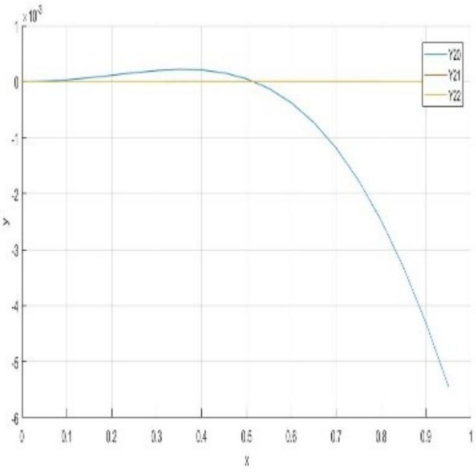
7	3	3.5E-09	0.0E+00	0.0E+00	9.5E-14	4.0E-11	3.5E-09	-3.1E-09	0.0E+00	1.9E-13	1.9E-11	-3.1E-09
7	4	-5.8E-10	0.0E+00	0.0E+00	-1.5E-20	3.1E-12	-5.8E-10	-2.6E-10	0.0E+00	0.0E+00	-5.2E-13	-2.6E-10
7	5	5.9E-13	0.0E+00	0.0E+00	4.6E-22	-1.9E-13	5.9E-13	6.3E-12	0.0E+00	-3.1E-22	7.4E-13	6.3E-12
7	6	-2.5E-11	0.0E+00	0.0E+00	1.0E-22	1.0E-22	-2.5E-11	1.1E-11	0.0E+00	-2.8E-23	-4.0E-23	1.1E-11
7	7	2.8E-14	0.0E+00	0.0E+00	9.3E-23	8.0E-23	2.8E-14	4.5E-13	0.0E+00	2.4E-22	2.4E-22	4.5E-13
8	0	2.0E-07	6.3E-11	3.8E-11	-1.4E-11	5.9E-09	2.0E-07	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
8	1	1.6E-08	0.0E+00	6.9E-18	-1.2E-11	5.0E-10	1.6E-08	4.0E-08	-4.6E-17	-1.1E-11	-1.6E-10	4.0E-08
8	2	6.6E-09	1.7E-15	-3.8E-15	8.2E-13	-3.6E-11	6.6E-09	5.4E-09	3.2E-15	1.5E-12	2.7E-10	5.4E-09
8	3	-2.0E-10	0.0E+00	2.5E-24	2.0E-13	-4.8E-12	-2.0E-10	-8.7E-10	1.8E-23	-4.1E-14	-7.0E-13	-8.7E-10
8	4	-3.2E-10	-1.4E-16	-1.4E-16	-2.9E-15	5.6E-14	-3.2E-10	9.1E-11	3.2E-22	4.5E-15	4.2E-12	9.1E-11
8	5	-4.7E-12	0.0E+00	0.0E+00	-1.4E-21	2.5E-13	-4.7E-12	1.6E-11	-2.8E-26	1.9E-22	5.1E-13	1.6E-11
8	6	-1.8E-12	1.0E-18	1.0E-18	1.0E-18	-8.7E-16	-1.8E-12	8.6E-12	-3.3E-23	-5.7E-23	2.2E-14	8.6E-12
8	7	3.4E-13	0.0E+00	-6.5E-29	4.0E-23	4.6E-23	3.4E-13	3.8E-13	1.5E-26	-1.0E-23	-1.0E-23	3.8E-13
8	8	-1.6E-13	-3.6E-19	-3.6E-19	-3.6E-19	-3.6E-19	-1.6E-13	1.5E-13	0.0E+00	1.6E-24	5.0E-24	1.5E-13

Враховуючи, що вплив еліпсоїдальної форми планети проявляється у величинах $\int_{\tau} u_{nk} d\tau$, які є множниками в сумі (20), та результати обчислень з Табл. 1, можна стверджувати про незначний вплив еліпсоїдальності на формування значень стоксових постійних. Дійсно, сумарний ефект вкладу обчислених постійних $C_{n,k}^{\lambda}$, $S_{n,k}^{\lambda}$ $(\lambda < n)$ є невеликим і відчутний хіба, що для величин $C_{2,0}, C_{4,0}$. Тому можна зробити висновок, що значення стоксових постійних формуються здебільшого за рахунок анізотропії розподілу мас планети, яка описується елементами суми (19) коли $t=n$, і відхилення фігури від сферичної форми не суттєво впливає на формування значень параметрів гравітаційного поля Землі.

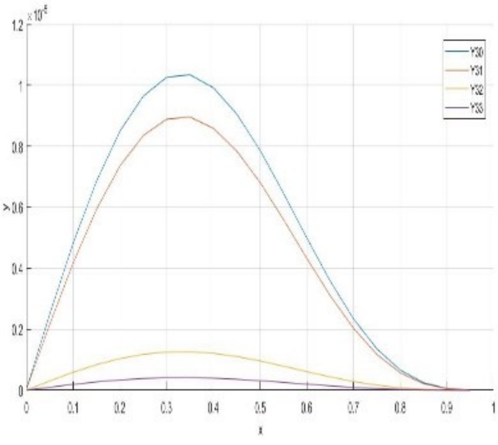
Трактуючи в співвідношенні (21) підінтегральну функцію як усереднене по одиничній сфері значення

$$\frac{1}{S_{\Omega}} \int_{\Omega} \delta(\vartheta, \lambda, \rho) d\Omega = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\vartheta, \lambda, \rho) \sin\vartheta d\vartheta d\lambda,$$

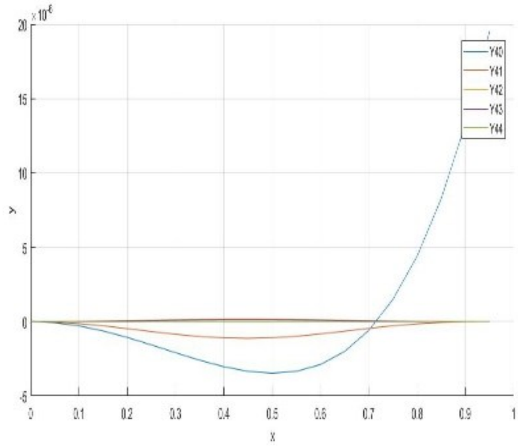
можна побудувати її графіки (Рис. 1,2), що дають загальне представлення сумарного вкладу густини за радіусом.



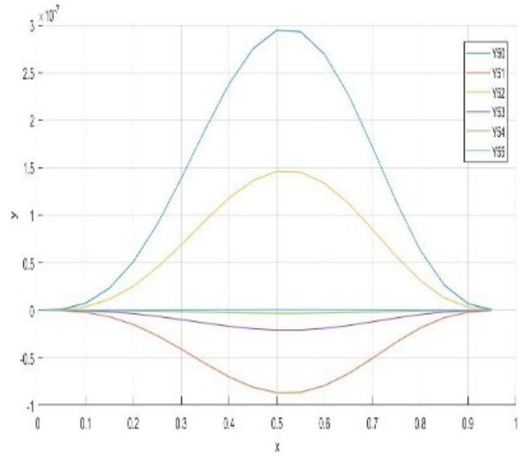
а) $C_{20} - C_{22}$



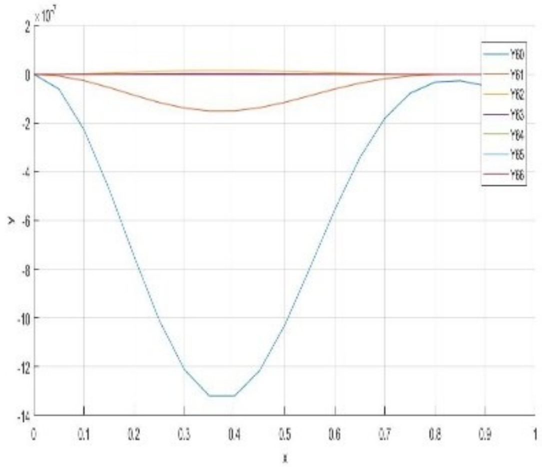
б) $C_{30} - C_{33}$



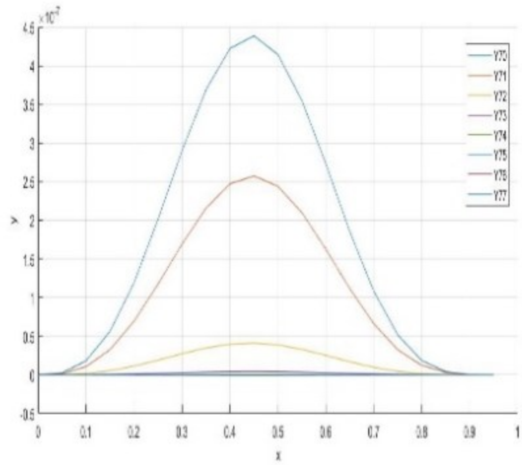
в) $C_{40} - C_{44}$



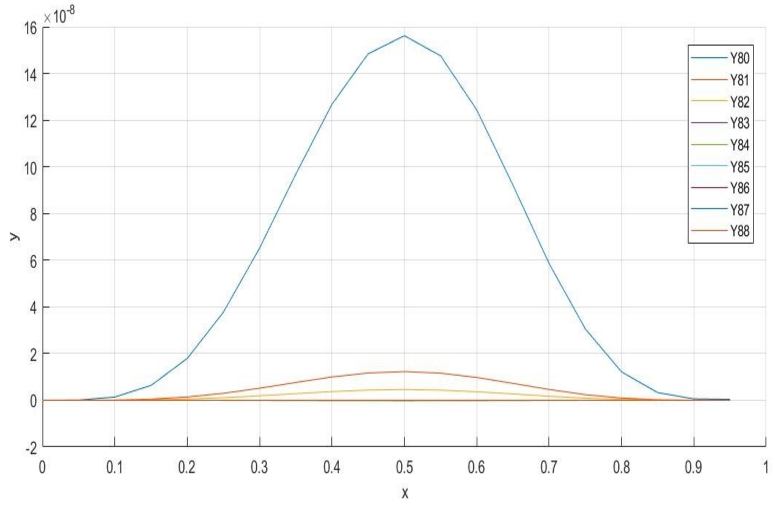
г) $C_{50} - C_{55}$



д) $C_{60} - C_{66}$

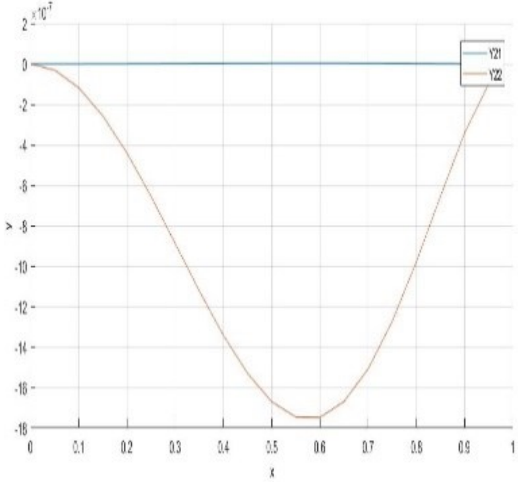


е) $C_{70} - C_{77}$

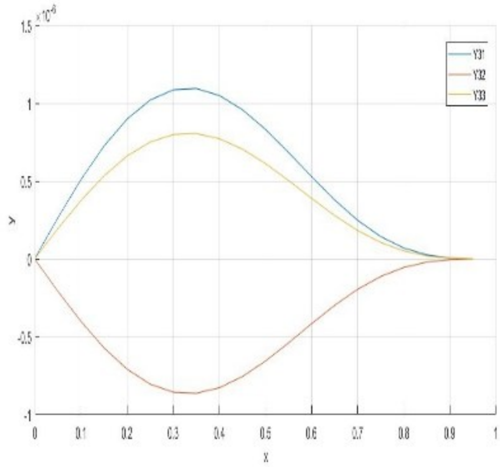


є) $C_{80} - C_{88}$

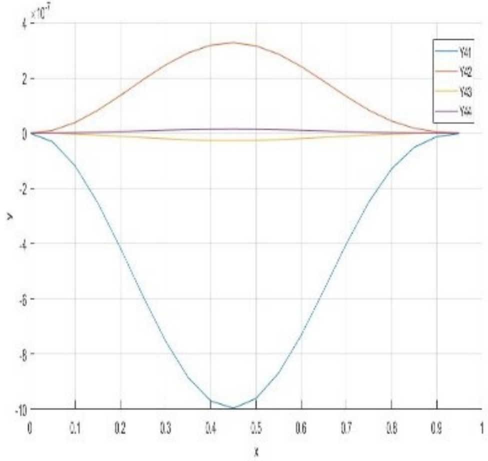
Рис. 1 Графіки залежності вкладу розподілу мас за радіусом у стоксові постійні C_{nk} .



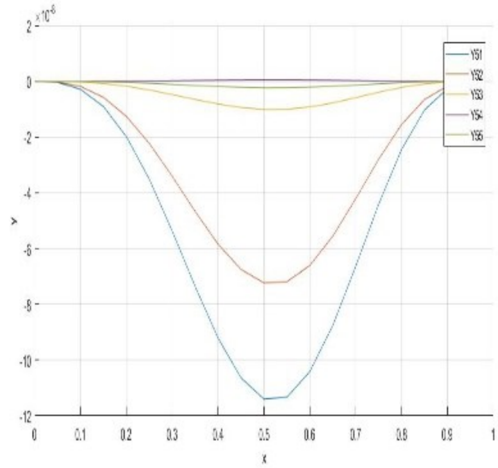
а) $S_{21} - S_{22}$



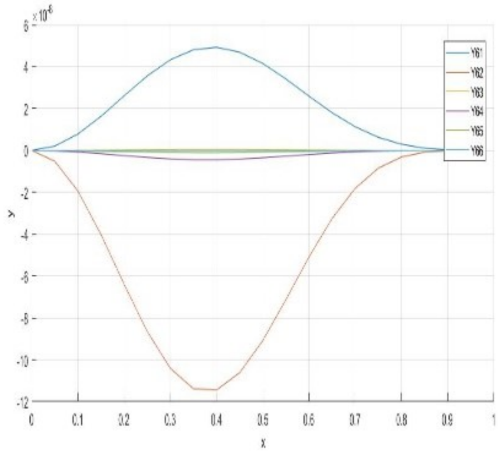
б) $S_{31} - S_{33}$



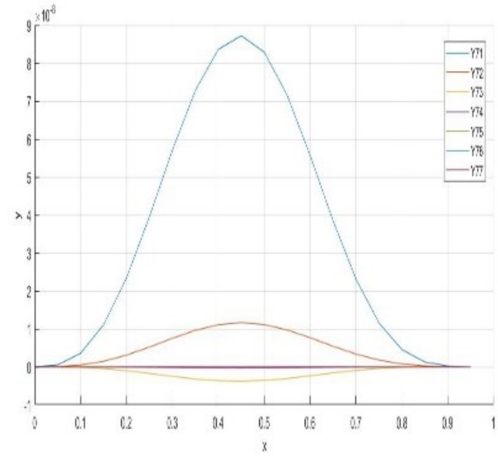
в) $S_{41} - S_{44}$



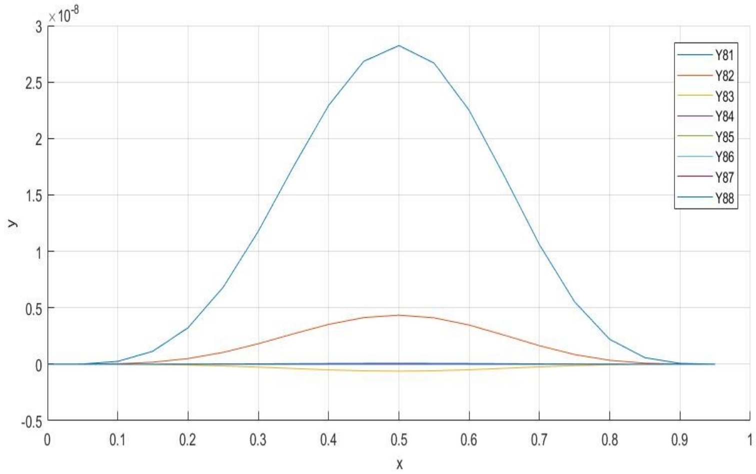
г) $S_{51} - S_{55}$



д) $S_{61} - S_{66}$



е) $S_{71} - S_{77}$



є) $S_{81} - S_{88}$

Рис. 2. Графіки залежності вкладу розподілу мас за радіусом у стоксові постійні S_{nk} .

З цих рисунків бачимо, що максимальний ефект для приведеного діапазону стоксових постійних досягається в основному для відносних радіусів $0.3 \le \rho \le 0.6$ при зберіганні знаку відповідної стоксової постійної. Знову ж таки, для значення $C_{2,0}$ його формування реалізується при $\rho > 0.5$ в мантії Землі. Величина $C_{4,0}$ отримує своє істинне значення коли $\rho > 0.7$, тобто в верхній мантії. Очевидно, що отримані результати за приведеною методикою пов'язані, насамперед, з екстремумами функції $\left(\rho^2 - 1\right)^n \rho^2$ у точках $\rho = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Подальші дослідження можуть дати відповідь на дане запитання. для цього необхідно встановити загальні співвідношення між вирахуваними стоксовими постійними та геометричними характеристиками, поданими у вигляді інтегралів від кульових функцій.

Однак, отримані результати дають можливість зробити деякі висновки.

Висновки

1. Отримано загальні співвідношення між коефіцієнтами b_{mnk} розкладу функції розподілу мас надр планети та інтегралами від кульових функцій по еліпсоїдальній поверхні, які визначають стоксові постійні заданого порядку.
2. На формування параметрів зовнішнього гравітаційного поля планети в основному впливає відхилення від радіального розподілу мас надр планети.
3. Значення стоксових постійних нижчих порядків включається в сумарний ефект вкладу в величини стоксових постійних вищого порядку.
4. Невеликий вклад еліпсоїдальної форми планети у величини стоксових постійних нижчих порядків обумовлений множниками $\int_\tau u_{nk} d\tau$, які для кулі рівні нулю а для двовісного еліпсоїда пропорційні значенню $\left(\gamma^2 - 1\right)^{\frac{n}{2}}$, $\left(n = 2m, k = 0\right)$.
5. Невідповідність спадання стоксових постійних $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ степеневому закону може бути частково пояснена присутністю доданків виду $\left(\gamma^2 - 1\right)^{\frac{n}{2}} C_{n-2,k-2}, \left(\gamma^2 - 1\right)^{\frac{n}{2}} S_{n-2,k-2}$ якщо $n, k > 2$.
6. Побудова залежності вкладу радіального розподілу мас надр планети у величини стоксових постійних виявляє неоднозначне його трактування. Можна лише констатувати, що значення постійних здебільшого формуються в межах відносного радіусу $0.3 \le \rho \le 0.6$.
7. Для більш повного дослідження виникає необхідність подальших теоретичних напрацювань в даному напрямку, а саме встановлення формул залежності стоксових постійних між собою та від геометричних характеристик планети, зокрема півосей земного еліпсоїда.
8. Сумісний розгляд геометрії (півосей) та параметрів гравітаційного поля планети може дати більш точне узгодження між ними при накладанні додаткових умов, наприклад, мінімального відхилення між обчисленим та заданим потенціалом загальноземного еліпсоїда.

Список літератури

Абрикосов О. А. О вычислении производных потенциала притяжения Земли для целей спутниковой геодезии. Науково-теоретичний журнал «Кинематика и физика небесных тел».

Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала.., (Гл. ред. физ. – мат. лит). 1988. 272 с.

Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцедентные функции. М.: Наука. 1974. Т. II. 294 с.

Винник Л. П., Лукк А. А. , Мирзокурбонов М. Тараканов, Ю. А., Черевко, Т. И. Источники крупнейших ундуляций геоида по сейсмическим и гравитационным данным.

Доклады АН СССР. 1978. Т. 241. № 4. С.789–793.

Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.

Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991. 216 с. (Гл. ред. Физ– мат. лит).

Остач О. М., Агеева И. Н.. Аппроксимация внешнего гравитационного поля Земли моделлю гравитирующих точечных мас. Тр. I Орловской конференции. “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики”. Киев: Наукова думка 1982. 106 с.

Тараканов Ю. А., Черевко Т. П. Интерпретация крупнейших гравитационных аномалий Земли. Изв. АН СССР. *Физика Земли*. 1979. № 4. С. 25–42.

Тараканов Ю. А., Карагиоз О. В. Обратная задача гравитационного поля планет как физическая проблема. *Геофизический журнал*. 2012. Т. 34, № 1. С. 32–49.

Фис М. М. О вычислении модельных стоксовых постоянных Земли, соответсвующих представлению ее плотности частной суммой обобщенного ряда Фурье. Міжвідомч. Наук. техн. збірник. «*Геодезія картографія і аерофотознімання*». 1982. №36. С. 103–107.

Фис М. М., Зазуляк П. М. , Заяць О. С.. До питання визначення кульових функцій в загально планетарній системі координат. Збірник наукових праць Західного Геодезичного Товариства „*Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*”. Львів: Ліга–Прес, 2004. С. 401–408.

Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш. Коэффициенты Стокса сжатого эллипсоида вращения, эквиденситы которого подобны его поверхности. Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3.

Черняга П. Г., Фис М. М. Новий підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та її похідних розподілів мас планет. Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «*Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*». Львів. 2012, Вип. II (24). С. 40–43.

Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2-х томах. М.: Наука, 1976. 720 с.

Cunningham L. E On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. – 1970. – Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Lockheed Missiles and Space Company, Sunnyvale, Calif., and Astronomy Dept., University of California, Berkeley, Calif., U.S.A. (Received 28 August, 969). 1970. 207–216.

Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. Existence of a class of irregular bodies with a higher convergence rate of Laplace series for the gravitational potential. Celest. Mech. Dyn. Astr. 2015. Vol. 122, issue 4. pp. 391–406.

Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C. et al. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly. Geophysical Research Abstracts. 2008. Vol. 10, 2. (EGU2008–A–01891).

M. M. FYS[1], A. M. BRYDUN[2], M. I. YURKIV[3]

[1,2,3] Department of Cartography and geospatial modeling of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandera str., Lviv, Ukraine, 79013, e-mail [1]Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, [2]Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, [3]Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua

RESEARCHING THE INFLUENCE OF THE MASS DISTRIBUTION INHOMOGENEITY OF THE ELLIPSOIDAL PLANET’S INTERIOR ON ITS STOKES CONSTANTS

Purpose. Parameters of Earth’s gravitational field ($C_{n,k}$, $S_{n,k}$) are determinated by its figure and internal filling (mass distribution) that have a different influence on their formation. Using a well-known representation of the planet masses distribution functions in the biorthogonal series form it is necessary to establish the Stokes constants $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ presentation through the planet potential expansion coefficients b_{mnk} and liner combinations of ellipsoid geometric parameters. Based on these formulas, it is the objective to investigate the possible influence of the inhomogeneity of the mass distribution function of the Earth’s interior and the representation of its shape with an ellipsoid of rotation onto the values of the Stokes constants and to explore the contribution of the radial distribution of the Earth’s mass density to these constants. **Methodology**. The presentation of the planet's interior density function as a sum of the Legendre polynomials of three variables and the approximation of its surface by an ellipsoid, as well as the representation of internal spherical functions in a rectangular coordinate system, makes it possible to integrate expressions for Stokes constant $C_{n,k}$, $S_{n,k}$ and obtain the relation between these values of different orders and the linear combination of the planet potential expansion coefficients b_{pqs} and geometric parameters of ellipsoid α, β, γ. Numerical data obtained from the derived relationships and the constructed graphs make it possible to analyze the influence of the inhomogeneity of the mass's interior distribution of an ellipsoidal planet onto the value of the Stokes constants and determine the intervals of maximum impact. **Results.** The general relations between the expansion coefficients b_{mnk} of the distribution function and the integrals from spherical functions on an ellipsoidal surface that determine Stokes constants of a definite order are established. Herewith Stokes constants of *n* order are expressed in terms of values $C_{n,k}$, $S_{n,k}$. of lower orders. The presented calculations give a procedure for the formation of Stokes constant values, which clearly implies the conclusion about the small effect of the planet's ellipsoidal form on the magnitude and three-dimensionality of the Earth's gravitational field as a result of the inhomogeneous of its interior masses distribution. Also known dependence of the values $C_{2m,0}$ on the geometric compression of the biaxial Earth ellipsoid of constant density is confirmed. **Scientific novelty**. The formulas for the relation between Stokes constants of different orders and linear combinations of parameters α, β, γ are determined. The calculations and verification of the obtained relations for different sets of potential expansion coefficients b_{pqs} allow us to conclude that the three-dimensional gravity field of the Earth predominantly contributes to the Stokes constants, except $C_{2,0}$, and the constructed graphs determine its maximum contribution to the mass distribution in depth. **Practical significance.** The obtained dependences allow us to check the approximation degree of the constructed density model of ellipsoidal planet by comparing Stokes constants which are calculated using model and are obtained from the observations. In addition, it is possible to optimally reconcile the geometric characteristics of the planet's ellipsoid with its gravitational field.

Key words: planet potential, masses distribution model, Stokes constant, ellipsoid, spherical function.

Надійшла 27.03.2019