

МЕТОДИКА НАБЛИЖЕНОЇ ПОБУДОВИ ТРИВИМІРНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ МАС ТА ЇЇ ГРАДІЄНТА ДЛЯ НАДР ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ

Мета. Створити алгоритм побудови тривимірної функції розподілу мас планети та її похідних з урахуванням стоксових сталих довільних порядків. Спираючись на цей алгоритм, виконати дослідження внутрішньої будови Землі. **Методика.** Похідні неоднорідного розподілу мас подають лінійними комбінаціями біортогональних многочленів, коефіцієнти яких отримують із системи рівнянь. Ці рівняння одержують інтегральними перетвореннями стоксових сталих, а процес обчислень здійснюється послідовним наближенням і за початкове наближення беремо одновимірну модель густини, узгоджену зі стоксовими сталими до другого порядку включно. Далі визначаємо коефіцієнти розкладу потенціалу до третього, четвертого і т.д. порядків, аж до наперед заданого порядку. Зведення степеневих моментів густини до поверхневих інтегралів дає можливість аналізувати та контролювати ітераційний процес. **Результати.** Результати обчислень одержано з використанням програмного продукту за описаним алгоритмом. Отримані достатньо високий ступінь апроксимації (шостого порядку) тривимірних розподілів, та створені картосхеми за врахованими значеннями відхилень тривимірних розподілів від середнього (“ізоденси”) дають доволі детальну картину внутрішньої будови Землі. Наведені карти “неоднорідностей” на характерних глибинах (2891 км ядро–мантія, 5150 км внутрішнє–зовнішнє ядро) дають підстави зробити попередні висновки про глобальні переміщення мас. Значущою для інтерпретації є інформація про похідні. Насамперед можна наголосити, що градієнт “неоднорідностей” спрямований до центра мас. Подані проєкції цього градієнта на площину, перпендикулярно до осі обертання (горизонтальної площини), відображають тенденцію просторових переміщень. **Наукова новизна.** Векторграми градієнта в сукупності із картосхемами дають ширше уявлення про динаміку ймовірного переміщення мас всередині планети та можливі механізми, що їх спричиняють. Ці дослідження певною мірою підтверджують явище гравітаційної конвекції мас. **Практична значущість.** Запропонований алгоритм можна використовувати для побудови регіональних моделей планети, а числові результати – для інтерпретації глобальних та локальних геодинамічних процесів всередині та на поверхні Землі.

Ключові слова: потенціал; градієнт; гармонічна функція; Земля; модель розподілу мас; стоксові сталі.

Вступ

Просторові моделі густини мас надр Землі формують уявлення про її тривимірне зовнішнє гравітаційне поле, тому використання параметрів гравітаційного поля для дослідження внутрішньої структури Землі обґрунтоване.

Створені в геофізиці радіальні моделі розподілу надр планети передбачають використання стоксових сталих нульового та другого порядків (маса, момент інерції) (Мещеряков, Фыс, 1990). Залучення параметрів гравітаційного поля вищих порядків породжує методику побудови тривимірних моделей, основою яких є послідовні наближення. За початкове значення беруть тривимірну модель густини (Мещеряков, Фыс, 1986), яка узгоджена зі стоксовими сталими до другого порядку включно та відповідає одній зі стандартних моделей, наприклад, PREM (Dziewonski & Anderson, 1981). Далі вираховують коефіцієнти розкладу потенціалу до визначеного порядку

(Мещеряков, Фыс, 1986). Створена у такий спосіб модель доволі детально відображає внутрішню структуру планети (Мещеряков, Фыс, 1990).

Враховуючи ефективність такого підходу (Мещеряков та ін. 1986, Мещеряков та ін. 1990), варто застосувати його для визначення гравітаційного поля не тільки самої функції розподілу мас, але і її похідних. У цій роботі виконано спробу такої реалізації. Запропонований метод також наближений, проте ітераційний процес частково зводиться до контрольованих величин (степеневих моментів густини, визначених на поверхні планети), що дає можливість аналізувати процес наближення. Побудована надалі за допомогою запропонованого методу функція розподілу мас інформативніша та детальніше описує розподіл мас планети, бо використання даних у наведеному методі збільшує порядок апроксимації за рахунок можливості відновлення розподілу мас надр планети за її похідними, на відміну від побудови

тільки функції густини (Мещеряков та ін. 1986). Тому отримана функція розподілу мас за наведеною методикою із залученням навіть stokсових сталих до другого порядку включно дає детальнішу картину розміщення аномалій густини (відхилення тривимірної функції від усередненої по сфері – “ізоденс”) порівняно з “неоднорідностями”, отриманими з використанням рівності (1) за тими самими даними (Fys, Brydun & Yurkiv, 2018). Картографи для похідних дають додаткову інформацію про можливі механізми перерозподілу мас всередині планети.

Мета

Створити алгоритм побудови тривимірної функції розподілу мас планети та її похідних з урахуванням stokсових сталих довільних порядків. Спираючись на цей алгоритм, виконати дослідження внутрішньої будови Землі.

Методика роботи

1. Теоретичні основи наближеного методу побудови градієнта та функції розподілу надр мас еліпсоїдальної планети.

Наближений метод побудови тривимірних моделей густини Землі, який враховує stokсові сталі до заданого порядку та особливості внутрішньої структури, запропонував Г. А. Мещеряков (Мещеряков, 1975; Мещеряков, Фис, 1981). Суть цього методу полягає у поданні зображення кусково-неперервної функції розподілу за допомогою ортогональних систем (пізніше біортогональних $\{W_{mnk}\}, \{\omega_{mnk}\}$) многочленів трьох змінних в еліпсоїді $\tau : \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 \right\}$, а саме:

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^N b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

де $\delta^0(\rho)$ – сферично-симетрична радіальна модель, наприклад, PREM (Dziewonski & Anderson, 1981).

Коефіцієнти b_{mnk} розкладу (1) визначають так:

$$b_{mnk} = \frac{\int_{\tau} \delta \omega_{mnk} d\tau}{\int_{\tau} \omega_{mnk} W_{mnk} d\tau} \quad (2)$$

і є лінійною комбінацією таких величин (степеневих моментів функції розподілу мас надр планети):

$$I_{pqs} = \frac{1}{Ma_e^t} \int_{\tau} x_1^p x_2^q x_3^s \delta d\tau \quad (p+q+s=t), \quad (3)$$

де M – маса планети; a_e – екваторіальний радіус Землі.

Побудова функції густини надр планети з використанням stokсових сталих вищих порядків можлива лише наближено і детально описана в роботах (Мещеряков, 1990; Мещеряков та ін. 1986), в яких питання оцінки степеня достовірності визначальних величин не розглянуто. Тому виникає потреба в методиці, що дає змогу аналізувати процес обчислень та об’єктивно оцінювати достовірність побудови функції розподілу густини. Також, поряд з визначенням функції розподілу мас, виникає потреба у визначенні її похідних, що в геофізиці озвучується як вивчення градієнта чи закону швидкості зростання (спадання) розподілу мас. Спробу такої побудови зроблено в роботі (Черняга, Фис, 2012), де задачу зведено до контрольованих величин (поверхневих інтегралів). Це зведення виконали, перейшовши до побудови не самої функції, а її похідних, які подано так:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{1}{a_e^{t-m+n+k=0}} \sum^N a_{mnk}^i W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad (4)$$

де $i=1, 2, 3$. За відомими коефіцієнтами a_{mnk}^i можна встановити вигляд самої функції (Фис та ін., 2018).

Коефіцієнти розкладу a_{mnk}^i обчислюють за формулою (2) за степеневими моментами похідних густини δ :

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \int_{\tau} x_1^p x_2^q x_3^s \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau, \quad p+q+s=t. \quad (5)$$

Величини (5) визначають через степеневі моменти функції густини δ за допомогою формули Остроградського:

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \left(-p \int_{\tau} x_1^{p-1} x_2^q x_3^s \delta d\tau + \iint_{\sigma} x_1^p x_2^q x_3^s \delta(x_1, x_2, x_3) \cos \alpha_i d\sigma \right), \quad (6)$$

де $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ – вектор нормалі до поверхні, компоненти якого такі

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \frac{x_i}{D(x_1, x_2)}, i = 1, 2 \\ \cos \alpha_3 &= \frac{1}{D(x_1, x_2)}, \\ x_3 &= \pm a_3 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}} = f(x_1, x_2), \\ D(x_1, x_2) &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подання поверхні еліпсоїда у формулах (7) можна розглядати і в іншому вигляді, наприклад, виражати x_1 через x_2, x_3 .

$$\frac{3\delta_{\min} (2p-1)!!(2q-1)!!(2s-1)!!}{\delta_c R(2(p+q+s)+1)!!} \leq \sigma_{2p2q2s} \leq \frac{3\delta_{\max} (2p-1)!!(2q-1)!!(2s-1)!!}{\delta_c R(2(p+q+s)+1)!!}, \quad (9)$$

де $\delta_{\min}, \delta_{\max}$ – мінімальне та максимальні значення густини на поверхні планети. Така оцінка дає можливість контролювати обчислення цих величин, що є додатковим аргументом для розроблення такого підходу.

Права сторона рівності (8) є інтегралами по поверхні, а тому назовемо їх поверхневими степеневими моментами. Ці інтеграли можна обчислити за відомим значенням густини на поверхні, що, до речі, спонукає до вивчення поведінки функції густини на поверхні Землі, зокрема, до побудови “узагальненої” функції поверхневого розподілу мас на поверхні. Проте зауважимо, що використання такої інформації потребує окремого

$$\begin{aligned} U_{nk} + iV_{nk} &= \frac{RR(n-k)!}{2^k} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m x_3^{n-k-2m} (x_1^2 + x_2^2)^m (x_1 + ix_2)^k}{2^{2m} m!(m+k)!(n-k-2m)!} = \\ &= \sum_{p+q+s=n} (\alpha_{pqs} x_1^p x_2^q x_3^s + i\beta_{pqs} x_1^p x_2^q x_3^s). \end{aligned} \quad (11)$$

За допомогою теореми Остроградського співвідношення (10) можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} C_{nk} = \frac{1}{Ma_e^n} \int \delta U_{nk} d\tau = \frac{1}{Ma_e^n} \left(-\int \frac{\partial \delta}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta U_{nk}^i \cos \alpha_i d\sigma \right), \\ S_{nk} = \frac{1}{Ma_e^n} \int \delta V_{nk} d\tau = \frac{1}{Ma_e^n} \left(-\int \frac{\partial \delta}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta V_{nk}^i \cos \alpha_i d\sigma \right), \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (12)$$

де $U_{nk}^i = \int_0^{x_i} U_{nk} dx_i, V_{nk}^i = \int_0^{x_i} V_{nk} dx_i$ – многочлени $n+1$ степеня за змінними x_1, x_2, x_3 .

Отже, величини (5) визначаються через степеневі моменти густини (3), степінь яких на одиницю менший, ніж в (6), та вирази:

$$\begin{aligned} \sigma_{pqs} &= \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{\sigma} x_1^p x_2^q x_3^s \delta \cos \alpha_i d\sigma \\ &= \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \iint_{\sigma} x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_3^{s_1} \delta \frac{d\sigma}{D(x_2, x_3)}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $p_1 = p + \varepsilon(i-1), q_1 = q + \varepsilon(i-2),$
 $s_1 = s + \varepsilon(i-3), \varepsilon(i) = \begin{cases} 1, i = 1 \\ 0, i \neq 1 \end{cases}$.

Для σ_{pqs} існує оцінка, наприклад, для парних степенів маємо:

дослідження на предмет стійкості до помилок під час їх визначення, а тому надалі шукатимемо значення σ_{pqs} за допомогою інтегральних характеристик гравітаційного поля Землі:

$$\begin{aligned} C_{nk} &= \frac{1}{Ma_e^n} \int \delta U_{nk} d\tau, \\ S_{nk} &= \frac{1}{Ma_e^n} \int \delta V_{nk} d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

де U_{nk}, V_{nk} – гармонічні многочлени всередині кулі. У прямокутній системі координат формула їх подання є такою (Фис, Зазуляк, Заяць, 2004):

Отже, система рівнянь (12) лінійна відносно величин (8) і з урахуванням співвідношення (6) маємо:

$$\begin{cases} C_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left(C_{nk}^* + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right), \\ S_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left(S_{nk}^* + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right), \end{cases} \quad (13)$$

тут $p_1 = p + \varepsilon(i-1), \quad q_1 = q + \varepsilon(i-2), \quad (\sigma_{p00})^i (\sigma_{0q0})^j (\sigma_{00s})^l = \sigma_{p+2i, q+2j, s+2l},$
 $s_1 = s + \varepsilon(i-3), \quad p_2 = p + 2\varepsilon(i-1), \quad i + j + l = t,$
 $q_2 = q + 2\varepsilon(i-2), \quad s_2 = s + 2\varepsilon(i-3),$

$$C_{nk}^* = - \int_{\tau} \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau, \quad S_{nk}^* = - \int_{\tau} \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau$$

обчислені значення стоксових сталих за відомою функцією густини δ_N .

До співвідношень (13) долучаємо тотожності вигляду

$$\sigma_{p+2, q, s} + \sigma_{h, q+2, s} + \sigma_{p, q, s+2} = \sigma_{pqs}, \quad (14)$$

які можна символічно подати так:

$$(\sigma_{p00} + \sigma_{0q0} + \sigma_{00s})^{2t} = \sigma_{pqs}, \quad p, q, s = 0 \text{ або } 1 \quad (15)$$

Кожен член розкладу (15) можна подати так:

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad \sigma_{00n}, \sigma_{20n-2}, \sigma_{02n-2}, \sigma_{40n-4}, \sigma_{22n-4}, \sigma_{04n-4}, \dots, \sigma_{n-T0T}, \dots, \sigma_{Tn-T, T}, \\ \text{II.} & \quad \sigma_{10n-1}, \sigma_{30n-3}, \sigma_{12n-2}, \sigma_{50n-5}, \sigma_{32n-5}, \sigma_{14n-5}, \dots, \sigma_{n-T0T}, \dots, \sigma_{Tn-T, T}, \\ \text{III.} & \quad \sigma_{01n-1}, \sigma_{21n-3}, \sigma_{03n-3}, \sigma_{41n-5}, \sigma_{23n-5}, \sigma_{05n-5}, \dots, \sigma_{n-T, T, T}, \dots, \sigma_{Tn-T, T}, \\ \text{IV.} & \quad \sigma_{01N-1}, \sigma_{21N-3}, \sigma_{03N-3}, \sigma_{40N-}, \sigma_{22N-4}, \sigma_{04N-4}, \dots, \sigma_{N-T0T}, \dots, \sigma_{TN-T, T}, \end{aligned} \quad (16)$$

в кожній з яких відповідно r_i рівнянь та t_i невідомих:

I група: $r_1 = 3n/2 + 4$ – рівняння з $t_1 = n(n+1)/2$ невідомими,

II–IV групи: $r_2 = r_3 = r_4 = 3n/2 + 1$ – рівняння з $t_2 = t_3 = t_4 = [n(n+1)/2]$ невідомими.

У матричному вигляді (13), (15) можна подати так:

$$B_i = A_i X_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (17)$$

де X_i – вектор-стовпець розмірності t_i невідомих σ_{pqs} ; B_i – вектор-стовпець розмірності r_i правих частин систем рівнянь (13) і (15); A_i – матриця розмірності $r_i \times t_i$ систем рівнянь (13) і (15).

Для систем (17) за різних значень t_i та r_i можливі випадки: система має єдиний розв’язок, не має розв’язків (перевизначена), існує безліч розв’язків (недовизначена). Числові експерименти в (Fys, Brydun, Yurkiv 2018; Fys та ін. 2016)

Отже, загальна кількість рівнянь, котра відповідає стоксовим сталим n -го порядку, та тотожностей (15) є $3(2n+1)+3$ з $(n+1)(n+2)(n+3)/6+1$ невідомими σ_{pqs} .

Невідомі рівнянь системи (13), що відповідають стоксовим сталим:

$$\begin{aligned} & C_{n0}, C_{n2}, \dots, C_{nT} \text{ (I)}, \quad \left(T = n - 2 \times \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right); \\ & C_{n1}, C_{n3}, \dots, C_{n, n-T} \text{ (II)}; \\ & S_{n1}, S_{n3}, \dots, S_{n, n-T} \text{ (III)}; \\ & S_{n2}, S_{n4}, \dots, S_{n, T} \text{ (IV)} \end{aligned}$$

можна об’єднати в чотири групи:

показують, що єдиний розв’язок існує, якщо $n = 3$ та $n = 4$ (за винятком I в (16)).

Запишемо узагальнений розв’язок системи (17), шукаючи його за умови мінімального відхилення від деякого прийнятого значення. Відповідно задачу математично можна сформулювати так: для заданої густини δ_N шукаємо величини

$$\sigma_{pqs} = \sigma_{pqs}^{**} + \Delta \sigma_{pqs}, \quad (18)$$

де $\sigma_{pqs}^{**} = \frac{1}{M a_1^p a_2^q a_3^s} \int x^p y^q z^s \delta_N \frac{d\sigma}{D(x_2, x_3)}$ – поверхневі степеневі моменти, обчислені за заданою моделлю δ_N .

Підстановка (18) в співвідношення (11) та (13) дає:

$$\begin{cases} C_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left(C_{nk}^{**} + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right) \\ S_{nk} = \frac{1}{M \cdot a_1^p a_2^q a_3^s} \left(S_{nk}^{**} + \frac{1}{p_1 q_1 s_1} \sum_{p+q+s=t} \sigma_{p_2 q_2 s_2} \alpha_{pqs} \right) \end{cases}, \quad (19)$$

де

$$C_{nk}^{**} = -\int_{\tau} \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} U_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta_N U_{nk}^i d\sigma = \int_{\tau} \delta_N U_{nk} d\tau$$

$$S_{nk}^{**} = -\int_{\tau} \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} V_{nk}^i d\tau + \iint_{\sigma} \delta_N V_{nk}^i d\sigma = \int_{\tau} \delta_N V_{nk} d\tau.$$

Тоді тотожність (15) для поправок $\Delta\sigma_{mnk}$ фіксованої функції густини матиме вигляд

$$(\Delta\sigma_{p00} + \Delta\sigma_{0q0} + \Delta\sigma_{00s})^n = 0. \quad (20)$$

Розв'язок системи (17), (20) за умови $\sum \Delta^2\sigma_{pqs} \rightarrow \min$ можна подати так

$$\Delta\sigma_i = A_i (A_i A_i^T)^{-1} (C_i - C_i^{**}). \quad (21)$$

Степеневі моменти для першого наближення похідних функції густини δ з урахуванням (6) мають вигляд:

$$I_{pqs}^i = \frac{1}{Ma_1^p a_2^q a_3^s} \int_{\tau} x_1^p x_2^q x_3^s \frac{\partial \delta}{\partial x_i} d\tau$$

$$= I_{pqs}^* + \sigma_{pqs} = I_{pqs}^* + \sigma_{pqs}^{**} + \Delta\sigma_{pqs}$$

$$= (I_{pqs}^*)^i + \Delta\sigma_{pqs},$$

$$i = 1, 2, 3, \quad p + q + s = t.$$

Усі коефіцієнти розкладу (4), якщо

$$m + n + k = t > N - 1,$$

для похідних $\frac{\partial \delta_{N-1}}{\partial x_i}$ дорівнюють нулю,

$$(a_{mnk}^i)^* = \sum_{p+q+s \leq t} d_{pqs}^i (I_{pqs}^i)^* = 0.$$

$$C_{nk} + iS_{nk} = -p_2 q_2 s_2 \left[\sum_{p+q+s=t} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \int_{\tau} x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_3^{s_1} \frac{\partial(\delta_N + \Delta\delta_N)}{\partial x_i} d\tau + \sum_{p+q+s \neq t+2} \sigma_{pqs} ((\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs})) \right] -$$

$$- p_2 q_2 s_2 \left[\sum_{p+q+s=t} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \int_{\tau} x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_3^{s_1} \frac{\partial \delta_N}{\partial x_i} d\tau + \sum_{p+q+s \neq t+2} \sigma_{pqs} ((\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs})) \right] -$$

$$- p_2 q_2 s_2 \sum_{p+q+s=t} (\alpha_{pqs} + i\beta_{pqs}) \int_{\tau} x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_3^{s_1} \frac{\partial \Delta\delta_N}{\partial x_i} d\tau.$$

Їх праві частини не змінюються, бо для $t < N$,

$$\int_{\tau} x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_3^{s_1} \frac{\partial \Delta\delta_N}{\partial x_i} d\tau = 0 \quad (\text{комбінація похідних } N,$$

$N+1$ порядку), а σ_{pqs} раніше визначені з рівності (6).

Отже, за відомим наближенням функції розподілу мас δ_N одержуємо вирази для похідних, узгоджених зі стоксовими сталими вже вищого $2l-1, 2l$ порядку, а далі й сам вигляд функції

У результаті цього елементи першого наближення визначаються так:

$$a_{mnk}^i = \sum_{p+q+s \leq t} d_{pqs}^i I_{pqs}^i$$

$$= \sum_{p+q+s \leq t} d_{pqs}^i I_{pqs}^{i*} + \sum_{p+q+s=t} d_{pqs}^i \Delta\sigma_{pqs}$$

$$= \frac{(2t+1)!!}{t!} \Delta\sigma_{pqs},$$

а шукане наближення, відповідно

$$\frac{\partial(\Delta\delta_N)}{\partial x_i} = \sum_{m+n+k=N} \frac{(2t+1)!!}{t!} W_{mnk}^{mk},$$

$$\frac{\partial \delta_{N+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial \delta_{N-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial(\Delta\delta_N)}{\partial x_i}, \quad N = 4, 6, 8, \quad (22)$$

де $\frac{\partial \delta_{N-1}}{\partial x_i}$ – функція розподілу мас, встановлена

на попередньому кроці (Fys, Brydun, Yurkiv 2018; Fys та ін. 2016).

Зауважимо, що кожен l -й крок ітерацій передбачає використання двох сусідніх порядків стоксових сталих $2l, 2l-1$, із відповідними номерами наближень $N = 2l, N = 2l+1$. Узгодження функції $\Delta\delta_N(x_1, x_2, x_3)$ зі стоксовими сталими порядку $n-1, n$ визначається многочленами $W_{mnk}^N, N+1$ порядку, а тому не впливає на значення стоксових сталих вже задіяних нижчих порядків t . Справді, тотожності (12) можна подати так:

розподілу мас δ_{N+2} . Ітераційний процес здійснюємо до наперед заданого порядку апроксимації.

2. Реалізація алгоритму наближеного методу побудови

За базову функцію під час побудови беремо функцію розподілу мас у вигляді (Мещеряков, 1991):

$$\delta_2(x_1, x_2, x_3) = \delta^0(\rho) + \sum_{m+n+k=0}^2 b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3)$$

де $\delta^0(\rho)$ – одновимірна сферична модель розподілу мас (для Землі – це референсна модель PREM (Dziewonski & Anderson, 1981)).

$$\begin{aligned} b_{000} &= \delta_c \left(1 - \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right), \quad b_{110} = 35\delta_c S_{21}, \quad b_{101} = 35\delta_c C_{21}, \quad b_{011} = 35\delta_c S_{21}, \\ b_{200} &= \frac{7}{2} \delta_c \left[5 \left(\frac{-C_{20}}{2H} + 2C_{22} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \\ b_{020} &= \frac{7}{2} \delta_c \left[5 \left(\frac{-C_{20}}{2H} - 2C_{22} \right) - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + \frac{3}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right], \\ b_{002} &= \frac{7}{2} \delta_c \left[5 \left(1 - \frac{1}{2H} \right) C_{20} - 1 - \frac{5}{\delta_c} \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^4 d\rho + 3 \int_0^1 \delta^0(\rho) \rho^2 d\rho \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Значення степеневих моментів (3) визначають [15] так

$$\begin{aligned} I_{200} &= \frac{-C_{20}}{2H} + 2C_{22}, \quad I_{020} = \frac{-C_{20}}{2H} - 2C_{22}, \\ I_{002} &= C_{20} \left(1 - \frac{1}{2H} \right), \quad I_{101} = C_{21}, \\ I_{011} &= S_{21}, \quad I_{110} = \frac{1}{2} S_{22}. \end{aligned} \quad (24)$$

Наближені поверхневі моменти

$$\sigma_{pqs} \quad (p + q + s \leq 4)$$

визначають, залучаючи стоксові сталі до другого порядку включно з відомими коефіцієнтами b_{000} ,

$b_{200}, b_{020}, b_{002}, b_{110}, b_{101}, b_{011}$, а саме (Fys та ін., 2016):

$$\begin{aligned} \sigma_{200} &= \frac{5\delta_c C_{00} + (3b_{200} + b_{020} + b_{002})}{5}, \\ \sigma_{020} &= \frac{5\delta_c C_{00} + (b_{200} + 3b_{020} + b_{002})}{5}, \\ \sigma_{002} &= \frac{5\delta_c C_{00} + (b_{200} + b_{020} + 3b_{002})}{5}. \end{aligned}$$

Користуючись тотожністю (14), якщо $t = 1$, визначимо σ_{000} :

$$\sigma_{000} = \sigma_{200} + \sigma_{020} + \sigma_{002}.$$

За стоксовими сталими першого порядку встановимо значення σ_{pqs} ($p + q + s = 3$):

$$\begin{aligned} \sigma_{201} &= \sigma_{021} = C_{10}, \quad \sigma_{003} = 2C_{10}, \\ \sigma_{300} &= 2C_{11}, \quad \sigma_{129} = \sigma_{192} = C_{11}, \\ \sigma_{030} &= S_{11}, \quad \sigma_{219} = \sigma_{012} = \frac{S_{11}}{2}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти b_{mnk} в рівності (1) визначають за стоксовими сталими та динамічним стисненням (Мещеряков, Фыс, 1986):

Якщо початок системи координат розміщений у центрі мас, з наведених вище співвідношень одержуємо, що

$$\sigma_{pqs} = 0, \quad (p + q + s = 3),$$

відтак маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{100} &= \sigma_{300} + \sigma_{120} + \sigma_{102} = 0, \\ \sigma_{010} &= \sigma_{030} + \sigma_{210} + \sigma_{012} = 0, \\ \sigma_{001} &= \sigma_{003} + \sigma_{201} + \sigma_{021} = 0. \end{aligned}$$

Непарні величини σ_{pqs} четвертого порядку (p , або q , або s – непарні) визначаються стоксовими

сталими C_{21}, S_{22} :

$$\begin{aligned} \sigma_{103} &= 4C_{21}, \quad \sigma_{121} = C_{21}, \\ \sigma_{310} &= \sigma_{130} = 4S_{22}, \quad \sigma_{112} = S_{22}, \end{aligned}$$

з тотожності (14) та за допомогою цих співвідношень, одержимо

$$\sigma_{101} = \sigma_{301} + \sigma_{121} + \sigma_{103}, \quad \sigma_{110} = \sigma_{310} + \sigma_{130} + \sigma_{112}.$$

Обчислення значень σ_{pqs} четвертого порядку з парними індексами здійснюємо за допомогою стоксових сталих C_{20}, C_{22} .

У статті (Fys та ін., 2016) запропоновано спосіб визначення цих елементів поетапним розв'язанням систем рівнянь із одним вільним невідомим та подальшим її визначенням з умови (14), якщо $t = 2, p = q = s = 0$. Для цього сформуємо матрицю рівнянь за формулами (1) та вільних членів за (2), звідки одержуємо необхідні поверхневі моменти σ_{pqs} , $p + q + s = 4$, p, q, s – парні, за якими з урахуванням (24) обчислюємо степеневі моменти (6), далі за допомогою степеневих моментів із використанням формулами (2) і коефіцієнти a_{mnk}^i ($m + n + k \leq 3$). У результаті одержуємо (Fys та ін., 2016):

$$\begin{aligned} \delta_4(x_1, x_2, x_3) = & \delta^0(\rho) + \\ & + \sum_{m+n+k=0}^3 a_{mnk}^1 \int_0^{x_1} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \\ & + \sum_{m+n+k=0}^3 a_{mnk}^2 \int_0^{x_2} W_{mnk}(0, x_2, x_3) dx_2 + \\ & + \sum_{m+n+k=0}^3 a_{mnk}^3 \int_0^{x_3} W_{mnk}(0, 0, x_3) dx_3. \end{aligned}$$

Наступне наближення будуємо за стоксовими сталими третього і четвертого порядків. За наведеною схемою знаходимо δ_6 , приймаючи за початкове наближення δ_4 . Наближені моменти визначаються формулами (21). Винятком є лише випадок, коли система (19) містить тільки одне рівняння:

$$S_{32} = \frac{1}{2Ma_e^3} \int \delta x_1 x_2 x_3 d\tau.$$

Тоді деякі з величин σ_{pqs} , визначаються безпосередньо:

$$\sigma_{311} = 4s_{32} + \frac{4}{630} b_{011},$$

$$\sigma_{131} = 4s_{32} + \frac{4}{630} b_{101},$$

$$\sigma_{113} = 4s_{32} + \frac{4}{630} b_{110}.$$

Знайдені значення за наведеним алгоритмом визначають коефіцієнти a_{mnk}^i ($4 \leq m+n+k \leq 5$), а отже, і δ_8 .

За знайденим наближенням δ_6 та стоксовими сталими вже 5–6-го порядків отримуємо відповід

но δ_8 і т. д. до встановленого наперед порядку N_k .

Результати

Описаний метод є загальнішим порівняно з наведеними і реалізованими в (Fys та ін., 2016). Узагальнення стосуються насамперед побудови матриці зв'язків A_i з (17) та отримання наближеного розв'язку (17) незалежно від умов його існування. Порівняння результатів обчислень за різними способами дають подібні результати, тому застосування наведеного алгоритму є обґрунтованим.

На основі наведеної методики побудовано тривимірну модель густини δ_6 із залученням стоксових сталих до четвертого порядку включно, яка зберігає всі основні властивості референц-моделі PREM: величини стрибків та глибину їх залягання, характер зміни густини за відносним радіусом. На відміну від моделі δ_2 , аномалії густини δ_6 є структурованішими, тобто дають детальнішу картину розміщення мас. На різних глибинах спостерігається перерозподіл мас. Проте з отриманих карт впливає властивість переміщення мас у бік поверхні, причина якої – обертовий рух планети. Характерно, що такі скупчення спостерігаються по всьому радіусу Землі. Натомість поблизу осі обертання спостерігається розрідження мас із глибиною. Це проілюстровано картою ізоденс на рис. 2 (глибина 5150 км, межа “внутрішнє–зовнішнє ядро”) та на рис. 3 (глибина 2891 км, межа “ядро–мантія”). Отже, на основі цієї ж інформації формуємо модель густини, яка дає детальнішу картину розподілу мас всередині планети.

Для наочності виконано обчислення аномалій густини (рис. 1) та їх похідних (рис. 2–4) на межі “ядро–мантія”, проілюстровані відповідними картосхемами.

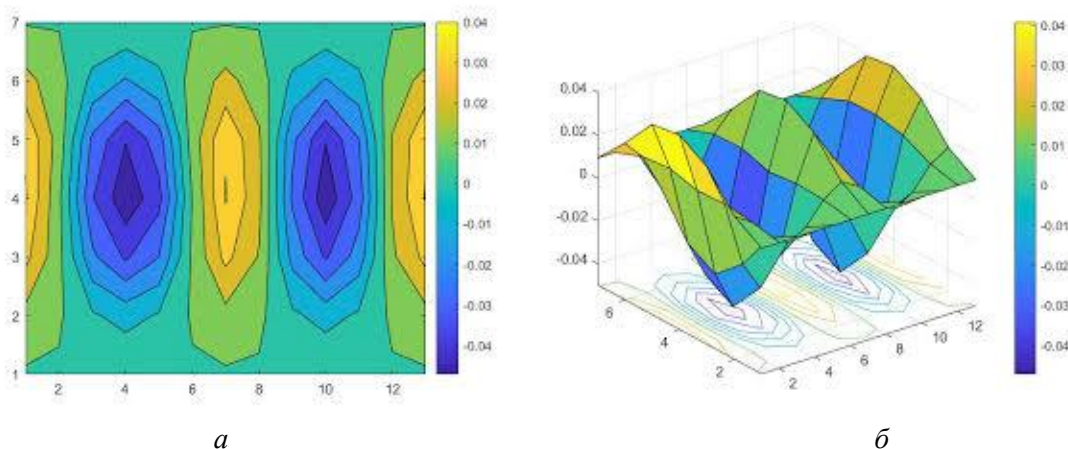


Рис. 1. Карта ізоліній аномалій густини земних надр на межі “ядро–мантія” (глибина 2891 км) (а) та їх просторове зображення (б)

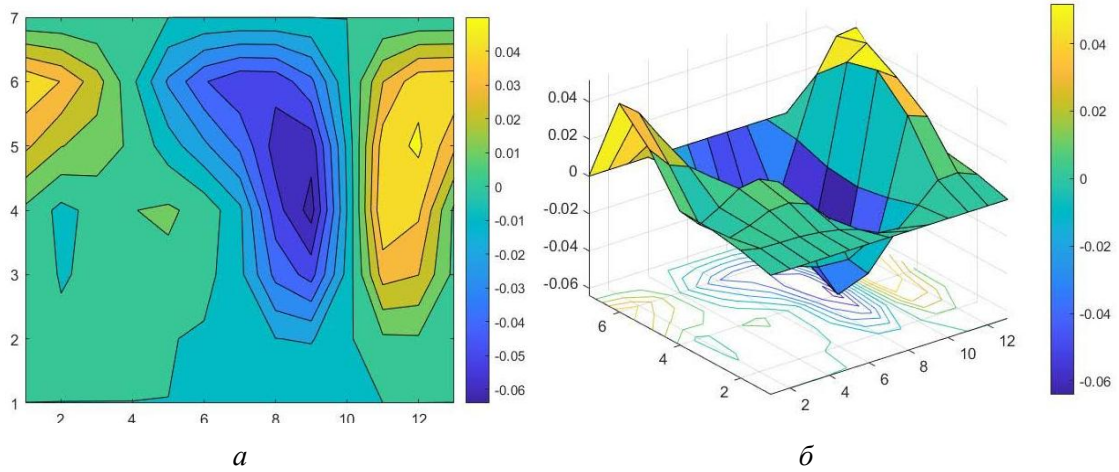


Рис. 2. Карта ізоліній похідної за змінною x_1 аномалій густини земних надр на межі “ядро–мантія” (глибина 2891 км) (а) та їх просторове зображення (б)

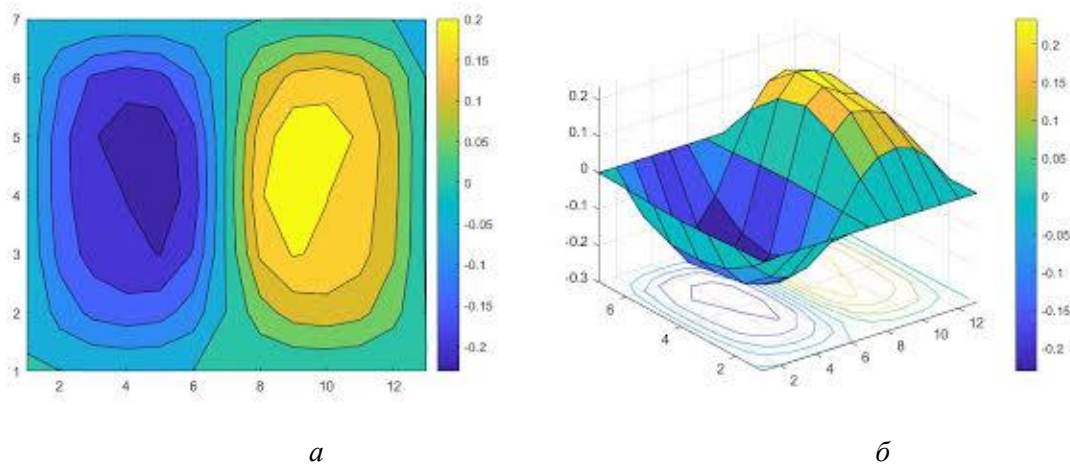


Рис. 3. Карта ізоліній похідної за змінною x_2 аномалій густини земних надр на межі “ядро–мантія” (глибина 2891 км) (а) та їх просторове зображення (б)

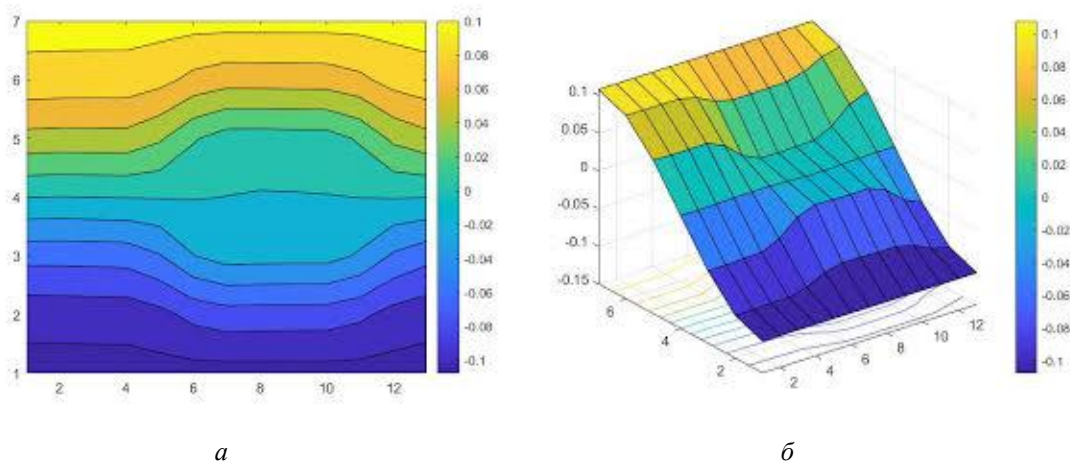


Рис. 4. Карта ізоліній похідної за змінною x_3 (віссю обертання) аномалій густини земних надр на межі “ядро–мантія” (глибина 2891 км) (а) та їх просторове зображення (б)

Аналогічно виконаємо обчислення та наведемо відповідні ілюстрації для глибини 200 км (рис. 5–8). Вибір такого значення зумовлений

розміщенням об'єктів дослідження у середині мантії та їх можливим впливом на геодинамічні процеси Землі.

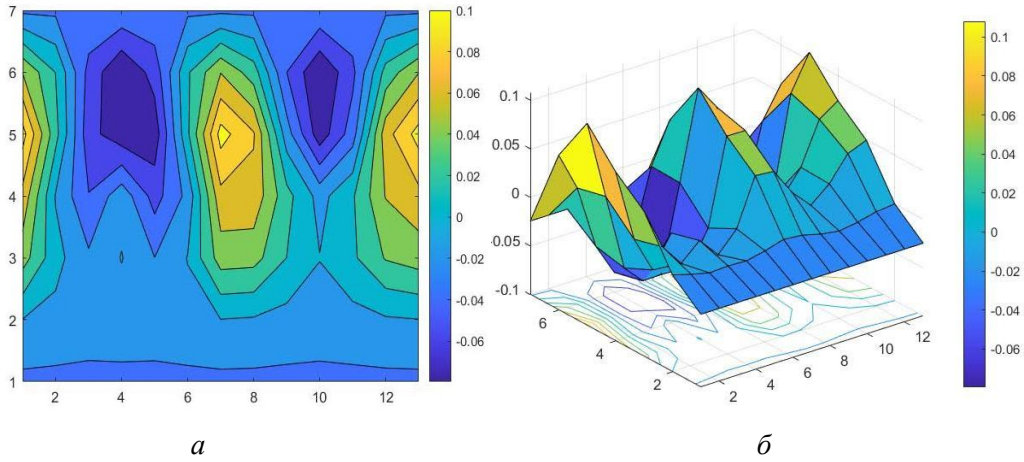


Рис. 5. Карта ізоліній аномалій густини земних надр на глибині 200 км (а) та їх просторове зображення (б)

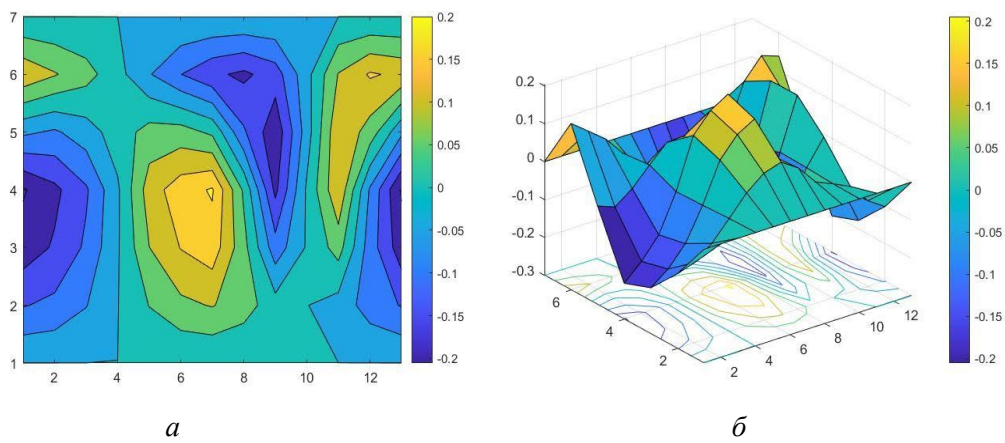


Рис. 6. Карта ізоліній похідної за змінною x_1 аномалій густини земних надр на глибині 200 км (а) та їх просторове зображення (б)

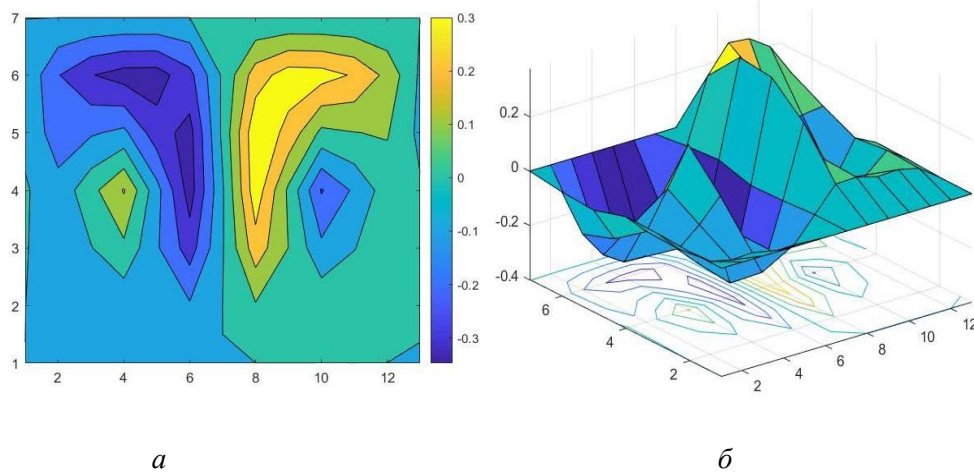


Рис. 7. Карта ізоліній похідної за змінною x_2 аномалій густини земних надр на глибині 200 км (а) та їх просторове зображення (б)

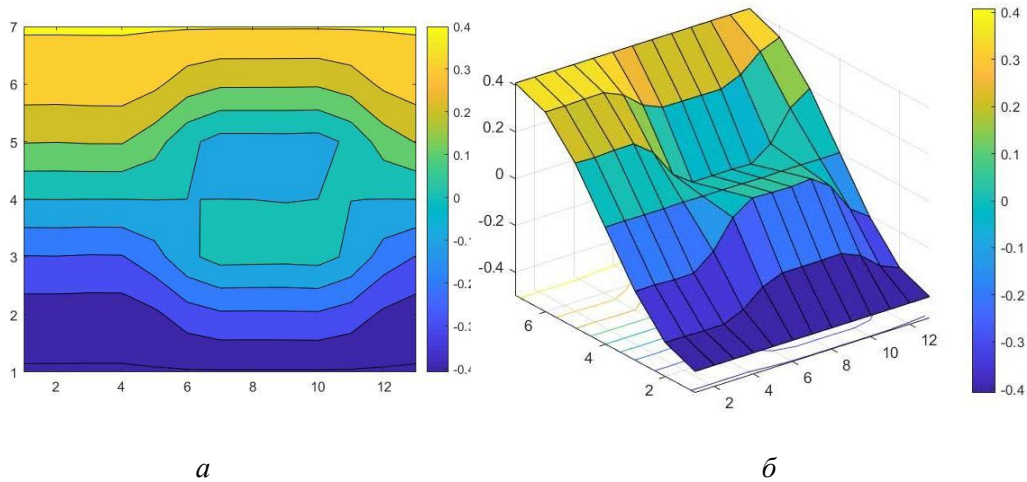


Рис. 8. Карта ізоліній похідної за змінною x_3 аномалій густини земних надр на глибині 200 км (а) та їх просторове зображення (б)

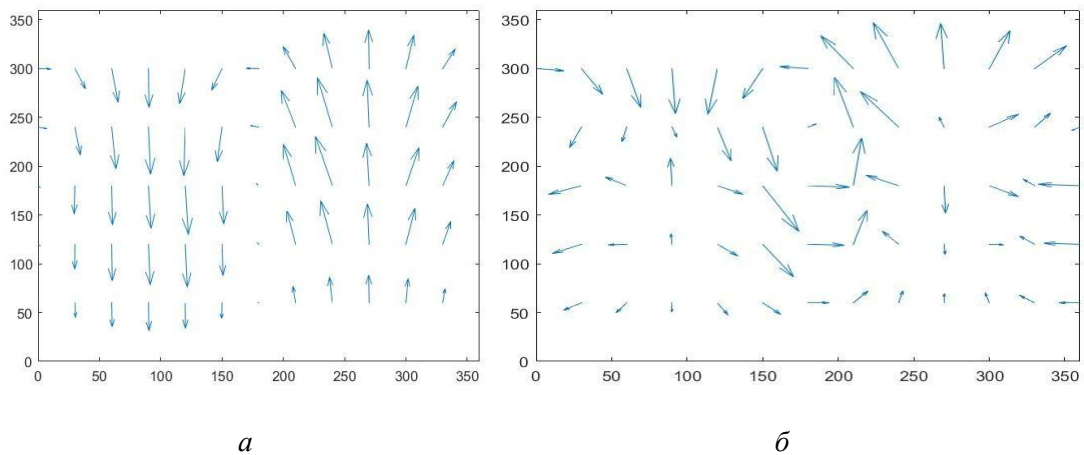


Рис. 9. Карта проєкції градієнта аномалій густини в точках еліпсоїдальної поверхні на площину xOy (горизонтальна площина) на межі “ядро–мантія” (глибина 2900 км) (а) та на глибині 200 км (б)

Виділимо найістотніші моменти наведених результатів. Рис. 4, 8 відображають картину розподілу аномалій похідних густини по осі Ox_3 (в певному сенсі – вертикальної похідної). З рисунків зрозуміло, що градієнт аномалій густини напрямлений у бік центра мас, адже для двох глибин (рис. 4, 8) для $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ кут між ним та віссю

Ox_3 тупий, а для проміжку $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ гострий.

Цікавою є вузлова точка рис. 2 з приблизними координатами $\vartheta = 120^\circ$, $\lambda = 35^\circ$, що можна трактувати як точку стиснення та розтягання в різні сторони. Цікаво, що вона потрапляє в область взаємодії аравійської та африканської тектонічних плит. Очевидно, що детальніша інтерпретація потребує інших способів

комплексного подання інформації, наприклад, ілюстрація сумарної дії похідних за змінними x_1, x_2 . Спробу такого підходу зроблено на рис. 9.

Навіть перший крок такого підходу виявляє особливості (рис. 8, а), а саме: перерозподіл мас на межі “ядро–мантія” здійснюється від південного до північного полюса, що збігається із дією сили магнітного поля. Характерно, що в другому випадку (рис. 8, б), картина напрямку градієнта аномалій густини зовсім інша, і її можна пов’язати з тектонічними рухами в середині планети. Звідси можна зробити висновок, що картосхеми аномалій густини та її градієнта доповнюють дослідження внутрішньої структури верхньої мантії та земної кори методами сейсмології, а комплексна інтерпретація даних томографії та отриманих на основі наведеної методики дає змогу встановлювати джерела перерозподілу мас у верхніх шарах Землі.

Висновки

1. Запропонований метод наближеної побудови розподілу мас Землі та його похідних дає можливість повніше використати інформацію про гравітаційне поле планети.

2. На відміну від традиційного способу визначення густини, запропонована методика дає змогу частково контролювати процес обчислень, а тому оцінювати ступінь достовірності такої побудови.

3. Побудовані карти аномалій густини на деяких глибинах дають підстави зробити попередні висновки про їх скупчення всередині Землі, а вектор-схеми відображають можливі переміщення мас планети, зокрема за рахунок обертової складової сили тяжіння.

4. Наведена методика дає можливість побудувати модельний розподіл мас надр планети та його градієнта довільного порядку, а відтак детальніше вивчити внутрішню будову Землі.

Список літератури

- Мещеряков Г. А. Использование стоксовых постоянных Земли для уточнения её механической модели. *Геодезия, картография и аэрофотосъёмка*. 1975. 21, 23–30. <http://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2018/apr/10725/meshcheryakov2.pdf>
- Мещеряков Г. А., Фыс М. М. Определение плотности земных недр рядами по биортогональным системам многочленов. *Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий*. К.: Наук. думка, 1981. 329–334.
- Мещеряков Г. А., Фыс М. М. Трёхмерная и референсная плотностные модели Земли. *Геофизический журнал*, 1986. 8(4), 68–75.
- Мещеряков Г. А., Фыс М. М. Трёхмерная плотностная модель Земли I. *Геофизический журнал*, 1990. 12(4), 50–57.
- Мещеряков Г. А., & Фыс М. М. Трёхмерная плотностная модель Земли II. *Геофизический журнал*, 1990/12(5), 11–20.
- Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
- Церклевич А. Л., Заяць О. С., Фис М. М. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи. *Геодинаміка*. 2012. 1(12), 42–53. <https://doi.org/10.23939/jgd2012.01.042>
- Черняга П., Фис М. Новий підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та їх похідних розподілів мас планет. *Збірник наук. праць ЗГТ УТГК “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”*. 2012. 2 (24), 40–43.
- Фис М. М., Зазуляк П. М., Черняга П. Г. Значення та варіації густини у центрі мас еліпсоїдальних планет. *Кинематика и физика небесных тел*. 2013. 29(2), 62–68. <https://www.mao.kiev.ua/biblio/jscans/kfnt/2013-29/kfnt-2013-29-2-06.pdf>
- Фис М. М., Зазуляк П. М., Заяць О. С. До питання визначення кульових функцій в загальнопланетарній системі координат. *Збірник наукових праць ЗГТ УТГК “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”*. 2004. 1(16), 401–408.
- Фис М. М., Бридун А. М., Юрків М. І., & Согор А. Р. Визначення функції за її похідними, поданими комбінаціями многочленів Лежандра трьох змінних. *Young Scientist*, 2018. 63(11). <http://molodyvcheny.in.ua/files/journal/2018/11/91.pdf>
- Bullen, K. E. The earth's density. *London, Chapman and Hall*, 1975.
- Dzewonski, A., & Anderson, D. Preliminary reference Earth model. *Physics of the earth and planetary interiors*, 1981. 25(4), 297–356. doi: 10.1016/0031-9201(81)90046-7.
- Fys, M., Yurkiv, M., Brydun, A., & Lozynskyi, V. (2016). One option of constructing three-dimensional distribution of the mass and its derivatives for a spherical planet earth. *Geodynamics*, 2(21), 36–44. <https://doi.org/10.23939/jgd2016.02.036>
- Fys, M., Brydun, A., & Yurkiv, M. (2018). Method for approximate construction of three-dimensional mass distribution function and gradient of an ellipsoidal planet based on external gravitational field parameters. *Geodynamics*, 2 (25), 27–36. <https://doi.org/10.23939/jgd2018.02.027>
- Martinee, Z., & Pec, K. (1987). Three-Dimensional Density Distribution Generating the Observed Gravity Field of Planets: Part I. The Earth. In *Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets* (p. 129). <http://articles.adsabs.harvard.edu/full/conf/fdem/1987/0000129.000.html>
- Martinee, Z., & Pec, K. (1987). Three-Dimensional Density Distribution Generating the Observed Gravity Field of Planets: Part II. The Moon. In *Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets* (p. 153).
- Moritz, H. (1973). Ellipsoidal mass distributions. *Report No. 206, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio*.

M. M. FYS¹, A. M. BRYDUN², M. I. YURKIV³, A. R. SOHOR⁴, Y. I. HOLUBINKA⁵

¹⁻⁴ Department of Cartography and geospatial modeling of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine, e-mail: ¹ Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, ² Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, ³ Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua,

⁴ Andrii.R.Sohor@lpnu.ua, ⁵ Yuliia.I.Holubinka@lpnu.ua

METHODOLOGY FOR APPROXIMATE CONSTRUCTION OF THE THREE-DIMENSIONAL MASS DISTRIBUTION FUNCTION AND ITS GRADIENT FOR THE ELLIPSOIDAL PLANET SUBSIDIES BASED ON THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD PARAMETERS

Purpose. Create an algorithm for constructing a three-dimensional masses distribution function of the planet and its derivatives taking into account Stokes constants of arbitrary orders. Based on this method, perform research on the internal structure of the Earth. **Methodology** The derivatives of the inhomogeneous mass distribution are presented by linear combinations of biorthogonal polynomials which coefficients are obtained from the system of equations. These equations follow from integral transformations of the Stokes constants, the calculation process is carried out by a sequential approximation and for the initial approximation we take a one-dimensional density model that is consistent with Stokes constants up to the second order inclusive. Next, the coefficients of expansion of the potential of higher orders are determined up to a predetermined order. In this case, information on the power moments of the density of surface integrals makes it possible to analyze and control the iterative process. **Results.** The results of calculations using the software according to the described algorithm are obtained. A fairly high degree of approximation (sixth order) of three-dimensional mass distributions function is achieved. Carto diagrams were created based on the values of deviations of the three-dimensional average distributions (“isodens”), which give a fairly detailed picture of the Earth’s internal structure. The presented maps of “inhomogeneity’s” at characteristic depths (2891 km core – mantle, 5150 km internal – external core) allow us to draw preliminary conclusions about global mass movements. At the same time, information on derivatives is significant for interpretation. First of all, it can be noted that the gradient of “inhomogeneity’s” is directed toward the center of mass. The presented projections of this gradient on a plane perpendicular to the rotation axis (horizontal plane) show the tendency of spatial displacements. **Scientific novelty.** Vector diagrams of the gradient, in combination with carto diagrams, give a broad picture of the dynamics and possible mechanisms of mass movement within the planet. To a certain extent, these studies confirm the phenomenon of gravitational convection of masses. **Practical significance.** The proposed algorithm can be used to build regional models of the planet, and numerical results can be used to interpret global and local geodynamic processes inside and on the Earth’s surface.

Key words: potential; gradient; harmonic function; Earth; mass distribution model; Stokes constants.

Надійшла 16.04.2020 р.