

ЧАСОВІ ЗМІНИ В ТЕНЗОРІ ІНЕРЦІЇ ЗЕМЛІ ТА 3D МОДЕЛЬ ГУСТИНИ НА ОСНОВІ ДАНИХ UT/CSR

Основна мета цього дослідження – отримати компоненти тензора інерції Землі, що змінюється з часом, на основі динамічної еліптичності $H_D(t)$ та гармонічних коефіцієнтів $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ за даними UT/CSR. Якщо відома динамічна еліптичність $H_D(t)$, ці дані дають змогу знаходити різні механічні та геометричні параметри Землі, що змінюються з часом, протягом таких періодів: (а) з 1976 до 2020 рр. на основі щомісячних та тижневих розв’язків коефіцієнта \bar{C}_{20} ; (б) з 1992 до 2020 рр. на основі щомісячних та тижневих розв’язків ненульових коефіцієнтів $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$, пов’язаних із системою головних осей інерції, що дає змогу будувати моделі їх довгострокових варіацій. Різниця між \bar{C}_{20} і \bar{A}_{20} , заданими в різних системах, становлять середнє значення $\approx 2 \cdot 10^{-15}$, яке є меншим, ніж варіації в часі \bar{C}_{20} або \bar{A}_{20} , що характеризує високу якість рішень UT/CSR. Дві моделі залежної від часу динамічної еліптичності $H_D(t)$ побудовано з використанням довгострокових варіацій зонального коефіцієнта $\bar{A}_{20}(t)$ протягом останніх 44 та 27,5 року. Наближені формули для динамічної еліптичності $H_D(t)$, що залежить від часу, знайшли, додатково оцінивши кожен параметр ряду Тейлора з фіксацією $H_D = 3,27379448 \times 10^{-3}$ на епоху $t_0 = J2000$ згідно з теорією прецесії–нутації IAU2000/2006. Потенціал залежного від часу гравітаційного квадруполя V_2 згідно з теорією Максвелла використано для виведення нових точних формул визначення орієнтації головних осей інерції \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} через положення двох квадрупольних осей. Отже, залежні від часу механічні та геометричні параметри Землі, зокрема гравітаційний квадруполь, головні осі та головні моменти інерції, обчислювали у кожен момент часу впродовж останніх 27,5 року з 1992 до 2020 рр. Однак їх лінійна зміна у всіх розглянутих параметрах достатньо невизначена через різну поведінку на певних інтервалах часу, враховуючи варіації знака різних ефектів через стрибок часових рядів $\bar{C}_{20}(t)$ протягом 1998–2002 рр. Моделі 3D та 1D густини Землі, задані обмеженим розв’язком 3D моментів густини всередині еліпсоїда обертання, отримано з умовами збереження залежного від часу гравітаційного потенціалу від нульового до другого степеня, динамічної еліптичності, полярного стиснення, основних радіальних стрибків густини, прийнятих для моделі PREM, і довгоперіодичної зміни в просторово-часовому розподілі густини планети. Важливо зазначити, що у разі розв’язання оберненої задачі залежність від часу в тензорі інерції Землі виникає внаслідок зміни густини Землі, але не залежить від змін її форми, про що свідчать відповідні рівняння, у яких стиснення планети не враховується.

Ключові слова: залежні від часу головні осі та моменти інерції Землі; динамічна еліптичність, гравітаційний квадруполь; фундаментальні параметри Землі.

Вступ

Опрацювання SLR-даних (Satellite Laser Ranging) привело до отримання точної інформації про тривалі часові ряди гармонічних коефіцієнтів гравітаційного поля Землі, що змінюється у часі, в інтервалі 1976–2020 рр. З 1983 р. вікову варіацію

$\dot{J}_2 = -\sqrt{5} \cdot \dot{\bar{C}}_{20}$ в нормованому зональному коефіцієнті \bar{C}_{20} гравітаційного потенціалу визначено (Yoder et al., 1983) за найпростішою лінійною моделлю $\bar{C}_{20}(t) = \bar{C}_{20} + \Delta\bar{C}_{20} = \bar{C}_{20} + \dot{\bar{C}}_{20}(t - t_0)$,

що складається із часової незалежної частини \bar{C}_{20} на епоху t_0 і вікової варіації $\dot{\bar{C}}_{20}$. Цю модель для залежного від часу коефіцієнта \bar{C}_{20} застосовували в різних дослідженнях, (напр. Rubincam, 1984; Cheng et al., 1989; Schwintzer et al., 1991; Cheng et al., 2004; IERS Standards, 2010; Cheng et al., 2011) та ін. На відміну від лінійної моделі, краще наближення з квадратичним членом застосовано (Cheng et al., 2013) додатково до лінійної моделі для $\bar{C}_{20}(t)$ часових рядів, протягом часового інтервалу з 1976 до 2011 рр. Подібний підхід для 1976–2017 рр. та підінтервал 1992–2017 рр. використано для виявлення довгострокових змін у $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ і динамічної еліптичності $H_D(t)$ (Marchenko and Lopushansky, 2018). Згідно із (Cheng et al., 2013) лінійну модель можна успішно використати лише на коротких інтервалах часу. Але тривалий інтервал часу потребує вибору спеціального моделювання, що передбачає ймовірне використання ряду Фур'є–Ерміта, на нескінченному інтервалі (Marchenko, 1998; Marchenko, Abrikosov, 2001).

Тому лише після 1983 р. гравітаційний потенціал Землі почали трактувати як залежний від часу, а відповідний розподіл густини у відомому ньютонівському інтегралі для гравітаційного потенціалу слід розглядати також як залежний від часу. Проблему стандартної моделі густини Землі сформульовано IAG у 1971 р., що дало змогу побудувати відому модель PREM (Dziewonski, Anderson, 1981). Класична теорія ґрунтується на дослідженнях Clairaut, Laplace, G. Darwin, Bullard (1954), Bullen (1975), Moritz (1990) та ін. Загальне обговорення різних розподілів густини, пов'язаних із рівняннями Клеро, Вільямсона–Адамса та Пуассона, можна знайти в роботі (Marchenko, 2000). Параметризацію 1D-густини через радіальний профіль Гаусса, як одне із можливих розв'язків Вільямсона–Адамса, також наведено у (Marchenko, 2000). Але параметризація густини має особливе значення, коли Земля відповідає деформованому тілу з гравітаційним полем, що змінюється в часі. Отже, надалі всі відповідні геодезичні, астрономічні та інші дані для моделей 3D-густини є дійсними, ураховуючи 1D статичний радіальний профіль (такий як PREM), основні астрономічно-геодезичні параметри, що описують 3D статичну глобальну густину та її часові варіації із просторово-часовим розподілом густини як 4D варіації густини.

Основні оцінки нормованих залежних від часу $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ рядів отримують, як правило, аналізуючи SLR спостереження таких супутників:

Starlette, Stella, Ajisai, LAGEOS-1, LAGEOS-2, BEC, GRACE, Larets, і LARES (Cheng and Ries, 2017) і недавні ряди $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ ведуть до точніших розв'язків. Крім того, останні визначення астрономічної динамічної еліптичності H_D обчислені за сталою прецесії p_A і ґрунтуються на теорії обертання Землі, яка трактується як не тверде тіло (Dehant et al., 1999; Mathews et al., 2002; Capitaine et al. 2003; Fukushima, 2003; Bourda, Capitaine, 2004; Petit, Luzum, 2010; Liu, Capitaine, 2017) і яка була прийнята резолюціями IAU на епоху J2000 (Capitaine et al. 2009). Нові значення H_D , зокрема давніше визначення Williams (1994), вже містять вікові зміни $\dot{\bar{C}}_{20}$ в межах лінійної моделі (Marchenko, Schwintzer, 2003; Bourda, Capitaine, 2004). Тому, $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$, і $H_D(t)$ дають змогу точніше визначити залежні від часу головні осі й головні моменти тензора інерції та інші фундаментальні параметри завдяки стабільнішим визначенням H_D .

На першому етапі це дослідження має на меті виявити динамічну еліптичність Землі, що змінюється в часі $H_D(t)$, орієнтацію головних осей інерції та їх еволюцію з часом за коефіцієнтами $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$. Якщо значення $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$, і $H_D(t)$ відомі для кожного моменту часу, обчислення головних осей та головних моментів інерції здійснюються за допомогою розв'язання задачі на власні значення – власні вектори разом із оцінкою точності згідно із правилом перетворення коваріацій (Marchenko, 2003; Marchenko, Schwintzer, 2003). Отже, точні формули для проблеми власного значення – власного вектора можна знайти як у вищенаведених статтях, так і в роботах (Chen, Shen, 2010; Chen, et al., 2015).

Важливо зазначити, що замість часових рядів еліптичності $H_D(t)$ маємо з літератури лише одне рекомендоване $H_D = 3.27379448 \times 10^{-3}$ на епоху J2000 згідно з теорією прецесії–нутації IAU 2000/2006 (Capitaine, et al., 2009). Саме тому виникає необхідність побудови відповідної моделі для $H_D(t)$. Цю проблему можна вирішити наближено з додатковою умовою для збереження змін у сліді тензора інерції. Якщо модель для $H_D(t)$ встановлена, то обчислення залежних від часу компонент тензора інерції та інших пов'язаних параметрів уможливується (Marchenko and Lopushansky, 2018). Отже, попереднє моделювання довгострокових змін в $H_D(t)$ на основі лінійних та квадратичних компонент має вирішальне значення з

$H_D = 3,27379448 \times 10^{-3}$, зафіксованим на епоху J2000. Компоненти тензора інерції Землі є похідними від $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$, і $H_D(t)$ у кожен момент часу t . Ці $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ також дають змогу знайти потенціал гравітаційного квадруполя (Marchenko, 1979), що має важливі параметри, незалежні від обертання прийнятої системи відліку, і представляють інваріантні характеристики гравітаційного поля, які залежать лише від часу.

Тому в цьому дослідженні основну увагу звернено на: 1) перевірку відомих формул для моделювання залежного від часу $H_D(t)$ з фіксацією $H_D = 3.27379448 \times 10^{-3}$ на епоху $t_0 = J2000$; 2) виведення нових точних формул для визначення орієнтації головних осей \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} через положення двох квадрупольних осей; 3) розкриття довготривалих змін на основі щомісячних розв'язків UT/CSR для \bar{C}_{20} з 1976 до 2020 рр.; 4) виявлення довгострокових варіацій на основі щотижневих та щомісячних розв'язків UT/CSR для ненульових $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$, що пов'язані з системою головних осей інерції за 1992–2020 рр.; 5) побудова залежної від часу моделі $H_D(t)$ з використанням $\bar{A}_{20}(t)$ протягом останніх 27,5 року; 6) обчислення головних осей $\bar{A}(t)$, $\bar{B}(t)$, $\bar{C}(t)$ і головних

моментів $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ інерції та інших фундаментальних параметрів Землі; 7) визначення 3D-моделі густини Землі та відповідних довгострокових змін у розподілі густини в просторі – часі.

Моделювання динамічної еліптичності Землі, що залежить від часу

На першому етапі виконаємо перетворення $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ з вектора

$$\mathbf{g}(t) = [\bar{C}_{20}(t); \bar{C}_{21}(t); \bar{S}_{21}(t); \bar{C}_{22}(t); \bar{S}_{22}(t)]^T,$$

що визначені у фіксованій геоцентричній системі координат (X, Y, Z) , до вектора

$$\tilde{\mathbf{g}}(t) = [\bar{A}_{20}(t), 0, 0, \bar{A}_{22}(t), 0]^T$$

ненульових гармонічних коефіцієнтів $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ у миттєвій системі координат головних осей інерції $\bar{A}(t)$, $\bar{B}(t)$, $\bar{C}(t)$. Припускаючи, що вихідні дані складаються з вектора $\mathbf{g}(t)$ на кожен момент часу $t = t_k$ ($k = 1, 2, \dots, q$) з відомою коваріаційною матрицею, використовуватимемо замкнені формули відповідної задачі на власні значення – власні вектори, наведені в роботі (Marchenko, Schwintzer, 2003) для визначення $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ у системі головних осей. Залучаючи динамічну еліптичність $H_D(t)$, можемо знайти нормовані з коефіцієнтом $1/Ma^2$, залежні від часу головні моменти інерції $A(t)$, $B(t)$, і $C(t)$ (за умови $M = const$):

$$H_D(t) = (2C(t) - A(t) - B(t))/2C(t) \Leftrightarrow C(t) = -\sqrt{5}\bar{A}_{20}(t)/H_D(t), \quad (1a)$$

$$A(t) = \sqrt{5}\bar{A}_{20}(t)(1 - 1/H_D(t)) - \sqrt{15}\bar{A}_{22}(t)/3, \quad (1b)$$

$$B(t) = \sqrt{5}\bar{A}_{20}(t)(1 - 1/H_D(t)) + \sqrt{15}\bar{A}_{22}(t)/3. \quad (1c)$$

Орієнтація головних осей у (X, Y, Z) -системі ґрунтується на нових формулах (16), із використанням тільки $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$. H_D -значення, що подають (Williams, 1994; Mathews et al., 2002; Fukushima, 2003; Capitane et al., 2003), неістотно відрізняються від прийнятого $H_D = 0,0032737945$ відповідно до IAU2000/2006 моделі прецесії–нутації (див., Petit, Luzum, 2010). Для перетворення пов'язаних величин із різними p_A до загальноприйнятого

значення $p_A = 50,2879225''/уг$ було використано співвідношення $\delta H_D = 6,4947 \cdot 10^{-7} \delta p_A$ (Souhay, Kinoshita, 1996). Ці H_D набагато краще відповідають динамічній еліптичності IAU 2000/2006 H_D .

Загалом обчислення $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, і сліду $\text{Tr}(\mathbf{I}(t))$ тензора інерції Землі

$$\text{Tr}(\mathbf{I}(t)) = A(t) + B(t) + C(t) = 3I_m(t) = \sqrt{5}\bar{A}_{20}(t)(2 - 3/H_D(t))$$

дуже прості через рівняння (1) на кожен заданий момент $t = t_k$. З цього ми отримуємо пряму залежність $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $\text{Tr}(\mathbf{I}(t))$, і,

зокрема, моменту $I_m(t)$ інерції для трактування через $\bar{C}_{20}(t)$ постійного припливу в $\bar{A}_{20}(t) \approx \bar{C}_{20}$, $\bar{A}_{22}(t)$, що дають відомі рівняння

$$-\sqrt{5}\bar{A}_{20}(t) = (2C(t) - A(t) - B(t))/2, \quad 2\sqrt{15}\bar{A}_{22}(t)/3 = B(t) - A(t). \quad (2)$$

Різниця $B(t) - A(t)$ також певною мірою залежить від припливної системи, оскільки $\bar{C}_{20}(t)$ входить у розрахунок коефіцієнта $\bar{A}_{22}(t)$. Далі передбачають, що $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$, і $H_D(t)$ пов'язані із системою припливів нульової частоти (Groten, 2000). Однак оцінки для $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ UT/CSR ґрунтуються на статичній моделі гравітаційного поля, що ураховує тверді припливи землі та океану, полюсні припливи твердої землі та океану та інші ефекти. Для того, щоб відокремити різні впливи для фільтрування лише компонент залежного від часу гравітаційного поля, необхідне додаткове дослідження. Але обчислення довгострокових варіацій, основане лише на UT/CSR даних $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$, прийнято як важливе.

$$d\text{Tr}(\mathbf{I}(t)) = dA(t) + dB(t) + dC(t) = d[3I_m(t)] = 0, \quad \Leftrightarrow \quad dA(t) = dB(t) = -dC(t)/2, \quad (4)$$

можна отримати вікову зміну в $H_D(t)$, після розкладу в ряд Тейлора рівняння (3):

$$H_D(t) = H_D|_{t=t_0} + dH_D = H_D|_{t=t_0} + \left. \frac{dH_D(t)}{dt} \right|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2H_D(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \dots, \quad (5)$$

де першу та другу похідні можна знайти так

$$\left. \frac{dH_D(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = -\frac{\sqrt{5}\dot{\bar{A}}_{20}}{C}, \quad \left. \frac{d^2H_D(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = -\frac{\sqrt{5}\ddot{\bar{A}}_{20}}{C}, \quad \dot{C}(t) = \frac{dC(t)}{dt}, \quad \ddot{C}(t) = \frac{d^2C(t)}{dt^2}, \quad (6)$$

а всі незначні члени опущені через обчислену величину $\dot{\bar{A}}_{20} = -7.461 \cdot 10^{-12} \text{ yr}^{-1}$ ($\frac{d\bar{A}_{20}}{dt} = \dot{\bar{A}}_{20}$) для нашого інтервалу 1992–2020 рр. Відповідно до рівнянь (2) та (4) (Burša, et al., 2008; Marchenko, 2009a), лінійну зміну в епоху J2000 можна обчислити як $\dot{C} = 1.112 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$. І навіть більше, похідні \ddot{C} і $\ddot{\bar{A}}_{20}$ ($\frac{d^2\bar{A}_{20}}{dt^2} = \ddot{\bar{A}}_{20}$) принаймні менші або можуть мати значення того самого порядку, що і \dot{C} і $\dot{\bar{A}}_{20}$. Звідси чотири доданки у повних виразах для похідних $\frac{dH_D}{dt}$ і $\frac{d^2H_D}{dt^2}$, значення яких $\sim 10^{-15}$, незначні порів-

Виведемо варіації динамічної еліптичності $H_D(t)$ за часовими рядами $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ та динамічною еліптичністю IAU2000/2006 $H_D = 0,0032737945$, що зафіксована на епоху J2000. Наближене вирішення проблеми можливе, оскільки $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ можна знайти окремо від вектора $\mathbf{g}(t)$. Крім того, вираз (1a) можна записати як

$$H_D(t) = -\frac{\sqrt{5}\bar{A}_{20}(t)}{C(t)}. \quad (3)$$

Якщо небесне тіло еластичне, а поле тяжіння змінне, це спричиняє незначні зміни усіх параметрів у рівнянні (3), із якого, враховуючи, що додатковою умовою для $\text{Tr}(\mathbf{I}(t)) = \text{const}$ (Rochester, Smylie, 1974), “оскільки зональні сили не змінюють форму тіла обертання” (Melchior, 1978; Souchay and Folgueira, 1998):

няно з \dot{C} , $\dot{\bar{A}}_{20}$, і $\ddot{\bar{A}}_{20}$, що веде до остаточного розв'язку

$$d\bar{A}_{20}(t) = \left[\dot{\bar{A}}_{20}(t-t_0) + \ddot{\bar{A}}_{20}(t-t_0)^2 \right], \quad (7)$$

де $d\bar{A}_{20}(t)$ – не що інше, як довготривала зміна (лінійна та квадратична) залежного від часу гармонічного зонального коефіцієнта ступеня 2, заданого в системі головних осей.

Отже, після вибору довгоперіодичної моделі для $d\bar{A}_{20}(t)$ отримуємо необхідне рішення відносно епохи $t_0 = 2000$ на основі такого співвідношення

$$H_D(t) = H_D|_{t=t_0} - \frac{\sqrt{5}}{C} \cdot \left(\dot{\bar{A}}_{20}(t-t_0) + \ddot{\bar{A}}_{20}(t-t_0)^2 \right), \quad (8)$$

якщо і лінійну, і квадратичну складові \bar{A}_{20} взято до уваги, а полярний момент C задано на епоху $t_0=2000$. У результаті рівняння (8) за визначенням може представляти лише довго-

строкові зміни $H_D(t)$, оскільки їх отримано за допомогою оцінок похідних \dot{C} , $\dot{\bar{A}}_{20}$ і \ddot{C} , $\ddot{\bar{A}}_{20}$ і лінійної та квадратичної компонент.

Моделі для C_{20} та динамічної еліптичності

Після перетворення вектора \mathbf{g} , відомого в системі (X, Y, Z) , до вектора $\tilde{\mathbf{g}}$, заданого в головних осях $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, можемо визначити \bar{A}_{20} на епоху та різниці між \bar{C}_{20} і \bar{A}_{20} . У цьому випадку такі різниці ґрунтуються на рішеннях UT/CSR для залежних від часу коефіцієнтів $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ протягом 1992–2020 рр. Після перетворення до $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ отримуємо середню різницю

$$\bar{A}_{20} = \bar{A}_{20}^0 + \dot{\bar{A}}_{20}(t - t_0) + \ddot{\bar{A}}_{20}(t - t_0)^2 + A_a \cos\left(\frac{2\pi}{P_a}(t - t_0) - \{\phi_a\}\right), \quad (9)$$

де \bar{A}_{20}^0 – значення \bar{A}_{20} на еталонну епоху t_0 ; $\dot{\bar{A}}_{20}$, $\ddot{\bar{A}}_{20}$ є параметрами довгострокових варіацій в \bar{A}_{20} , в околі t_0 ; (A_a, ϕ_a) є складовими річних варіацій з періодом P_a .

$(\bar{C}_{20} - \bar{A}_{20}) \approx 2 \cdot 10^{-15}$, яка менша, ніж довгострокові варіації UT/CSR. Значення $\approx 2 \cdot 10^{-15}$ відповідає ненульовому інваріанту $I_1 \approx 10^{-15}$ за формулами Ламбека (Ламбек, 1971; Марченко, 2009а).

Існують різні моделі для залежних від часу змін коефіцієнта \bar{A}_{20} (напр., Cheng et al, 2011; Cheng et al, 2013; та ін.). Тут використано модель для \bar{A}_{20} , взяту зі статті (Marchenko and Lopushansky, 2018), що подає зміну в часі як

Рис. 1 ($\bar{C}_{20}(t)$ протягом 1976–2020 рр.) та рис. 2 ($\bar{A}_{20}(t)$ упродовж 1992–2020 рр.) ілюструють вищезазначені часові ряди \bar{C}_{20} UT/CSR, які моделювали поліномами до другого ступеня одночасно із рядами Фур'є.

Таблиця 1

Коефіцієнти для поліноміального наближення довгоперіодичного тренду для \bar{A}_{20} у формі

$$\bar{A}_{20} = \bar{A}_{20}^0 + \dot{\bar{A}}_{20}(t - t_0) + \ddot{\bar{A}}_{20}(t - t_0)^2 \text{ на епоху J2000 (див. (9))}$$

Розв'язок	\bar{A}_{20}^0	$\dot{\bar{A}}_{20}$ [уг ⁻¹]	$\ddot{\bar{A}}_{20}$ [уг ⁻²]
Cheng, et al., 2013	-484,169453E-06	0,27E-11	-0,40E-12
Marchenko, Lopushansky, 2018, I	-484,1694554194E-06	0,1166E-11	-0,4844E-12
Marchenko, Lopushansky, 2018, II	-484,1695458067E-06	-0,1001E-10	0,3659E-12
Розв'язок I (1976–2020)	-484,1695331837E-06	-0,2559E-11	-0,3792E-12
Розв'язок II (1992–2020)	-484,1695422666E-06	-0,1026E-10	0,2960E-12
Розв'язок III (1992–2020)	-484,1695355089E-06	-0,7461E-11	–

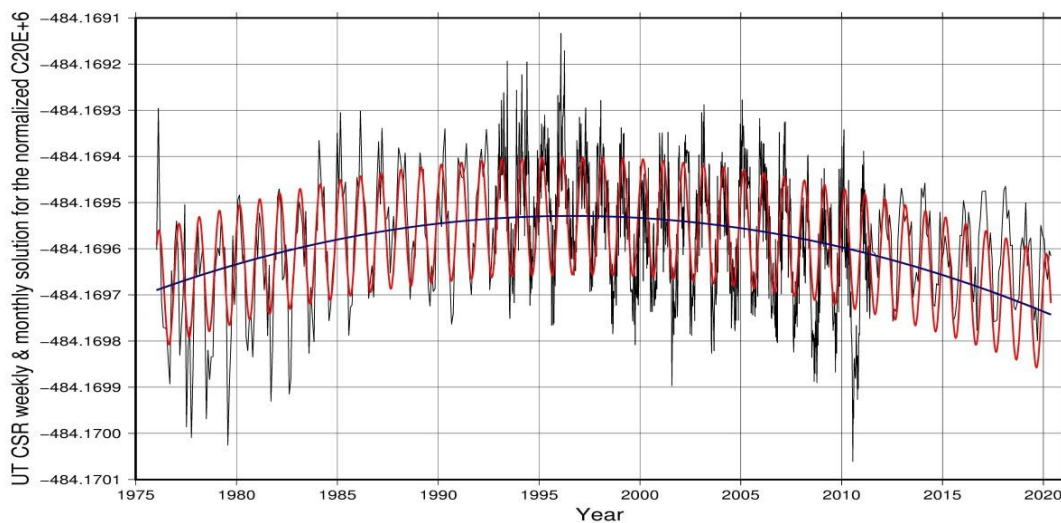


Рис. 1. Ряди UT/CSR для \bar{C}_{20} : довгострокові варіації, фіксовані на епоху J2000, моделювали поліномами до другого ступеня (синя лінія) (розв'язок I у табл. 1) одночасно з рядами Фур'є з використанням річного періоду (червона лінія), (період 1976–2020 рр. – чорна лінія)

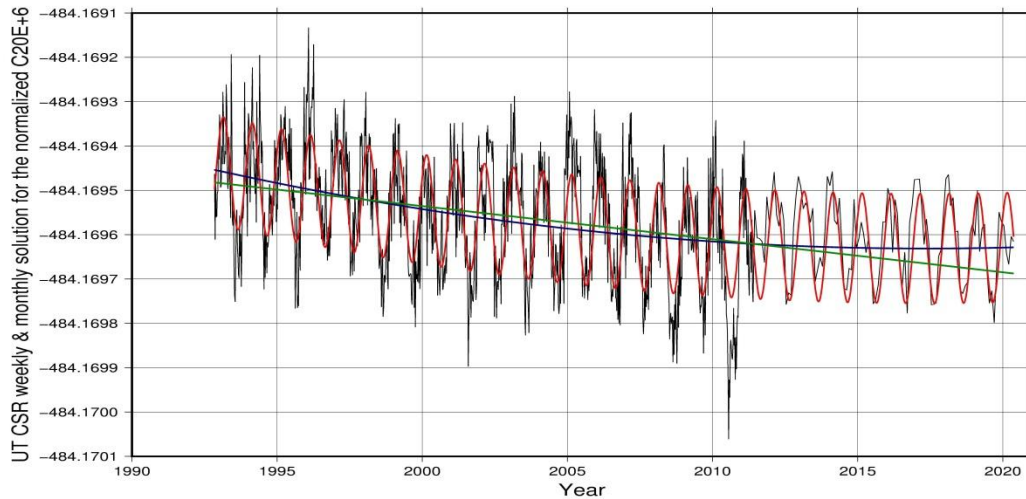


Рис. 2. Ряди UT/CSR для \bar{A}_{20} : довгострокові зміни, фіксовані на епоху J2000, моделювали поліномами до другого ступеня (синя лінія) одночасно з рядами Фур'є на основі (9) (червона лінія) (розв'язок II у табл. 1). Лінійну модель показано зеленим (розв'язок III у табл. 1), період 1992–2020 рр. – чорна лінія

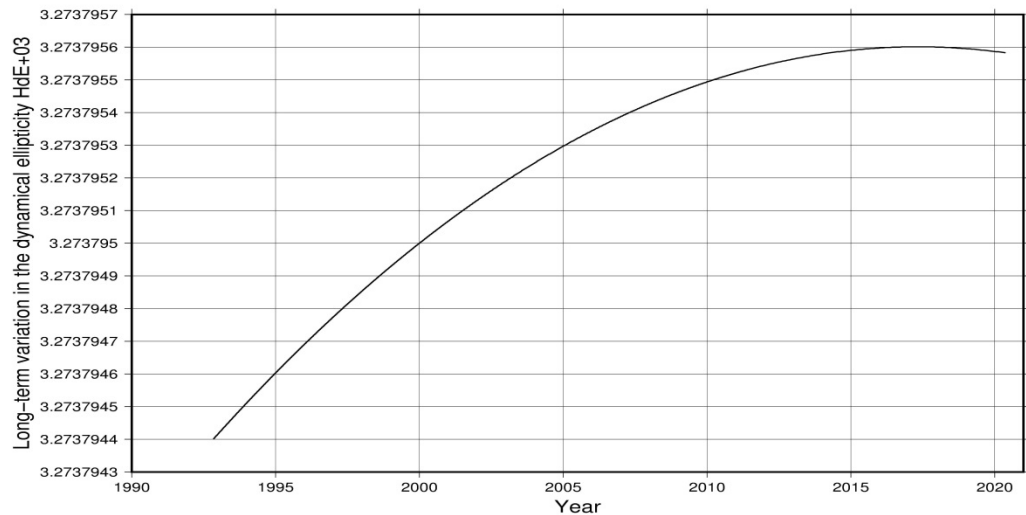


Рис. 3. Довгострокові зміни (суцільна лінія) у динамічній еліптичності H_D , змодельовані відповідно до рівняння (8) та моделі з розв'язку II (1992–2020) $t_0 = J2000$

Табл. 1 ілюструє отримані моделі та такий результат: додаткові три роки $\bar{C}_{20}(t)$ коефіцієнти за даними SLR приводять у цьому дослідженні до невеликої зміни довгострокових варіацій з огляду на порівняння з (Marchenko et al., 2018) протягом 1992–2020 рр. Натомість отримуємо великі відмінності між результатами (Cheng, et al., 2013; Marchenko et al., 2018) та цим розв'язком I протягом часових інтервалів (1976–2011) та (1976–2020) через довші періоди для $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$, різні вихідні дані та різний підхід до опрацювання даних. Все це призводить до ідеї використання лінійних сплайн-функцій для кращого моделювання залежних від часу параметрів, із використанням відповідних коротких інтервалів, оскільки безпосереднє визначення

рядів $H_D(t)$ за спостереженнями не знайдено в літературі. Очевидно, сплайн-функції ступеня 2 або 3 дадуть кращу якість апроксимації, але в цьому випадку наближення потребує оцінки часових рядів $H_D(t)$.

Орієнтація головних осей через параметри гравітаційного квадруполя

Як додаток до співвідношень (1) використовуватимемо потенціал V_2 ступеня 2 з гармонічними коефіцієнтами (C_{2m}, S_{2m}) , який можна розглядати в тотожній формі як потенціал гравітаційного квадруполя Землі, записаний відповідно до Максвелла–Гаусса. З попередніх досліджень (Marchenko, 1979; Marchenko, 1998) отримуюмо

$$V_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{GMa^2}{r^5} \mathbf{r}^T \mathbf{H} \mathbf{r} = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{GMa^2}{r^5} \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{r}}, \quad (10)$$

де матриці \mathbf{H} і $\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\mathbf{H} = \tilde{M}_2 \left[\frac{3}{2} (\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1^T) - \cos \tilde{\gamma} \cdot \mathbf{I} \right], \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{M}_2 \begin{pmatrix} \frac{3 + \cos \tilde{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \tilde{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3 - \cos \tilde{\gamma}}{2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

визначаються у земній фіксованій системі координат (X, Y, Z) і в головних осях інерції $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, відповідно; \mathbf{r}^T і $\tilde{\mathbf{r}}^T$ – декартові вектори координат, що відповідають цим системам; GM – добуток гравітаційної сталої G і маси планети M ; a – головна піввісь еліпсоїда обертання; r – відстань від початку координат до поточної точки;

\mathbf{I} – одинична (3×3) матриця; $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1(l_1, m_1, n_1)$ і $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2(l_2, m_2, n_2)$ – одиничні аксіальні вектори, що відповідають осям квадруполя з кутом $\tilde{\gamma}$ між \mathbf{h}_1 і \mathbf{h}_2 ; \tilde{M}_2 – нормований квадрупольний момент M_2 , що завжди позитивний за визначенням. Отже, одержимо

$$M_2 > 0, \quad (\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1) = 1, \quad (\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_2) = 1, \quad (\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2) = \cos \tilde{\gamma}, \quad (12)$$

$$M_2 = 2A_{22} - A_{20}, \quad \tilde{M}_2 = \frac{M_2}{\sqrt{15}} = \frac{\bar{A}_{22} - \sqrt{3}\bar{A}_{20}}{3}, \quad \cos \tilde{\gamma} = \frac{3\bar{A}_{22} + \sqrt{3}\bar{A}_{20}}{\bar{A}_{22} - \sqrt{3}\bar{A}_{20}}. \quad (13)$$

Легко помітити, що положення \mathbf{h}_1 і \mathbf{h}_2 завжди буде в площині головних осей \bar{A} і \bar{C} . Вісь \bar{A} – не що інше, як бісектриса кута $\tilde{\gamma}$ і

вісь \bar{C} – бісектриса кута $\pi - \tilde{\gamma}$. Тоді визначимо два вектори, що збігаються з осями \bar{A} і \bar{C} :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2)/2, \quad \mathbf{c} = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)/2, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{c}, \quad (14)$$

і після простих перетворень отримуємо їхні евклідові норми з погляду A, B, C :

$$\|\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \cos^2 \frac{\tilde{\gamma}}{2} = \frac{B - A}{C - A}, \quad \|\mathbf{c}\|^2 = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = \sin^2 \frac{\tilde{\gamma}}{2} = \frac{C - B}{C - A}. \quad (15)$$

Тепер власні вектори або головні осі інерції знаходимо як розв'язок однорідної системи

лінійних алгебраїчних рівнянь на основі матриці \mathbf{H} з такими виразами

$$\left. \begin{aligned} u_A &= \pm \frac{l_1 + l_2}{2 \cdot \|\mathbf{a}\|}, & v_A &= \pm \frac{m_1 + m_2}{2 \cdot \|\mathbf{a}\|}, & w_A &= \pm \frac{n_1 + n_2}{2 \cdot \|\mathbf{a}\|}, \\ u_B &= \pm \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}, & v_B &= \pm \frac{n_1 l_2 - l_1 n_2}{2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}, & w_B &= \pm \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{2 \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{c}\|}, \\ u_C &= \pm \frac{l_1 - l_2}{2 \cdot \|\mathbf{c}\|}, & v_C &= \pm \frac{m_1 - m_2}{2 \cdot \|\mathbf{c}\|}, & w_C &= \pm \frac{n_1 - n_2}{2 \cdot \|\mathbf{c}\|}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

де рівняння (16) також впливає з (14) і (15) і представляє нові точні співвідношення для оцінки напрямних косинусів орієнтації головних осей \bar{A} ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(u_A, v_A, w_A)$), \bar{B} ($\mathbf{b} = \mathbf{b}(u_B, v_B, w_B)$), і \bar{C} ($\mathbf{c} = \mathbf{c}(u_C, v_C, w_C)$). Напрямні косинуси (l_1, m_1, n_1) для \mathbf{h}_1 і (l_2, m_2, n_2) для \mathbf{h}_2 знаходимо за коефіцієнтами C_{2m}, S_{2m} згідно з (Marchenko, 1998).

Залежні від часу механічні та геометричні параметри Землі

Після визначення внеску $d\bar{A}_{20}(t)$ отримуємо залежність від часу $H_D(t)$ на основі рівняння (8). Рис. 3 показує цю зміну в $H_D(t)$, що на основі $d\bar{A}_{20}(t)$ прийнято як розв'язок II у табл. 1. З $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$, і $H_D(t)$, визначивши власні значення – власні вектори, приходимо до механічних та геометричних параметрів Землі.

Залежні від часу коефіцієнти $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ прийнято для таких часових рядів: а) 1976–2020 рр.; б) 1992–2011 рр.; в) GSR Release 06 (2011–2020) згідно з UT/CSR (<https://www.csr.utexas.edu/datasets/ftp-portal-grace-data/>). Ці $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ з кроком від тижня до місяця використано для обчислення механічних та геометричних параметрів Землі, що змінюються із часом.

Табл. 2 відображає неабияку стабільність у часі осей \bar{A} і \bar{B} через невеликі варіації широти та довготи ($345,067^\circ \div 345,075^\circ$), ($75,067^\circ \div 75,075^\circ$), відповідно, в 1992–2020 рр. (див. також Marchenko, 2009a). Через велику кількість параметрів (двадцять), обчислених для кожного t , наводимо тут лише середні значення деяких залежних від часу величин, отриманих

усередненням їх миттєвих значень. Середні значення механічних та геометричних параметрів Землі та їх невизначеності протягом інтервалу часу від 1992,844640 р. до 2020,371 р. наведено в табл. 3.

Таблиця 2

Середні значення сферичних координат головних осей, обчислені через рівняння (16) в прийнятій ITRF системі. Їх оцінки на епоху $t_0 = 2000$ подано в дужках

Вісь	Широта [градус]	Довгота [градус]
\bar{A}	-0,0000430 (-0,0000451)	345,07094 (345,07084)
\bar{B}	0,0000921 (0,0000940)	75,070941 (75,070836)
\bar{C}	89,999898 (89,999895)	280,16230 (280,67896)

Таблиця 3

Середні значення залежно від часу механічного та геометричного параметрів Землі та їх невизначеності протягом інтервалу часу від 1992,8 уг до 2020,4 уг ($GM = 398600.4415 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$; $a = 6378136.3 \text{ m}$; епоха $t_0 = 2000$; система припливів нульової частоти)

Параметр	Середнє значення	Мінімум	Максимум
$\bar{A}_{20} \cdot 10^{-6}$	(-484,169561653 ± 0,000014)	-484,170060986	-484,169132852
$\bar{A}_{22} \cdot 10^{-6}$	(2,812636730 ± 0,00019)	2,812117252	2,812997518
H_D	0,0032737951 ± 0,0000000005	0,0032737944	0,0032737956
A	0,32961129 ± 0,000000005	0,32961104	0,32961159
B	0,32961855 ± 0,000000005	0,32961830	0,32961885
C	0,33069756 ± 0,000000005	0,33069731	0,33069786
$I_m = \frac{A+B+C}{3}$	0,32997580 ± 0,000000005	0,329975551	0,329976102
p_A	50,28812427	50,28700040	50,28884813
$(C - A) \cdot 10^6$	(1086,26715090 ± 0,00025)	1086,2659601	1086,2683628
$(C - B) \cdot 10^6$	(1079,00495408 ± 0,00025)	1079,0038943	1079,0059753
$(B - A) \cdot 10^6$	(7,26219681 ± 0,000012)	7,26085552	7,26312836
$\alpha = (C - B) / A$	(3273,567947 ± 0,005) · 10 ⁻⁶	3273,566265	3273,569255
$\beta = (C - A) / B$	(3295,527948 ± 0,005) · 10 ⁻⁶	3295,525205	3295,529757
$\gamma = (B - A) / C$	(21,960237 ± 0,0015) · 10 ⁻⁶	21,956187	21,963055
$1/f$	298,2564416 ± 0,00001	298,256292	298,256570
$1/f_e$	91437,107 ± 6,1	91425,380	91453,9980
$M_2 \cdot 10^{-6}$	(1086,26715090 ± 0,00025)	1086,2659601	1086,2683628
$\tilde{\gamma}$ [градуси]	170°,619988 ± 0,000005	170°,619387	170°,6208506
$(C - B)/(C - A)$	0,9933145389 ± 0,0000004	0,9933136846	0,9933157663
$(B - A)/(C - A)$	0,006685461124 ± 0,0000005	0,0066842337	0,0066863154

Тепер визначаючи параметри, пов'язані з $\dot{\bar{A}}_{20} = -0,7461 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$ (табл. 1, розв'язок III) лінійною залежністю $\delta F(t) = \dot{F}(t - t_0)$, де $\dot{F} = \frac{dF(t)}{dt}$ вибирають в епоху t_0 , деякі зміни з часом у межах лінійної моделі $\delta F(t) = \dot{F}(t - t_0)$ протягом 27,5 року (з 1992

до 2020 рр. включно) наведено в табл. 4, за припущення, що параметр $q = \text{const}$. Табл. 3 та табл. 4 містять коефіцієнти α , β , γ динамічних рівнянь Ейлера (Moritz and Muller, 1987) і полярні f та екваторіальні f_e стиснення та їх довгострокові варіації.

Таблиця 4

Довгострокові варіації деяких астрономічних та геодезичних параметрів на основі довгохвильового дрейфу коефіцієнтів $\bar{A}_{20} \approx \bar{C}_{20}$ та \bar{A}_{22} ($t_0 = 2000$)

Параметр	Довгострокові зміни $\dot{F} = \frac{dF}{dt}$
$\bar{A}_{20} \approx \bar{C}_{20}$	$\dot{\bar{A}}_{20} = -0,7461 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
\bar{A}_{22}	$\dot{\bar{A}}_{22} = 0,4316 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
H_D	$\dot{H}_D = -\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} \frac{\text{Trace}(\mathbf{I})}{3C^2} = 5,0339 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
p_A	$\dot{p}_A = \dot{H}_D / \frac{\delta H_D}{\delta p_A} = 0,023 \text{ ''/cy}^2$
A	$\dot{A} = \sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} = -1,668 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
B	$\dot{B} = \sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} = -1,668 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
C	$\dot{C} = -2\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} = 3,337 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
$\alpha = \frac{C-B}{A}$	$\dot{\alpha} = -\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} (C-B+3A)}{3A^2} = 5,067 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
$\beta = \frac{C-A}{B}$	$\dot{\beta} = -\frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} (C-A+3B)}{3B^2} = 5,067 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
$\gamma = \frac{B-A}{C}$	$\dot{\gamma} = \frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} (B-A)}{3C^2} = -3,692 \cdot 10^{-16} \text{ yr}^{-1}$
$\sigma_E = \frac{C-A}{A} \omega$	$\dot{\sigma}_E = \frac{\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20} \cdot (2A+C)}{3A^2} \omega = -5,0671 \cdot 10^{-11} \omega \text{ yr}^{-1}$
f	$\dot{f} = -\frac{3\sqrt{5} \dot{\bar{A}}_{20}}{2} = 2,5025 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$
f_e	$\dot{f}_e = \sqrt{15} \dot{\bar{A}}_{22} = 1,6718 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$

Серед параметрів табл. 4 всі довгострокові зміни мають той самий порядок, що і варіація $\dot{\bar{A}}_{20}$, за винятком $\dot{\gamma}$ і \dot{p}_A . Відповідно до (Williams, 1994) варіація \dot{p}_A , що називається також \dot{J}_2 – швидкістю прецесії з діапазоном (від $-11,6$ до $-16,8$) $\times 10^{-3}$ ["/cy²], залежить від прийнятого $\dot{J}_2 = -\sqrt{5} \dot{\bar{C}}_{20}$. Williams' \dot{J}_2 – швидкість прецесії $\dot{p}_A = -0.014$ ["/cy²], визначена

у 1994 р., відповідає $\dot{\bar{C}}_{20} = 1,3416 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$ і відрізняється від вказаної у табл. 4 через протилежний знак та значення $\dot{p}_A = 0,023$ ["/cy²]. Зазначено, що велику аномалію у часових рядах \bar{C}_{20} виявлено (Cox, Chao, 2002). Така аномалія призводить до стрибка приблизно в околі 1998 р. і зміни знака дрейфу \bar{C}_{20} протягом 1998–2002 р. (див. рис. 1). Звідси отримуємо протилежний знак щодо результатів Williams та інших

параметрів, наведених у табл. 4 (див. також Marchenko, 2009a). Це нове значення $\dot{p}_A = 0,023$ ["/cy²] потребує додаткового обговорення з огляду на теорію обертання Землі, що виходить за межі цієї статті.

Отже, можливі величини протягом 50–100 років у зміні параметрів з табл. 4, зокрема варіації $\dot{\sigma}_E$ у частоті Ейлера σ_E , недостатньо очевидні через різну поведінку з часом їх лінійного дрейфу, ураховуючи зміну знака для різних ефектів. Точність цих параметрів – подібні значення або менші, ніж невизначеність H_D . Отже, середні значення $\dot{\alpha}$ і $\dot{\beta}$ можуть бути врахованими у теорії прецесії-нутації, з огляду на загальну теорію (Moritz and Muller, 1987) для Землі, що змінюється у часі.

Розподіл густини 3D, що відповідає різному в часі інерційному тензору Землі

Визначення розподілу густини планети $\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ на основі зовнішнього гравітаційного потенціалу планети потребує вирішення відомої оберненої проблеми ньютонівського потенціалу, де ρ – відносна відстань ($0 \leq \rho \leq 1$) від початку до внутрішньої поточної точки; ϑ і λ – полярна відстань і довгота цієї точки.

Якщо гравітаційна потенційна енергія планети E (Rubincam, 1979; Moritz, 1990; Marchenko, 2009b) та густина на її поверхні відомі, як додаткова інформація, ця проблема перетворюється з некоректно поставленої (за Hadamar) на коректно поставлену (за Тихоновим) проблему з можливим рішенням для тривимірного розподілу густини через 3D моменти густини (Mescheryakov, 1991).

Нижче віддамо перевагу застосуванню A_{20} , A_{22} і H_D для 3D моделі розподілу густини $\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ всередині Землі, який отримали (Mescheryakov, Deineka, 1977) та модифікував (Marchenko, 2009b), для еліпсоїда обертання з полярним стисненням f і великою піввіссю a , враховуючи, що модель є точним (обмеженим порядком 2) розв'язанням задачі 3D-декартових моментів для $\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ у такій формі

$$\delta(\rho, \vartheta, \lambda) = \delta(\rho)_R + \Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda), \quad (17)$$

де $\delta(\rho)_R$ є кусково-неперервною референсною моделлю радіальної густини з такими стрибками густини, як модель PREM (Dziewonski and Anderson, 1981):

$$\Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda) = \Delta K + \rho^2(\Delta K_1 \sin^2 \vartheta \cos^2 \lambda + \Delta K_2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \lambda + \Delta K_3 \cos^2 \vartheta), \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= \frac{5}{4} \delta_m [5\Delta I_{000} - 7(\Delta I_{200} + \Delta I_{020} + \frac{\Delta I_{002}}{\chi^2})], \\ \Delta K_1 &= \frac{35}{4} \delta_m (3\Delta I_{200} + \Delta I_{020} + \frac{\Delta I_{002}}{\chi^2} - \Delta I_{000}), \\ \Delta K_2 &= \frac{35}{4} \delta_m (\Delta I_{200} + 3\Delta I_{020} + \frac{\Delta I_{002}}{\chi^2} - \Delta I_{000}), \\ \Delta K_3 &= \frac{35}{4} \delta_m (\Delta I_{200} + \Delta I_{020} + 3\frac{\Delta I_{002}}{\chi^2} - \Delta I_{000}), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta I_{000} &= I_{000} - I_{000}^R, & \Delta I_{200} &= I_{200} - I_{200}^R, \\ \Delta I_{020} &= I_{020} - I_{020}^R, & \Delta I_{002} &= I_{002} - I_{002}^R. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Після введення $\chi = 1 - f$ механічні параметри в рівняннях (19) виражаються через безрозмірні декартові моменти густини $\tilde{\delta}$

тіла, що гравітує (див. визначення у Grafarend et al., 2000), обмежені тут порядком $n = p + q + r = 2$:

$$I_{pqr}(\tilde{\delta}) = \frac{1}{MR^n} \int_{\tau} \tilde{\delta} x^p y^q z^r d\tau, \quad (p + q + r = n), \quad (21)$$

де x, y, z – декартові координати внутрішньої точки; $d\tau$ – об’ємний елемент еліпсоїда обертання. I_{pqr} – значення моментів для $n=2$ можна

$$I_{000} = 1, \quad I_{200} = \frac{B+C-A}{2}, \quad I_{020} = \frac{A-B+C}{2}, \quad I_{002} = \frac{A+B-C}{2}, \quad (22)$$

припускаючи ($I_{100} = I_{010} = I_{001} = 0$). Референсна модель $\delta(\rho)_R$ містить індивідуальну інформацію про стрибки густини, середню

обчислити за допомогою маси Землі та безрозмірних головних моментів інерції A, B і C виражених через (1):

густину δ_m^R , і середній момент інерції I_m^R вибрано попередньо для конструкції радіального профілю $\delta(\rho)_R$:

$$\left. \begin{aligned} I_{000}^R &= \frac{\delta_m^R}{\delta_m}, & I_{200}^R = I_{020}^R &= \frac{3I_m^R \delta_m^R}{2\delta_m(\chi^2+2)}, & I_{002}^R &= \frac{3 \cdot \chi^2 I_m^R \delta_m^R}{2 \cdot \delta_m(\chi^2+2)}, \\ \delta_m^R &= 3 \int_0^1 \delta(\rho)_R \rho^2 d\rho, & I_m^R &= \frac{2(\chi^2+2)}{3\delta_m^R} \int_0^1 \delta(\rho)_R \rho^4 d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

На відміну від (Mescheryakov, Deineka, 1977), моменти $I_{000}^R, I_{200}^R, I_{020}^R$ і I_{002}^R референсної густини $\delta(\rho)_R$ отримано для одного загального набору загальноприйнятих середньої густини δ_m і середнього моменту інерції I_m моделі (17) і стрибків густини в $\delta(\rho)_R$. Отже, така тривимірна глобальна густина (17) подана тут в

системі головних осей і узгоджена з масою Землі та H_D , головними моментами інерції для збереження гравітаційного потенціалу від нульового до другого ступеня, геометричним стисненням f і стрибками густини. Рис. 4 демонструє аномалії густини $\Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ на межі мантиї/кори ($r=6346,6$ km).

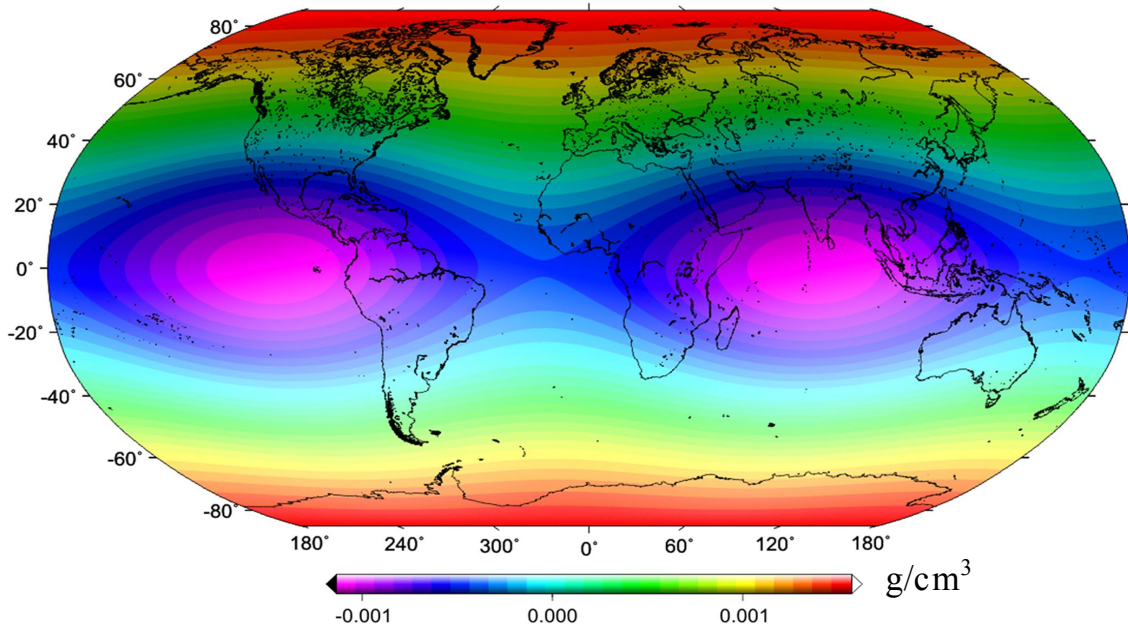


Рис. 4. Аномалії густини $[\text{g/cm}^3]$ $\Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ на межі мантия/кора ($r=6346,6$ km)

Радіальна густина $\delta(\rho)_R$ також вважається заданою в еліпсоїді обертання, якщо використовуємо формулу

$$r_e = R(1 - 2f \cdot P_2(\cos \vartheta) / 3)$$

для радіуса r_e (Moritz, 1990), де $P_2(\cos \vartheta)$ – поліном Лежандра другого степеня.

Рівняння (17)–(19) справедливі саме для гомотетичної стратифікації, коли $f = const$ всередині еліпсоїдальної Землі.

$$\tilde{r}_e = r \left[1 - \frac{2}{3} f \cdot P_2(\cos \vartheta) \right] \Rightarrow \rho = \frac{r}{R} = \frac{\tilde{r}_e}{r_e}. \quad (24)$$

За допомогою усереднення $\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$

$$\left. \begin{aligned} \delta(\rho) &= \delta(\rho)_R + [\Delta K + \rho^2 \Delta D], \\ \Delta D &= \frac{35}{12} \delta_m \left[5 \left(\Delta I_{200} + \Delta I_{020} + \frac{\Delta I_{002}}{\chi^2} \right) - 3 \Delta I_{000} \right], \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

із трактуванням референцної густини $\delta(\rho)_R$ всередині еліпсоїдальної Землі. Оскільки відносний радіус ρ є постійним для кожного \tilde{r}_e , то радіальні густини $\delta(\rho)_R$ і $\delta(\rho)$ також постійні за рівняннями (25) на поверхні (24) еліпсоїда обертання.

Отже, якщо набір внутрішніх еліпсоїдальних поверхонь \tilde{r}_e позначено відповідним середнім радіусом r сфери, отримуємо

по еліпсоїдальних поверхнях, одержимо тепер кусково-радіальну густину як

Тепер нагадаємо, що прийняту модель (18) для $\Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ виведено з рівнянь (19) та (22), де головні моменти інерції $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ залежать від часу. В результаті до 3D-моделі для $\Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda)$ потрібно додати 4D-член $\Delta'\delta(\rho, \vartheta, \lambda, t)$ із залежними від часу параметрами в рівняннях (19) та (22). З рівнянь (22), (19) та (1) отримуємо

$$\Delta'K = \frac{35dC\delta_m}{4}, \quad \Delta'D = -\frac{175dC\delta_m}{12}, \quad \Delta'K_1 = \Delta'K_2 = \frac{35dC\delta_m}{2}, \quad \Delta'K_3 = \frac{35dC\delta_m}{4}, \quad (26)$$

де з урахуванням рівняння (7) dC – зміна з часом полярного моменту інерції

$$dC = -\frac{2\sqrt{5}d\bar{A}_{20}(t)}{3} = -\frac{2\sqrt{5}}{3} \left(\dot{\bar{A}}_{20}(t-t_0) + \ddot{\bar{A}}_{20}(t-t_0)^2 \right). \quad (27)$$

Підстановка рівнянь (4), (7) та сум $A(t) = A + dA$, $B(t) = B + dB$, $C(t) = C + dC$ (де A , B , C – статичні компоненти тензора інерції на епоху t_0) в рівняннях (19)–(22) дає після алгебра-

їчних перетворень часові зміни параметрів $\Delta'K$, $\Delta'D$, $\Delta'K_1$, $\Delta'K_2$ і $\Delta'K_3$ моделі густини (17)–(18). В результаті рівняння (17)–(18) для розподілу густини 3D можна записати у такій формі

$$\delta(\rho, \vartheta, \lambda) = \delta(\rho)_R + \Delta\delta(\rho, \vartheta, \lambda) + \Delta'\delta(\rho, \vartheta, t), \quad (28)$$

$$\Delta'\delta(\rho, \vartheta, t) = \frac{35dC \cdot \delta_m}{4} [\rho^2 (\sin^2 \vartheta + 1) - 1] = -\frac{35\sqrt{5}d\bar{A}_{20}(t) \cdot \delta_m}{6} [\rho^2 (\sin^2 \vartheta + 1) - 1]. \quad (29)$$

У випадку одновимірної моделі густини, заданої рівняннями (25), отримуємо

$$\delta(\rho) = \delta(\rho)_R + [\Delta K + \rho^2 \Delta D] + [\Delta'K + \rho^2 \Delta'D], \quad \Delta'D = \frac{35 \cdot \sqrt{5} d\bar{A}_{20} \cdot \delta_m}{6} [3 - 5\rho^2]. \quad (30)$$

Усі п'ять параметрів $\Delta'K$, $\Delta'D$, $\Delta'K_1$, $\Delta'K_2$ і $\Delta'K_3$ прямо залежать від dC і $d\bar{A}_{20}(t)$ на основі (26). Звідси за рівняннями (26) та (25) одержуємо після простих маніпуляцій внесок, який залежить від часу $\Delta'\delta(\rho, \vartheta, t)$ у вигляді (29) та (30) для цих моделей густини, оскільки

система координат $O\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ вважається незмінною. Тут залежність від довготи λ скасовується, але час t приховано в рівнянні (27).

Оскільки член $\Delta'K$ постійно впливає на всю Землю, це дає змогу застосувати відносну характеристику внеску

$$\Delta' \tilde{\delta}(\rho, \vartheta, t) = \Delta' \delta(\rho, \vartheta, t) - \Delta' K,$$

що відповідає моделі Роша

$$\Delta \delta'(t) = \Delta' K + \rho^2 \Delta' D \text{ без } \Delta' K.$$

Оскільки на поверхні Землі $\rho = 1$, в цьому випадку функція, що залежить від часу $\Delta' \tilde{\delta}$, буде

$$\frac{\Delta' \tilde{\delta}}{\Delta' \tilde{\delta}_s} = \frac{\Delta' \tilde{\delta}_s(\rho, \vartheta, t)}{\Delta' \tilde{\delta}_s(\vartheta, t)} = \frac{\Delta' \tilde{\delta}(\rho, t)}{\Delta' \tilde{\delta}_s(t)} = \rho^2, \quad (\Rightarrow \Delta' \tilde{\delta} = \rho^2 \cdot \Delta' \tilde{\delta}_s), \quad (31)$$

де залежності від ϑ і t скасовуються. Цей параметр (31) виражає відносну характеристику зміни густини вздовж радіального профілю. Насправді квадратична функція $\Delta' \tilde{\delta} / \Delta' \tilde{\delta}_s = \rho^2$ відображає однаковий постійний вплив у епоху t незалежно від розглянутого радіального профілю і дає змогу оцінити відносний внесок змін густини в межах моделі (31). Отже, середні значення цього співвідношення (31), визначені в межах основних оболонок Землі, такі: a – земна кора – 99,6 %; b – верхня мантія – 89,5 %; c – нижня мантія – 52,9 %; d – зовнішнє ядро – 14,7 %; e – внутрішнє ядро – 1,2 %. Отже, у межах прийнятої моделі (28), (29) (за винятком постійного впливу $\Delta' K$) ми прийшли до великого внеску (31) всередині земної кори як найтоншого шару планети, що становить лише 0,4 % від загальної маси Землі.

Висновки

Отже, перевірку наближених формул для моделювання залежної від часу астрономічної динамічної еліптичності $H_D(t)$, що зафіксована на епоху $t_0 = J2000$ ($H_D = 3.27379448 \times 10^{-3}$), забезпечено додатковою оцінкою кожного параметра ряду Тейлора.

Потенціал (10) гравітаційного квадруполя V_2 згідно з теорією Максвелла (Maxwell, 1881) використано для нових точних формул (16) орієнтації головних осей \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} через положення двох квадрупольних осей \mathbf{h}_1 і \mathbf{h}_2 , завжди розміщених у площині \bar{A} і \bar{C} .

Довгострокові зміни $d\bar{A}_{20}$ виявлено з UT/CSR розв'язків $\bar{C}_{20}(t)$ протягом часового інтервалу 1976–2020 рр. Основну модель довгострокових варіацій розв'язків UT/CSR для $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ визначено упродовж 1992–2020 рр. Проста різниця між \bar{C}_{20} і \bar{A}_{20} , взятими в різних системах, становить $\approx 2 \cdot 10^{-15}$. Це менше, ніж часові зміни в \bar{C}_{20} або \bar{A}_{20} , що характеризує якість досліджуваних рішень UT/CSR та стабільність системи головних осей.

незалежною від $0 \leq \rho \leq 1$. Після введення допоміжних функцій $\Delta' \tilde{\delta}_s(\vartheta, t) = \Delta' \tilde{\delta}_s(1, \vartheta, t)$ і $\Delta' \tilde{\delta}_s(t) = \Delta' \tilde{\delta}_s(1, t)$, подаючи (29) та (30) без $\Delta' K$. Отже, в обох випадках отримуємо

Основні параметри Землі, зокрема головні осі та головні моменти інерції, обчислено у кожен момент часу протягом інтервалу 27,5 року. Зауважимо, що лінійна зміна значень всіх розглянутих 20 параметрів недостатньо очевидна через різну поведінку з часом їх лінійного дрейфу, ураховуючи зміну знака для різних ефектів на різних часових інтервалах через стрибок часових рядів $\bar{C}_{20}(t)$ протягом 1998–2002 рр. Точність цих параметрів – значення подібні або менші, ніж невизначеність H_D . Наприклад, полярне стиснення Землі f збільшується протягом другого інтервалу часу, хоча (Yoder et al., 1983) та інші автори виявили зменшення f .

Модель 3D-густини Землі, подана обмеженим рішенням 3D-моментів густини всередині еліпсоїда обертання, отримано через три головні моменти інерції як астрономо-геодезичну інформацію у кожен момент часу, зокрема референційний радіальний профіль за сейсмічними даними, що розглядається як точна складова. В результаті така модель дає змогу зберегти залежний від часу зовнішній гравітаційний потенціал від нульового до другого степеня, динамічну еліптичність, полярне стиснення, головні радіальні стрибки густини за зразком моделі PREM та довгострокові варіації у просторі-часі розподілу густини. Важливо зазначити, що в межах розв'язання оберненої задачі залежність від часу в тензорі інерції Землі виникає внаслідок зміни густини Землі, але не залежить від зміни її форми, що підтверджується рівняннями (26) та (29), де стиснення не враховано.

Список літератури

- Bourda, G., & Capitaine, N. (2004). Precession, nutation, and space geodetic determination of the Earth's variable gravity field. *Astronomy & Astrophysics*, 428(2), 691–702. DOI: 10.1051/0004-6361:20041533
- Bullard, E. C. (1954). The interior of the Earth. In: *The Earth as a Planet* (G.P. Kuiper, ed). Univ. of Chicago Press, 57–137.
- Bullen, K. E. (1975). *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London.

- Burša, M., Groten E., & Šima, Z. (2008). Steady Change in Flattening of the Earth: The Precession Constant and its Long-term Variation. *The Astronomical Journal*, 135(3):1021–1023, doi.org/10.1088/0004-6256/135/3/1021
- Capitaine N., Wallace, P. T., & Chapront, J. (2003). Expressions for IAU 2000 precession quantities. *Astronomy & Astrophysics*, 412(2), 567–586. DOI: 10.1051/0004-6361:20031539
- Capitaine, N., Mathews, P. M., Dehant, V., Wallace, P. T., & Lambert, S. B. (2009). On the IAU 2000/2006 precession–nutations and comparison with other models and VLBI observations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 103(2), 179–190, DOI 10.1007/s10569-008-9179-9
- Cheng, M. K., Eanes, R. J., Shum, C. K., Schutz, B. E., & Tapley, B. D. (1989). Temporal variations in low degree zonal harmonics from Starlette orbit analysis. *Geophysical Research Letters*, 16(5), 393–396.
- Chen, W., & Shen, W. (2010). New estimates of the inertia tensor and rotation of the triaxial nonrigid Earth. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115: B12419. doi:10.1029/2009JB00709
- Chen, W., Li, J. C., Ray, J., Shen, W. B., & Huang, C. L. (2015). Consistent estimates of the dynamic figure parameters of the earth. *Journal of Geodesy*, 89(2), 179–188. DOI 10.1007/s00190-014-0768-y
- Cheng, M., & Tapley, B. D. (2004). Variations in the Earth's oblateness during the past 28 years. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109, B09402, doi:10.1029/2004JB003028, 2004.
- Cheng, M., Ries, J. C., & Tapley, B. D. (2011). Variations of the Earth's figure axis from satellite laser ranging and GRACE. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 116. B01409, doi:10.1029/2010JB000850.
- Cheng, M., Tapley, B. D., & Ries, J. C. (2013). Deceleration in the Earth's oblateness. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 118(2), 740–747, doi:10.1002/jgrb.50058.
- Cheng, M., & Ries, J. (2017). The unexpected signal in GRACE estimates of C20. *Journal of Geodesy*, 91(8), 897–914. DOI 10.1007/s00190-016-0995-5
- Cox, C. M., & Chao, B. F. (2002). Detection of a large-scale mass redistribution in the terrestrial system since 1998. *Science*, 297(5582), 831–833.
- Darwin, G. H. (1883). IV. On the figure of equilibrium of a planet of heterogeneous density. *Proceedings of the Royal Society of London* 36(228-231), 158–166.
- Dehant, V. et al. (1999). Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 72, pp. 245–309.
- Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. (1981). Preliminary reference Earth model. *Physics of the earth and planetary interiors*, 25(4), 297–356.
- Fukushima, T. (2003). A new precession formula. *The Astronomical Journal*, 126(1), 494–534.
- Grafarend, E., Engels, J., & Varga, P. (2000). The temporal variation of the spherical and Cartesian multipoles of the gravity field: the generalized MacCullagh representation. *Journal of Geodesy*, 74(7–8), 519–530
- Groten, E. (2004). Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy, and geodynamics. *Journal of Geodesy*, 77, 724–797, doi:10.1007/s00190-003-0373-y
- IERS Standards (1989). (IERS Technical Note; 3). Chapter 14: Radiation Pressure Reflectance Model. Paris: Central Bureau of IERS-Observatoire de Paris.
- Liu, J. C., & Capitaine, N. (2017). Evaluation of a possible upgrade of the IAU 2006 precession. *Astronomy & Astrophysics*, 597, A83. DOI: 10.1051/0004-6361/201628717
- Lambeck, K. (1971). Determination of the Earth's pole of rotation from laser range observations to satellites. *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, 101(1), 263-281.
- Marchenko A.N. (1979). The gravitational quadrupole of a planet. Letters in Soviet Astronomical Journal, No 5, 198–200.
- Marchenko A.N. (1998) *Parameterization of the Earth's gravity field. Point and line singularities*. Lviv Astronomical and Geodetic Society, Lviv.
- Marchenko, A. N. (2000). Earth's radial density profiles based on Gauss' and Roche's distributions. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, 59(3), 201–220.
- Marchenko, A. N., & Abrikosov, O. A. (2001). Evolution of the Earth's principal axes and moments of inertia: The canonical form of solution. *Journal of Geodesy*, 74(9), 655–669.
- Marchenko A. N. (2003) A note on the eigenvalue-eigenvector problem. In: Festschrift dedicated to Helmut Moritz on his 70th birthday. (Ed. N. Kühtreiber) Institute for Geodesy, Graz University of Technology. Graz (Austria) 2003. pp. 143–152.
- Marchenko, A. N., & Schwintzer, P. (2003). Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions. *Journal of geodesy*, 76(9–10), 495–509.
- Marchenko, A. N. (2009a). Current estimation of the Earth's mechanical and geometrical parameters. In: M. G. Sideris (ed.), *Observing our Changing Earth*. International Association of Geodesy Symposia 133. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 473–481
- Marchenko A. N. (2009b) The Earth's global density distribution and gravitational potential energy. In: M. G. Sideris (ed.), *Observing our Changing*

- Earth*, International Association of Geodesy Symposia 133. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 483–491.
- Marchenko, A. N., & Lopushansky, A. N. (2018). Change in the Zonal Harmonic Coefficient C₂₀, Earth's Polar Flattening, and Dynamical Ellipticity from SLR Data. *Geodynamics*, 2(25), 5–14. (<http://dx.doi.org/10.4401/ag-7049>) Published by Lviv Polytechnic National University – ISSN: 1992-142X (Print), 2519-2663 (Online), Lviv, Ukraine
- Mathews, P. M., Herring, T. A., & Buffett, B. A. (2002). Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 107(B4), 10.1029/2001JB000390.
- Maxwell, J. K. (1881). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 2nd Edition, Oxford, Vol. 1, 179–214.
- Mescheryakov, G. A. (1991). Problems of the potential theory and generalized Earth. Nauka, Moscow, 203 p. (in Russian)
- Mescheryakov, G. A., & Deineka, J. P. (1977). A variant of the Earth's mechanical model. *Geofizikalni Sbornik. XXV, Travaux de l'Inst. Géophysique de l'Académie Tchecoslovaque des Science*, No. 478, pp. 9–19.
- Moritz, H. (1990). *The Figure of the Earth. Theoretical Geodesy and Earth's Interior*, Wichmann, Karlsruhe.
- Moritz, H. & I. I. Muller (1987). *Earth Rotation. Theory and observation*, Ungar, New York.
- Melchior, P. (1978). *The tides of the planet Earth*. Pergamon.
- Petit, G., & Luzum, B (eds) (2010). *IERS conventions (2010)*, IERS Technical Notes 36. Observatoire de Paris, Paris.
- Rochester, M. G., & Smylie, D. E. (1974). On changes in the trace of the Earth's inertia tensor. *Journal of Geophysical Research*, 79(32), 4948–4951.
- Rubincam, D. P. (1984). Postglacial rebound observed by LAGEOS and the effective viscosity of the lower mantle. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 89(B2), 1077–1087.
- Schwintzer, P., Reigber, C., Massmann, F. H., Barth, W., Raimondo, J. C., Gerstl, M., ... & Lemoine, J. M. (1991). A new Earth gravity field model in support of ERS 1 and SPOT2: GRIM4-S1/C1., final report. *German Space Agency and French Space Agency., Munich/Toulouse*.
- Souchay, J., & Folgueira, M. (1998). The Effect Of Zonal Tides On The Dynamical Ellipticity Of The Earth And Its Influence On The Nutation. *Earth, Moon, and Planets*, 81(3), 201–216.
- Williams, J. G. (1994). Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation. *The Astronomical Journal*, 108, 711–724.
- Yoder, C. F., Williams, J. G., Dickey, J. O., Schutz, B. E., Eanes, R. J., & Tapley, B. D. (1983). Secular variation of Earth's gravitational harmonic J₂ coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation. *Nature*, 303(5920), 757–762.

A. N. MARCHENKO, S. S. PERII, Z. R. TARTACHYNSKA, A. P. BALIAN

Lviv Polytechnic National University, Institute of Geodesy, 6, Karpinskoho, Str, Lviv, 79013, Ukraine, e-mail: march@pancha.lviv.ua, periy_ss@ukr.net, zrtartachynska@yahoo.com

TEMPORAL CHANGE IN THE EARTH'S TENSOR OF INERTIA AND THE 3D DENSITY MODEL BASED ON THE UT/CSR DATA

This study aims to derive the Earth's temporally varying Earth's tensor of inertia based on the dynamical ellipticity $H_D(t)$, the coefficients $\bar{C}_{2m}(t)$, $\bar{S}_{2m}(t)$ from UT/CSR data. They allow to find the time-varying Earth's mechanical and geometrical parameters during the following periods: (a) from 1976 to 2020 based on monthly and weekly solutions of the coefficient \bar{C}_{20} ; (b) from 1992 to 2020 based on monthly and weekly solutions of the non zero coefficients $\bar{A}_{20}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ related to the principal axes of inertia, allowing to build models their long-term variations. Differences between \bar{C}_{20} and \bar{A}_{20} given in various systems consist of the average value $\approx 2 \cdot 10^{-15}$, which is smaller than time variations of \bar{C}_{20} or \bar{A}_{20} and characterizes a high quality of UT/CSR solutions. Two models for the time-dependent dynamical ellipticity $H_D(t)$ were constructed using long-term variations for the zonal coefficient $\bar{A}_{20}(t)$ during the past 44 and 27.5 years. The approximate formulas for the time-dependent dynamical ellipticity $H_D(t)$ was provided by the additional estimation of each

parameter of the Taylor series, fixing $H_D = 3.27379448 \times 10^{-3}$ at epoch $t_0 = J2000$ according to the IAU2000/2006 precession-nutation theory. The potential of the time-dependent gravitational quadrupole V_2 according to Maxwell theory was used to derive the new exact formulas for the orientation of the principal axes \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} via location of the two quadrupole axes. Hence the Earth's time-dependent mechanical and geometrical parameters, including the gravitational quadrupole, the principal axes and the principal moments of inertia were computed at each moment of time during the past 27.5 years from 1992 to 2020. However, their linear change in all considered parameters are rather unclear because of its various behavior on different time-intervals including variations of a sign of the considered effects due to a jump in the time-series $\bar{C}_{20}(t)$ during the time-period 1998–2002. The Earth's 3D and 1D density models given by the restricted solution of the 3D Cartesian moments inside the ellipsoid of revolution were derived with conditions to conserve the time-dependent gravitational potential from zero to second degree, the dynamical ellipticity, the polar flattening, basic radial jumps of density as sampled for the PREM model, and the long-term variations in space-time mass density distribution. It is important to note that in solving the inverse problem, the time dependence in the Earth's inertia tensor arises due to changes in the Earth's density, but does not depend on changes in its shape, which is confirmed by the corresponding equations where flattening is canceled.

Key words: Time dependence in principal axes and moments of inertia, dynamical ellipticity, gravitational quadrupole.

Надійшла 23.08.2020 р.