

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕЖІ ОБЛАСТІ ДВОВІСНИХ АБСОЛЮТНО ПРУЖНИХ СТАНІВ ДЕРЕВИНИ

© Головата С., 2020

У роботі синтезовано математичну модель для визначення межі області двовісних абсолютно пружних станів ортотропних матеріалів та отримано систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для ідентифікації її параметрів. З використанням методу неперервного продовження за найкращим параметром та методу Рунге-Кутти побудовано криві розмежування абсолютно пружної та не пружної областей деформування для сосни. Проведено аналіз отриманих кривих і на його основі показано, що запропонована модель дає змогу визначити та обґрунтувати граничні напружені стани матеріалів, коефіцієнти асиметрії меж пропорційності яких в одних напрямках анізотропії є більшими, а в інших меншими за одиницю.

Ключові слова: математична модель, параметрична ідентифікація, метод найменших квадратів, метод неперервного продовження за найкращим параметром, методом Рунге-Кутти.

Вступ

На сьогодні для моделювання граничних напружених станів ізотропних та анізотропних матеріалів використовуються, в основному, неявно задані функції двох та більше невідомих. Ці функції визначаються нелінійними алгебраїчними рівняннями другого та вищих порядків. Рівняння з двома невідомими використовуються для моделювання двовісних граничних напружених станів у площинах структурної симетрії матеріалу, а рівняння з трьома та більше невідомими – для розв'язання поставленої задачі у плоскій та більш складніших постановках. У механіці деформівного твердого тіла їх прийнято називати критеріями, або умовами міцності. На сьогодні запропоновано понад 40 таких критеріїв [1]. До них належать, зокрема, критерії Ашкеназі, Гольденבלата-Копнова, Мізеса-Хілла, Захарова тощо. Однак, їх практичне застосування є обмеженим. Вони використовуються, в основному, лише для апроксимації результатів експериментальних досліджень граничних напружених станів зазначених матеріалів [1]. Ці рівняння не виводяться, вони є феноменологічними. Вони не дають змоги обґрунтувати особливостей деформативності всередині та на межі абсолютно пружної області деформування твердих тіл із сильною та слабкою асиметріями характеристик міцності. Тому актуальною є задача побудови такої математичної моделі, яка б на відміну від існуючих феноменологічних моделей давала змогу не лише апроксимувати дані емпіричних досліджень, але і виявити та обґрунтувати основні чинники асиметрії характеристик граничного напруженого стану досліджуваного матеріалу. Практична доцільність її розв'язання обґрунтовується тим, що на сьогодні не існує моделей, які б задовільно описували граничні напружені стани, значення характеристик асиметрії яких в одних напрямках структурної симетрії анізотропних матеріалів є у 2÷3 рази більшими, а в інших – у 2÷3 меншими за одиницю. Окрім цього, на сьогодні не існує технічних рішень, щодо своєчасного виявлення переходу цих матеріалів із абсолютно пружної у не пружну область деформування в умовах їх обробки та подальшої експлуатації.

Математична модель для визначення межі абсолютно пружної області деформування ортотропних матеріалів

Для розв'язання поставленої задачі синтезовано математичну модель [1], складовими якої є:

– Припущення: у граничному напруженому стані густина потенціальної енергії матеріалу з двовісним навантаженням ($s_{11} \neq 0; s_{22} \neq 0; s_{12} = s_{13} = s_{23} = 0$) прямопропорційна відносним об'ємним деформаціям матеріалу, випробовуваного в умовах одновісних розтягів (стисків) у напрямках ортотропії, тобто

$$\Pi(s_{11}; s_{22}) = k_1 e_V(s_{11}; 0) + k_2 e_V(0; s_{22}) + k_3; \quad (1)$$

– Формула для визначення густини потенціальної енергії деформованого матеріалу:

$$\Pi(s_{11}; s_{22}) = 0,5(s_{11} e_{11}(s_{11}; s_{22}) + s_{22} e_{22}(s_{11}; s_{22})); \quad (2)$$

– Формула для визначення відносної об'ємної деформації:

$$e_V(s_{11}; s_{22}) = e_{11}(s_{11}; s_{22}) + e_{22}(s_{11}; s_{22}) + e_{33}(s_{11}; s_{22}); \quad (3)$$

– Закон Гука для стисливих ортотропних матеріалів:

$$\begin{aligned} e_{11} &= L \frac{m_{23} m_{32} - m_{31} m_{21}}{E_{11}} s_{11} + \frac{m_{13} m_{32} - m_{12} m_{31}}{\sqrt{E_{11} E_{22}}} s_{22} \\ e_{22} &= L \frac{m_{23} m_{31} - m_{21} m_{32}}{\sqrt{E_{11} E_{22}}} s_{11} + \frac{1 - m_{13} m_{31}}{E_{22}} s_{22} \\ e_{33} &= L \frac{m_{32} m_{21} - m_{31} m_{23}}{\sqrt{E_{11} E_{33}}} s_{11} + \frac{m_{31} m_{12} - m_{32} m_{13}}{\sqrt{E_{22} E_{33}}} s_{22} \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут

$$L = \frac{1}{1 + m_{12} m_{23} m_{31} + m_{21} m_{13} m_{32} - m_{13} m_{31} - m_{23} m_{32} - m_{12} m_{21}}; \quad (5)$$

s_{ii} – компоненти тензора напружень; $e_{ii}(s_{11}; s_{22})$ – залежності компонентів тензора деформацій від компонентів тензора напружень; $\Pi(s_{11}; s_{22})$ – залежність густини потенціальної енергії деформованого матеріалу від компонентів тензора напружень; m_j – коефіцієнти Пуассона; k_1, k_2 та k_3 – параметри залежні від знаків компонентів тензора напружень s_{ii} .

Для обґрунтування складової (1) математичної моделі (1) – (5) запишемо формулу для визначення питомої потенціальної енергії анізотропного матеріалу з двовісним напруженим станом. Для цього скористаємося формулою (2) та законом Гука (4) у результаті матимемо:

$$\Pi(s_{11}; s_{22}) + A s_{11}^2 + C s_{11} s_{22} + B s_{22}^2 = 0 \quad (7)$$

де

$$A = - \frac{(1 - m_{23} m_{32}) L}{2 \sqrt{E_{11} E_{22}}} \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}}; \quad C = - \frac{(m_{13} m_{32} + m_{23} m_{31} - m_{12} - m_{21}) L}{2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}; \quad B = - \frac{(1 - m_{13} m_{31}) L}{2 \sqrt{E_{11} E_{22}}} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}; \quad (8)$$

У декартовій системі координат “питома потенціальна енергія – компоненти тензора напружень” геометричною інтерпретацією рівняння (7) є поверхня другого порядку S , яку прийнято називати криволінійним параболоїдом (рис. 1). На цій поверхні завжди можна знайти таку криву L , значення аплікату точок якої дорівнюють граничним значенням величини $\Pi(s_{11}; s_{22})$, таким значенням, перевищення яких призводить до переходу матеріалу з пружної у не пружну область деформування. Ця крива повинна бути такою, щоб її проекція L_{np} на площину напружень $Os_{11}s_{22}$

була неперервною, замкненою, гладкою та випуклою кривою. Окрім цього, $L_{пр}$ повинна охоплювати початок декартової системи координат. Адже, значення питомої потенціальної енергії деформованого матеріалу дорівнює її граничному значенню, лише у тому випадку коли його напружений стан є граничним. Це означає, що крива $L_{пр}$ є геометричною інтерпретацією межі області двовісних абсолютно пружних станів матеріалу. Тому, з огляду на результати емпіричних досліджень, вона повинна задовольняти зазначеним вище вимогам.

Отже, крива L – це крива перетину двох поверхонь другого порядку, а саме параболоїда S та криволінійного циліндра поперечним перерізом якого є крива $L_{пр}$. Оскільки перетином двох поверхонь другого порядку є криві або другого або четвертого порядків [2], то крива L може належати як до кривих другого так і до кривих четвертого порядків.

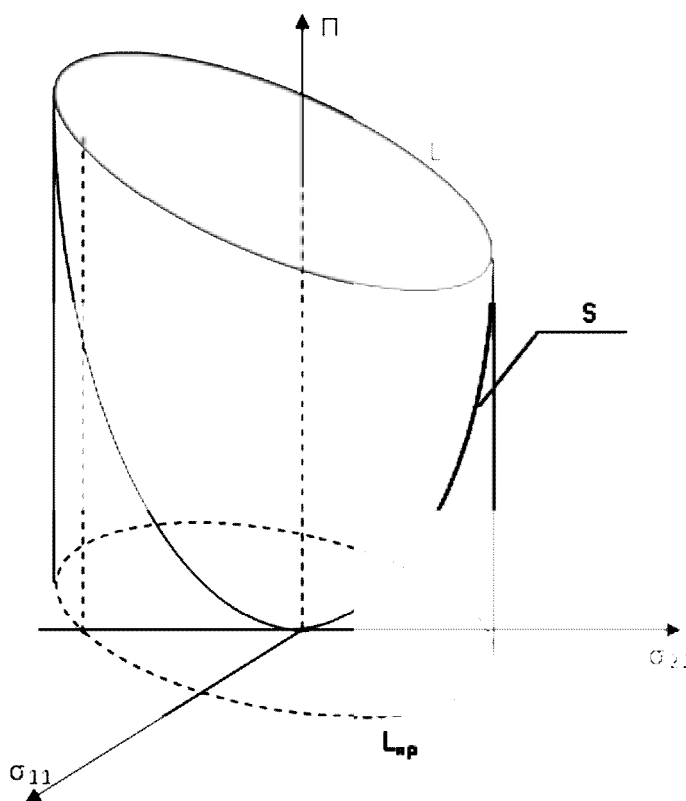


Рис. 1. Поверхні функцій $\Pi(s_{11}; s_{22})$ та $e_v(s_{11}; s_{22})$

Розглянемо випадок коли L є кривою другого порядку. Тоді, оскільки криві другого порядку є плоскими [2], то можна упевнено стверджувати, що L – це лінія перетину криволінійного параболоїда S та площини, якій вона належить. Тоді, задача побудови математичної моделі для визначення кривих, що обмежують області абсолютно пружних двовісних станів деревини в площинах структурної симетрії еквівалентна задачі побудови рівняння проекції лінії перетину параболоїда S та площини, якій належить крива L . Для її розв’язання достатньо знайти розв’язки системи рівнянь складовими якої є рівняння параболоїда S та рівняння зазначеної вище площини. Перша складова цієї системи описується рівнянням (7), а за визначення її другої складової приймемо загальне рівняння площини:

$$\Pi(s_{11}; s_{22}) + Ds_{11} + Es_{22} + F = 0, \tag{9}$$

де D , E та F – сталі площини.

Покажемо, що рівняння (1) та (9) – ідентичні.

Оскільки згідно формул (3) та (4):

$$e_V(s_{11}; 0) = \frac{L}{E_{11}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) - m_{23} m_{32} + (m_{23} m_{31} - m_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + (m_{32} m_{21} - m_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \ddot{s}_{11}; \quad (10)$$

$$e_V(0; s_{22}) = \frac{L}{E_{22}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) - m_{13} m_{31} + (m_{13} m_{32} - m_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + (m_{31} m_{12} - m_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}} \ddot{s}_{22}, \quad (11)$$

то виразивши s_{11} через $e_V(s_{11}; 0)$, а s_{22} через $e_V(0; s_{22})$ та підставивши отримані результати у (9) одержимо

$$\begin{aligned} \Pi(s_{11}; s_{22}) = & - \frac{D}{L \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) - m_{23} m_{32} + (m_{23} m_{31} - m_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + (m_{32} m_{21} - m_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}}} E_{11} e_V(s_{11}; 0) - \\ & - \frac{E}{L \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) - m_{13} m_{31} + (m_{13} m_{32} - m_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + (m_{31} m_{12} - m_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}}} E_{22} e_V(0; s_{22}) - F = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Звідси, для того щоб (1) та (9) були ідентичними необхідно і достатньо, щоб виконувалися співвідношення:

$$D = - \frac{L}{E_{11}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) - m_{23} m_{32} + (m_{23} m_{31} - m_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + (m_{32} m_{21} - m_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \ddot{k}_1; \quad (13)$$

$$E = - \frac{L}{E_{22}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) - m_{13} m_{31} + (m_{13} m_{32} - m_{12}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + (m_{31} m_{12} - m_{32}) \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{33}}} \ddot{k}_2; \quad (14)$$

$$F = -k_3. \quad (15)$$

Отже, оскільки k_1 , k_2 та k_3 – сталі, то на межі переходу з пружної у не пружну область деформування густина потенціальної енергії матеріалу з двовісними напруженими станами $(s_{11}^{-1} 0; s_{22}^{-1} 0; s_{ij} = 0; i, j)$ прямопропорційна відносно об'ємним деформаціям $e_V(s_{11}; 0)$ та $e_V(0; s_{22})$, що і потрібно було показати.

Математична модель переходу матеріалу з пружної у не пружну область деформування та постановка задачі ідентифікації її параметрів

Для розв'язання цієї задачі достатньо з рівняння (7) визначити питому потенціальну енергію матеріалу та отриманий результат підставити у рівняння площини (9). У результаті, з врахуванням формул (8), одержимо шукану математичну модель, яку у подальшому називатимемо умовою переходу матеріалу з абсолютно пружної у не пружну область деформування:

$$\begin{aligned} \Phi(s_{11}, s_{22}) = & 0. \quad (16) \\ \Phi(s_{11}, s_{22}) = & \frac{(1 - m_{23} m_{32})}{2E_{11}} s_{11}^2 + \frac{(m_{13} m_{32} + m_{23} m_{31} - m_{12} - m_{21})}{2\sqrt{E_{11} E_{22}}} s_{11} s_{22} + \frac{(1 - m_{13} m_{31})}{2E_{22}} s_{22}^2 + \\ & + \frac{D}{L} s_{11} + \frac{E}{L} s_{22} + \frac{F}{L}. \end{aligned} \quad (17)$$

Параметри D, E та F отриманого рівняння є сталими площини (9). Тому їх значення повинні бути такими, щоб площина (9) найкращим чином відображала результати експериментальних

вимірювань граничних значень компонентів напружень s_{11} та s_{22} . Такою площиною є площина, значення параметрів якої задовольняють умову:

$$d = d_n(D, E, F) = \min_{n=1}^N d_n^2 \quad (18)$$

Тут d_n – відстань від точки $(\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}, \Pi(\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}))$ до площини (9); $\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}$ – граничні значення компонентів напружень s_{11} та s_{22} , знайдених емпіричним способом.

Згідно методу найменших квадратів для дотримання умови (18) необхідно, щоб параметри D, E та F нелінійного алгебраїчного рівняння (9) задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \frac{d_n^2}{D} = 0; \\ \sum_{n=1}^N \frac{d_n^2}{E} = 0; \\ \sum_{n=1}^N \frac{d_n^2}{F} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Оскільки

$$d_n = d_n(D, E, F) = \frac{|\Pi(\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}) + D\tilde{s}_{11}^{(n)} + E\tilde{s}_{22}^{(n)} + F|}{\sqrt{D^2 + E^2}}, \quad (20)$$

то у розгорнутій формі запису система (18) має вигляд:

$$\begin{cases} j_1(D, E) = 0; \\ j_2(D, E) = 0; \\ NF = -a_{11}D - a_{22}E - b, \end{cases} \quad (21)$$

де

$$j_1(D, E) = \frac{ab}{e} \frac{b-2}{N} a_{11} - b_{11} \frac{\ddot{D}^2}{\emptyset} + \frac{a^2}{e} \frac{\ddot{D}^2}{N} - c \frac{\ddot{D}}{\emptyset} + \frac{a_{11}a_{22}}{e} \frac{\ddot{D}^2}{N} - a_{12} \frac{\ddot{D}^2 E}{\emptyset} + \frac{a_{22} - a_{11}}{e} \frac{\ddot{D}^2 E^2}{\emptyset} + \quad (22)$$

$$+ 2 \frac{a_{22}}{e} \frac{\ddot{D} E}{\emptyset} - b_{22} \frac{\ddot{D} E^2}{\emptyset} + \frac{a}{e} b_{11} - \frac{ba_{11}}{N} \frac{\ddot{E}^2}{\emptyset} + \frac{a}{e} a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{N} \frac{\ddot{E}^3}{\emptyset};$$

$$j_2(D, E) = \frac{a_{22}}{e} \frac{\ddot{E}^2}{N} - b_{22} \frac{\ddot{E}^2}{\emptyset} + \frac{a^2}{e} \frac{\ddot{E}^2}{N} - c \frac{\ddot{E}}{\emptyset} + \frac{a_{11}a_{22}}{e} \frac{\ddot{E}^2}{N} - a_{12} \frac{\ddot{D} E^2}{\emptyset} + \frac{a_{11}^2 - a_{22}^2}{e} \frac{\ddot{D}^2 E}{\emptyset} + \quad (23)$$

$$+ \frac{a_{11}}{e} \frac{2b-1}{N} - 2b_{11} \frac{\ddot{D} E}{\emptyset} + \frac{a}{e} b_{22} - \frac{ba_{22}}{N} \frac{\ddot{D}^2}{\emptyset} + \frac{a}{e} a_{12} - \frac{a_{11}a_{22}}{N} \frac{\ddot{D}^3}{\emptyset};$$

$$a_{11} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \tilde{s}_{11}^{(n)}; \quad a_{22} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \tilde{s}_{22}^{(n)}; \quad a_{12} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \tilde{s}_{11}^{(n)} \tilde{s}_{22}^{(n)}; \quad b = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \Pi(\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}); \quad c = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \tilde{s}_{11}^{(n)} \tilde{s}_{22}^{(n)}; \quad (24)$$

$$b_{11} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \tilde{s}_{11}^{(n)} \Pi(\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}); \quad b_{22} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N \tilde{s}_{22}^{(n)} \Pi(\tilde{s}_{11}^{(n)}, \tilde{s}_{22}^{(n)}); \quad q = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^N (\tilde{s}_{11}^{(n)})^2 - (\tilde{s}_{22}^{(n)})^2 \frac{\ddot{D}}{\emptyset}.$$

Отже, задача ідентифікації параметрів D, E та F математичної моделі (16) – (17) еквівалентна задачі визначення розв'язків системи алгебраїчних рівнянь (21) за даними емпіричних досліджень матеріалу на граничний напружений стан.

Алгоритм практичної реалізації математичної моделі

Згідно рівняння (16) та системи рівнянь (21), а також формул (17) та (22)–(24) для визначення та прогнозування граничних напружених станів ортотропних матеріалів із заданими фізико-механічними характеристиками необхідно вирішити такі задачі: 1) розв'язати систему рівнянь (21); 2) побудувати алгоритм для знаходження коренів нелінійного алгебраїчного рівняння (16).

Для спрощення процедури розв'язання першої задачі зазначимо, що оскільки третє рівняння системи (21) є лінійним, а два перших є не залежними від параметра F , то задача пошуку розв'язків цієї системи еквівалентна задачі знаходження розв'язків системи:

$$\begin{cases} j_1(D, E) = 0; \\ j_2(D, E) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

складовими якої є два перші рівняння системи (21), та подальшому знаходженні параметра F із третього рівняння системи (21).

В основі розв'язання системи рівнянь (25) покладено багатокроковий метод [3], алгоритм практичної реалізації якого полягає в обґрунтуванні початкового наближеного розв'язку (D_0, E_0) задачі та його подальшому уточненні за такими ітераційними формулами:

$$Y^{(k)} = X^{(k)} - \frac{2}{3} J^{-1}(X^k) G(X^k); \quad (26)$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{2}{3} \frac{3J(Y^{(k)}) - J(X^{(k)})}{J(Y^{(k)}) - J(X^{(k)})} J^{-1}(X^k) FG(X^k), \quad (27)$$

де I – одинична матриця; $X = (D, E)^T$ – вектор змінних; $G(X) = (j_1(X), j_2(X))^T$ – вектор-функція; $J(X)$ – матриця Якобі.

Для визначення наближеного розв'язку системи (25) припустимо, що результати експериментальних досліджень ортотропного матеріалу на одновісний розтяг та стиск у напрямках анізотропії є відомими. Зокрема, вважатимемо, що в умовах одновісного розтягу та стиску вздовж одного з напрямків анізотропії $s_{11} = s_{11}^+$ та $s_{11} = s_{11}^-$ відповідно, а вздовж іншого напрямку – $s_{22} = s_{22}^+$ та $s_{22} = s_{22}^-$. Тоді, оскільки за умовою задачі пари чисел $(s_{11}^+, 0)$, $(s_{11}^-, 0)$, $(0; s_{22}^+)$ та $(0; s_{22}^-)$ є наближеними розв'язками рівняння (16), то D_0 та E_0 є наближеними розв'язками таких систем рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{(1 - m_{23} m_{32})}{2E_{11}} s_{11}^+ + \frac{D_0}{L} s_{11}^+ + \frac{F}{L} = 0; \\ \frac{(1 - m_{23} m_{32})}{2E_{11}} s_{11}^- + \frac{D_0}{L} s_{11}^- + \frac{F}{L} = 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{(1 - m_{13} m_{31})}{2E_{22}} s_{22}^+ + \frac{E_0}{L} s_{22}^+ + \frac{F}{L} = 0; \\ \frac{(1 - m_{13} m_{31})}{2E_{22}} s_{22}^- + \frac{E_0}{L} s_{22}^- + \frac{F}{L} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

Звідси

$$D_0 = - \frac{(1 - m_{23} m_{32})}{2E_{11}} L (s_{11}^+ + s_{11}^-); \quad E_0 = - \frac{(1 - m_{13} m_{31})}{2E_{22}} L (s_{22}^+ + s_{22}^-). \quad (30)$$

Отже, початковий наближений розв'язок системи рівнянь (25) є залежним лише від фізико-механічних характеристик досліджуваного матеріалу.

Для визначення коренів нелінійного рівняння (16) використано метод неперервного продовження за найкращим параметром [4], ідея якого полягає у зведенні задачі побудови розв'язків нелінійного алгебраїчного рівняння другого порядку (16) до інтегрування задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{ds_{11}}{dl} = m \frac{f_{11}}{\sqrt{f_{11}^2 + f_{22}^2}}, & s_{11}(0) = s_{11}^+; \\ \frac{ds_{22}}{dl} = \pm \frac{f_{22}}{\sqrt{f_{11}^2 + f_{22}^2}}, & s_{22}(0) = 0, \end{cases} \quad (31)$$

де

$$f_{11} = \frac{\Phi(s_{11}, s_{22})}{s_{11}}; \quad f_{22} = \frac{\Phi(s_{11}, s_{22})}{s_{22}}; \quad (32)$$

$$dl^2 = ds_{11}^2 + ds_{22}^2. \quad (33)$$

Незалежні змінні s_{11} та s_{22} є функціями параметра λ , який відраховується від точки $(s_{11}^+; 0)$ вздовж дотичної до кривої (16).

Отже, алгоритм числової реалізації математичної моделі (16)–(17) – алгоритм побудови кривих розмежування абсолютно пружної та не пружної областей деформування анізотропних матеріалів – полягає у:

1) Визначенні параметрів D та E моделі із системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (25). Для знаходження розв'язків D та E системи (25) пропонується використати багатокроковий метод, а саме ітераційні формули (26) – (27). За початкове наближення розв'язку системи (25) приймаються числові значення D_0 та E_0 параметрів D та E визначені із формул (30);

2) Визначенні числового значення параметра F моделі із третього рівняння системи (21);

3) Побудові кривої (16) методом неперервного продовження за найкращим параметром – в інтегруванні задачі Коші (31) – (33) числовим методом Рунге-Кутти четвертого порядку із заданим кроком інтегрування Δl .

Результати математичного моделювання граничних одновісних напружених станів деревини у напрямках ортотропії та їх аналіз

Покажемо, що математична модель (16) та складові (3)–(5) математичної моделі (1)–(5) дають змогу виявити та обґрунтувати особливості переходу анізотропного матеріалу з абсолютно пружної у не пружну область деформування в умовах одновісних випробовувань на стиск(розтяг) у напрямках анізотропії. Для цього прирівняємо одну із компонентів тензора напружень, наприклад, компоненту s_{22} до нуля. У результаті із рівняння (16) отримаємо рівняння для визначення меж пропорційності розтягу s_{11}^+ та стиску s_{11}^- матеріалу в аксіальному (a), радіальному (r) та тангенціальному (t) напрямках ортотропії:

$$\begin{aligned} s_{11}^2 - \frac{2}{1 - m_{23}m_{32}} \frac{\sigma}{\epsilon} - m_{23}m_{32} + (m_{23}m_{31} - m_{21}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + (m_{32}m_{21} - m_{31}) \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \frac{\sigma}{\epsilon} s_{11} - \\ - \frac{2E_{11}}{(1 - m_{23}m_{32})L} k_3 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Справді, якщо у (34) індекси “1”, “2” та “3” замінити на символи “a”, “r” та “t” відповідно, то матимемо рівняння для визначення меж пропорційності матеріалу s_{aa}^+ та s_{aa}^- в аксіальному напрямку:

$$s_{aa}^2 - a_a k_a s_{aa} - \frac{2E_{aa}}{(1 - m_r m_r)L} k_3 = 0, \quad (35)$$

де

$$a_a = \frac{2}{1 - m_t m_r} \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon} - m_r m_r + (m_r m_{ra} - m_{ra}) \sqrt{\frac{E_{aa}}{E_{rr}}} + (m_r m_{ra} - m_{ra}) \sqrt{\frac{E_{aa}}{E_{tt}}} \ddot{\phi}. \quad (36)$$

Для радіального напрямку анізотропії доцільною є заміна індексів “1”, “2” та “3” на “r”, “a” та “t”, а для тангенціального – на “t”, “r” та “a”. Для радіального та тангенціального напрямків ортотропії рівняння (34) має такий вигляд:

$$s_{rr}^2 - a_r k_r s_{rr} - \frac{2E_{rr}}{(1 - m_{at} m_a)L} k_3 = 0; \quad (37)$$

$$s_{tt}^2 - a_t k_t s_{tt} - \frac{2E_{tt}}{(1 - m_{ra} m_r)L} k_3 = 0, \quad (38)$$

де

$$a_r = \frac{2}{1 - m_{at} m_a} \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon} - m_{at} m_a + (m_{at} m_r - m_{ar}) \sqrt{\frac{E_{rr}}{E_{aa}}} + (m_a m_{ar} - m_r) \sqrt{\frac{E_{rr}}{E_{tt}}} \ddot{\phi}; \quad (39)$$

$$a_t = \frac{2}{1 - m_{ra} m_r} \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon} - m_{ra} m_r + (m_{ra} m_t - m_{rt}) \sqrt{\frac{E_{tt}}{E_{rr}}} + (m_{s2} m_{s1} - m_{s1}) \sqrt{\frac{E_{tt}}{E_{aa}}} \ddot{\phi}. \quad (40)$$

Для обґрунтування достовірності математичної моделі (16) проаналізуємо формули для визначення сум розв’язків кожного з рівнянь (35), (37) та (38):

$$s_{aa}^+ + s_{aa}^- = a_a k_a; \quad (41)$$

$$s_{rr}^+ + s_{rr}^- = a_r k_r; \quad (42)$$

$$s_{tt}^+ + s_{tt}^- = a_t k_t. \quad (43)$$

Для розв’язання поставленої задачі визначено значення коефіцієнтів a_a , a_r та a_t для деревини сосни та ялини, емпіричні значення фізико-механічних характеристик яких наведені у табл.1. Результати обчислень коефіцієнтів a_a , a_r та a_t наведено у табл. 2.

Таблиця 1

Фізико-механічні характеристики деревини з температурою $T = 20^\circ\text{C}$ та відносною вологістю $W = 12\%$ [5]: у чисельнику – значення розтягу, а в знаменнику – значення стиску

Порода	Модулі пружності, МПа			Межі пропорційності, МПа			Коефіцієнти Пуассона					
	E_{aa}	E_{rr}	E_{tt}	σ_{aa}	σ_{rr}	σ_{tt}	μ_{ar}	μ_{at}	μ_{rt}	μ_{ra}	μ_{ta}	μ_{tr}
Сосна	11300	1740	900	$\frac{102}{46,3}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{7,8}{14}$	0,078	0,045	0,306	0,504	0,463	0,527
Береза	20370	1190	640	$\frac{137}{54}$	$\frac{11,1}{11,3}$	$\frac{6,5}{6,1}$	0,029	0,013	0,321	0,341	0,445	0,566

Проведено аналіз результатів розрахунку знаків значень коефіцієнтів a_a , a_r та a_t і на його основі встановлено, що не залежно від породи деревини a_r та a_t є додатними, а a_a – від’ємними. Це означає, що для того щоб математичні моделі (16) та (34) задовільно відображали особливості асиметрії меж пропорційності деревини сосни та берези у напрямках анізотропії необхідно, щоб значення сталих k_r та k_t були від’ємними, а значення сталої k_a – додатними. Бо лише у цьому випадку абсолютні граничні значення напружень розтягу є меншими за абсолютні граничні значення напружень стиску деревини, випробовуваної на одновісний розтяг(стиск) в одному із напрямків ортотропії поперек волокон. Вздовж волокон навпаки: абсолютне значення межі пропорційності розтягу є більшим за абсолютне значення межі пропорційності стиску.

Таблиця 2

Результати розрахунку значень коефіцієнта α для деревини з температурою $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$ та відносною вологістю $W = 12\%$

Порода	Напрямок анізотропії		
	Радіальний, r	Тангенціальний, t	Аксіальний, a
Сосна	0,56234	1,563384	-1,86955
Береза	0,47231	1,52973	-3,47833

Для обґрунтування виявлених особливостей деформативності деревини за формулами (3)-(4) та даними табл.1 визначено граничні значення компонентів тензора відносних деформацій та відносних об’ємних деформацій для зазначених вище порід деревини. Результати обчислень наведено у табл.3.

Проведено аналіз розрахункових даних і на його основі встановлено, що відносна об’ємна деформація деревини ϵ_v , випробовуваної на міцність в умовах одновісного розтягу (стиску), є залежною як від способу, так і від напрямку деформування. Справді, за даними табл.1 та табл.2, для деревини сосни з одновісними напруженими станами розтягу ($\sigma_a = 102$ МПа; $\sigma_r = \sigma_t = 0$ МПа) та стиску ($\sigma_a = 46,3$ МПа; $\sigma_r = \sigma_t = 0$ МПа) в аксіальному напрямку анізотропії значення цієї величини є протилежними за знаком і приблизно дорівнюють -1,36 % та 0,62 % відповідно. Це означає, що розтяг деревини вздовж волокон призводить до зменшення її об’єму, а стиск до його збільшення. Поперек волокон навпаки: одновісний розтяг спричиняє збільшення об’єму деревини, а одновісний стиск його зменшення. Так, наприклад, для деревини сосни з напруженими станами розтягу ($\sigma_r = 10$ МПа; $\sigma_a = \sigma_t = 0$ МПа) та стиску ($\sigma_r = 12$ МПа; $\sigma_a = \sigma_t = 0$ МПа) у радіальному напрямку ортотропії $\epsilon_v \approx 1,53$ % та $\epsilon_v \approx -2,68$ % відповідно. Окрім цього для деревини хвойних порід встановлено, що якщо у матеріалі з одновісним граничним напруженим станом в одному з напрямків ортотропії значення відносної деформації є додатним, то у двох інших напрямках значення цієї величини є від’ємними. У протилежних випадках навпаки: якщо у матеріалі з одновісним граничним напруженим станом в одному з напрямків ортотропії значення відносної деформації є від’ємним, то у двох інших напрямках значення цієї величини є додатними. Наприклад, для деревини сосни з одновісним граничним напруженим станом розтягу у тангенціальному напрямі ($\sigma_t = 7,8$ МПа; $\sigma_a = \sigma_r = 0$ МПа) значення тангенціальної компоненти тензора деформацій є додатним і приблизно дорівнює 2,289 %, а значення -0,784 % та -0,012 % радіальної та аксіальної компонентів відповідно є від’ємними (табл.2). Для листяних порід виявлена закономірність є справедливою лише для деревини з одновісними граничними напруженими станами у напрямках анізотропії поперек волокон, а для деревини з одновісними

напруженими станами розтягу (стиску) вздовж волокон вона не виконується. Справді, за даними табл.2, для берези з одновісним граничним напруженим станом розтягу ($\sigma_a = 137$ МПа; $\sigma_t = \sigma_r = 0$ МПа) або стиску ($\sigma_a = 54$ МПа; $\sigma_t = \sigma_r = 0$ МПа) в аксіальному напрямку ортотропії значення аксіальної (ϵ_a), радіальної (ϵ_r) та тангенціальної (ϵ_t) компонентів тензора деформацій у випадку розтягу приблизно дорівнюють 0,776 %, -2,44 % та 0,153 % відповідно, а у випадку стиску – $\epsilon_a \approx -0,344$ %, $\epsilon_r \approx 1,028$ %, $\epsilon_t \approx -0,067$ %.

Таблиця 3

Розрахункові значення граничних відносних деформацій для деревини з температурою $T = 20$ °C та відотною вологістю $W=12\%$, випробовуваної в умовах одновісного розтягу (стиску) в аксіальному (a), радіальному (r) та тангенціальному (t) напрямках анізотропії

Порода деревини	Граничні відносні деформації	Розтяг			Стиск		
		a	t	r	a	t	r
Сосна	аксіальна складова ϵ_a , %	0,872	-0,012	-0,002	-0,396	0,021	0,002
	тангенціальна складова ϵ_t , %	-0,345	2,289	-1,022	0,157	-4,109	1,23
	радіальна складова ϵ_r , %	-1,883	-0,784	2,553	0,855	1,408	-3,06
	об'ємна ϵ_v , %	-1,356	1,493	1,530	0,616	-2,68	-1,84
Береза	аксіальна складова ϵ_a , %	0,776	-0,008	-0,006	-0,344	0,007	0,006
	тангенціальна складова ϵ_t , %	0,153	2,342	-1,569	-0,067	-2,022	1,598
	радіальна складова ϵ_r , %	-2,440	-0,943	2,894	1,028	0,855	-2,947
	об'ємна ϵ_v , %	-1,511	1,393	1,319	0,617	-1,160	-1,343

Отже, у випадку розтягу деревини листяних порід вздовж волокон до межі міцності спостерігається зменшення його лінійних розмірів у радіальному та їх збільшення у тангенціальному напрямках анізотропії, а у випадку стиску навпаки: збільшення у радіальному та зменшення у тангенціальному напрямках. Для деревини хвойних порід: розтяг вздовж волокон супроводжується зменшенням його лінійних розмірів як у радіальному так і в тангенціальному напрямках структурної симетрії, а у випадку стиску – лінійні розміри матеріалу поперек волокон збільшуються.

Результати математичного моделювання граничних двовісних напружених станів деревини та їх аналіз

З метою розв'язання поставленої задачі проведено числові експерименти для визначення граничних напружень у деревині різних порід. Зокрема, у середовищі MATLABR2012b реалізовано вище запропонований алгоритм для дослідження математичної моделі (16)–(17) та за даними табл.1 побудовано криві розмежування абсолютно пружної та не пружної областей деформування для сосни з двовісними напруженими станами у площинах структурної симетрії. Результати побудови наведено на рис. 2.

Проведено аналіз отриманих результатів дослідження і на його основі встановлено, що характеристики побудованих кривих задовольняють основним евристичним вимогам щодо побудови відомих механічних теорій міцності [6], згідно яких криві граничного напруженого стану для анізотропних матеріалів повинні: 1) охоплювати початок декартової системи координат; 2) бути плавними та випуклими.

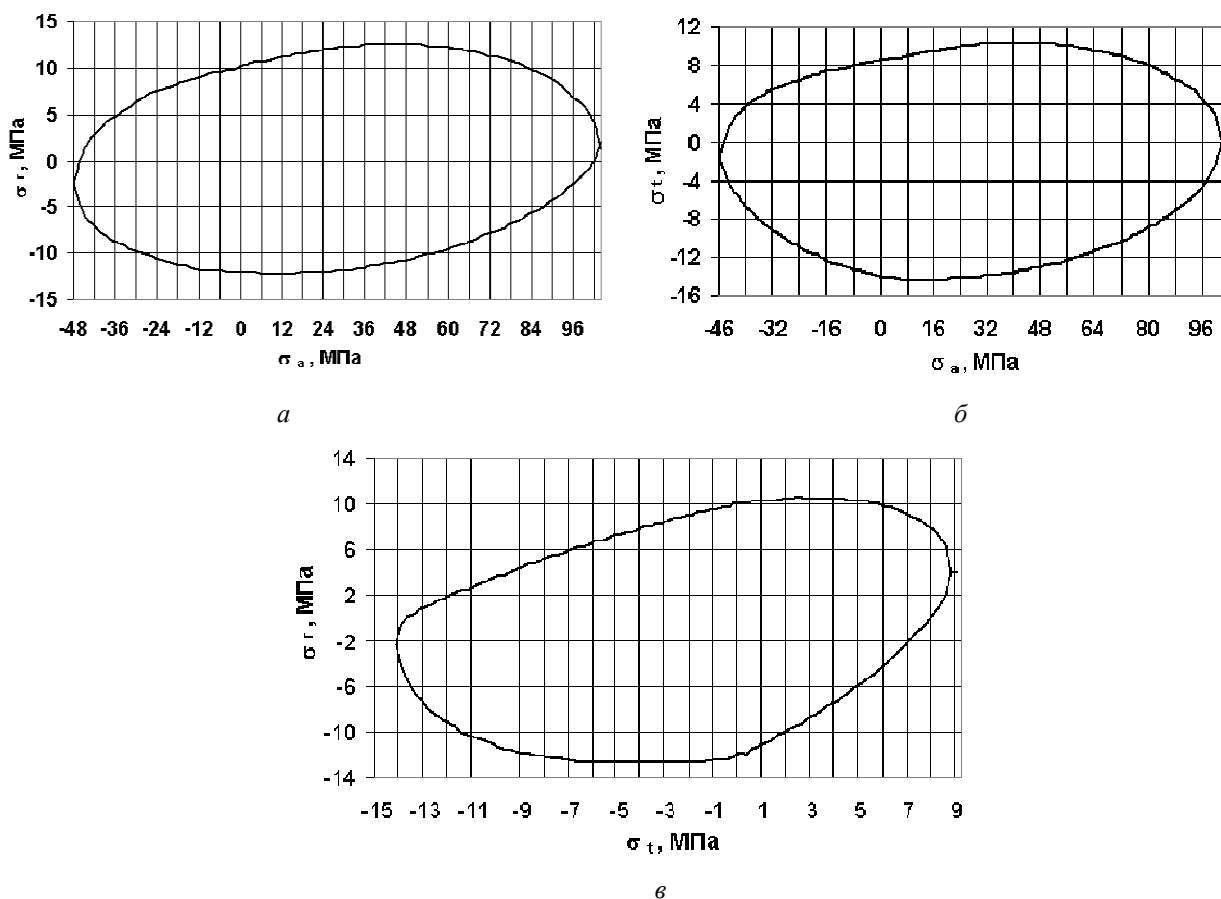


Рис. 2. Криві розмежування пружної та не пружної області деформування деревини сосни з температурою $T = 20^{\circ}\text{C}$, відотною вологістю $W = 12\%$ та двовісним напруженим станом у радіально-аксіальній (а), аксіально-тангентальній (б) та радіально-тангентальній (в) площинах структурної симетрії

Висновки

1. Побудовано нову математичну модель для визначення області пружної поведінки анізотропних матеріалів в умовах двовісних навантажень, яка на відміну від відомих моделей дає змогу не лише задовільно описати, але і обґрунтувати геометрію цієї області для матеріалів коефіцієнти асиметрії меж пропорційності яких у різних напрямках анізотропії є різними.

2. Проведено адаптацію числових методів, а саме методу неперервного продовження за найкращим параметром, методу Рунге-Кутти та багатокрокових методів для побудови кривих розмежування двовісних абсолютно пружних та не пружних областей деформування сосни у площинах структурної симетрії.

3. Проведено порівняльний аналіз числових та експериментальних даних і на його основі показано, що вони добре корелюють між собою. І тим самим підтверджено адекватність запропонованої у даній роботі математичної моделі, та правильність припущень покладених в її основі.

1. Поберейко С.Б., Соколовський Я.І., “Математична модель міцності анізотропних матеріалів в умовах двовісного напруженого стану”, Вісник НУ “Львівська політехніка” : Комп’ютерні науки та інформаційні технології, Львів : НУ “Львівська політехніка”, 2016, № 604, с. 148–153.

2. Mustafa Q., Khirallah M. A., “Hafiz. Solving system of nonlinear equations using family of Jarratt methods”, International Journal of Differential Equations and Applications, 2013, Vol.12., № 2, pp. 69 – 83, (багатокрокові методи).

3. Жмурко М. А., Красношлик Н. О., “Порівняння багатокрокових ітераційних методів вищих порядків розв’язування нелінійних рівнянь та систем”, *Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика*, 2015, № 18 (351), с. 1–8, (багатокрокові методи).

4. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С., “Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2017, Т. 57, №6, с. 914–933, (метод продолжения по наилучшему параметру).

5. Боровиков А. М., Уголев Б. Н., “Справочник по древесине”, Москва : Лесная промышленность, 1989, с.296.

6. Божидарник В. В., Сулим Г. Т., “Елементи теорії пластичності та міцності”, Львів : Світ, 1999, Т. 1, с.532.

S. Holovata

Lviv Polytechnic National University

MATHEMATICAL MODELING OF AREA BOUNDARY OF BIAXIAL ABSOLUTELY ELASTIC STATES OF WOOD

© Holovata S., 2020

In the paper, the mathematical model for determination of the region boundary of biaxial elastic states of orthotropic materials is synthesized and the system of nonlinear algebraic equations for identification of its parameters is obtained. Using the continuous method of solution continuation concerning the best parameter and the Runge-Kutta method, the demarcation curves of absolutely elastic and non-elastic deformation regions for pine trees are depicted. The analysis of the obtained curves is carried out and on its base, it is shown that the proposed model makes possible to determine and substantiate the ultimate stress states of materials whose the asymmetry coefficients of the boundaries of proportionality in some anisotropy directions are greater, and in others less than one.

Key words: mathematical model, parametric identification, least square method, continuous method of solution continuation concerning the best parameter, Runge-Kutta method.