Issue 10, 2021

https://doi.org/10.23939/sisn2021.10.013

УДК 004.[852+94]; 519.837.3

ІГРОВА САМООРГАНІЗАЦІЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ЦИКЛУ ГРАФА

Петро Кравець, Володимир Пасічник, Микола Проданюк

Національний університет "Львівська політехніка",
E-mail: Petro.O.Kravets@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-8569-423X;
E-mail: Volodymyr.V.Pasichnyk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0002-5231-6395;
E-mail: Mykola.M.Prodaniuk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-9544-3792

У роботі запропоновано нове застосування моделі стохастичної гри для розв'язування задачі самоорганізації гамільтонового циклу графа. Для цього у вершинах неорієнтованого графа розміщено ігрових агентів, чисті стратегії яких є варіантами вибору одного із інцидентних ребер. Випадковий вибір стратегій усіма агентами утворює набір локальних шляхів, що розпочинаються у кожній вершині графа. Поточні платежі гравців визначено як функції програшів, залежні від стратегій сусідніх гравців, які контролюють суміжні вершини графа. Ці функції сформовано зі штрафу за вибір протилежних стратегій сусідніми гравцями та штрафу за стратегії, які призвели до зменшення довжини локального шляху.

Випадковий вибір чистих стратегії гравців спрямовано на мінімізацію їх функцій середніх програшів. Генерування послідовностей чистих стратегій виконано за дискретним розподілом, побудованим на основі динамічних векторів змішаних стратегій. Елементи векторів змішаних стратегій є імовірностями вибору відповідних чистих стратегій, які адаптивно враховують значення поточних програшів.

Формування векторів змішаних стратегій визначено за марковським рекурентним методом, для побудови якого використано градієнтний метод стохастичної апроксимації. У ході гри метод збільшує значення імовірностей вибору тих чистих стратегій, які призводять до зменшення функцій середніх програшів. Для заданих способів формування поточних платежів результатом стохастичної гри є утворення патернів самоорганізації у вигляді циклічно зорієнтованих стратегій ігрових агентів. Умови збіжності рекурентного методу до колективно оптимальних розв'язків забезпечено дотриманням фундаментальних умов стохастичної апроксимації.

Виконано розширення ігрової задачі на випадкові графи. Для цього вершинам приписано імовірності відновлювальних відмов, які спричиняють зміну структури графа на кожному кроці гри. Реалізації випадкового графа адаптивно враховуються під час пошуку гамільтонових циклів. Збільшення імовірності відмов сповільнює збіжність стохастичної гри.

Комп'ютерне моделювання стохастичної гри забезпечило отримання патернів самоорганізації стратегій агентів у вигляді декількох локальних циклів або глобального гамільтонового циклу графа залежно від способів формування поточних програшів гравців. Достовірність експериментальних досліджень підтверджено повторенням реалізацій патернів самоорганізації для різних послідовностей випадкових величин.

Результати дослідження можна використати на практиці для ігрового розв'язування NP-складних задач, транспортних і комунікаційних задач, для побудови протоколів автентифікації у розподілених інформаційних системах, для колективного прийняття рішень в умовах невизначеності.

Ключові слова: самоорганізація; поведінковий патерн; граф; гамільтонів цикл; стохастична гра агентів; марковський рекурентний метод.

Вступ

Раціональне функціонування природних та штучних розподілених систем можливе за рахунок скоординованої (узгодженої) роботи їхніх активних елементів або агентів. У таких системах кожен агент має локальну стратегію поведінки, зумовлену критеріями виживання та розмноження у мінливому середовищі. За відсутності координації дії агентів будуть хаотичними і їхня популяція не має шансів на виживання. Координація дій агентів повинна бути спрямована на формування глобальної стратегії поведінки системи загалом – досягнення певного балансу локальних цілей системи агентів, відхилення від якого стає невигідним окремим агентам або групам агентів [1, 2].

Координація може бути централізованою (вертикальною) або децентралізованою (горизонтальною). Вертикальна координація має один центр або ієрархічно підпорядковані центри, а горизонтальна реалізується завдяки узгодженню дій безпосередньо між усіма агентами або у межах невеликих груп агентів. Ієрархічна централізована координація потребує високого рівня соціальної організованості агентів. У централізованих системах інформаційні потоки протікають швидко, переважно згори донизу, ентропія та час реакції у таких системах мінімальні, але затрати на підтримання існування можуть бути великими. Децентралізована координація не потребує високого рівня соціальної організованості агентів, є демократичнішою, оскільки інформаційні потоки формуються здебільшого на низових рівнях системи, затрати мінімізовані, але ентропія та час вироблення узгодженої реакції будуть значно більшими, ніж у централізованих системах. Децентралізована координація – природніша форма співіснування агентів у ході їхньої організаційної еволюції [3, 4].

Децентралізована координація дій агентів формується під час їх прямої локальної взаємодії та багатораундового обміну інформацією між собою. Результатом цілеспрямованої децентралізованої координації є самовільне досягнення глобальної координації або самоорганізації агентів, яка проявляється у вигляді сформованих поведінкових патернів у межах усієї децентралізованої системи.

Самоорганізація – це цілеспрямований просторово-часовий процес створення, упорядкування або вдосконалення структури та функцій складної відкритої динамічної системи за рахунок її внутрішніх факторів без організувального зовнішнього впливу. Необхідними умовами самоорганізації складних систем є багатоваріантність, альтернативність та випадковість дій агентів, керованих процесом самонавчання та адаптацією до невизначеностей [5–7].

Патерн самоорганізації – це регулярний (нехаотичний) розподіл конструктивних елементів системи або їхніх станів у часі та просторі, що дає змогу цілісно описати систему, не здійснюючи характеристику усіх її складових елементів. Патерни проявляються на макрорівні та є наслідком локальних взаємодій елементів на мікрорівні [8].

Поведінкові патерни визначають форму впорядкованих дій агентів, що виникає із хаосу завдяки процесу координації. Поведінковий патерн – це системна, глобально скоординована поведінка групи агентів, яка виникає на основі їхньої локальної взаємодії у ході багатокрокового адаптивного навчання [9, 10].

Структурну модель децентралізованої системи зручно подати у вигляді графа, вершини якого позначають агентів, а ребра визначають можливість спостереження внутрішніх станів сусідніх агентів та локального обміну інформацією між ними. Тоді, залежно від стратегій поведінки агентів, патерни самоорганізації можуть проявлятися у вигляді комбінаторних утворень у межах графа – остових дерев, розфарбованих вершин, ейлерових або гамільтонових циклів тощо [11, 12].

На практиці застосовують ті комбінаторні утворення на графах, завдання побудови яких належить до класу NP-складних, тобто не дає змоги знаходити точний розв’язок повним перебором варіантів для графів великого порядку за прийнятний поліноміальний час [13, 14]. Однією з таких задач є пошук гамільтонового циклу графа. Гамільтоновим циклом у графі називається неперервний шлях, який проходить через всі вершини графа тільки один раз. Наприклад, задача комівояжера (the Travelling Salesman Problem) полягає у пошуку мінімального гамільтонового циклу в навантаженому графі [14, 15].

Не кожен граф має гамільтонів цикл. На відміну від ейлерових циклів, не відомі достовірні умови того, чи заданий граф має гамільтонів цикл. В окремих випадках можна керуватися твердженнями щодо залежності існування гамільтонових циклів від степенів вершин графа [16].

Для пошуку гамільтонових циклів можна використовувати точні або наближені (евристичні) методи. Хоча евристичні методи не гарантують отримання оптимального розв'язку, але вони переводять задачу в клас поліноміальної складності, оптимізуючи перебір можливих варіантів.

До цього класу належить також описаний у цій статті метод стохастичної гри для самоорганізації гамільтонового циклу неорієнтованого графа. Його можливою перевагою є те, що завдяки самонавчанню та адаптації до невизначеностей він може знаходити гамільтонів цикл не тільки у детермінованих, але і у випадкових графах. До недоліків стохастичного ігрового методу можна зарахувати порівняно невеликий, степеневий порядок швидкості збіжності, зумовлений апріорною невизначеністю розподіленої системи.

Практичні застосування гамільтонових циклів

Гамільтонові цикли графів широко застосовують у різних галузях [17]. Їх використовують для розв'язування різних варіантів задачі комівояжера для оптимальної маршрутизації [18–23], моделювання збирання геному за його виділеними фрагментами [24], ідентифікації особи за відбитками пальців [25], комунікаційного менеджменту [26], побудови криптографічних протоколів автентифікації із нульовим розголошенням знань [27] та інших.

Нульове розголошення знань – це інтерактивний метод, за допомогою якого одна сторона A (надає докази) може довести іншій стороні B (перевіряє докази), що вона знає деяке значення x (твердження, об'єкт або секретний ключ), не повідомляючи його стороні B. Цей метод вперше запропонували у 1985 р. Ш. Голдвассер, С. Мікалі та Ч. Ракофф (S. Goldwasser, S. Micali, C. Rackoff) у роботі "Складність знань інтерактивних доказових систем".

Доказ із нульовим розголошенням має такі властивості:

1. Повнота: якщо твердження x справді правильне, то A переконає у цьому B.

2. Коректність: якщо твердження x неправильне, то навіть нечесний A не зможе переконати B, за винятком зовсім малої імовірності.

3. Нульове розголошення: якщо твердження x слушне, то будь-який навіть нечесний B не дізнається нічого, крім самого факту, що твердження правильне.

У криптографії метод із нульовим розголошенням знань використовують для побудови протоколів автентифікації особи, тобто для перевірки того, чи ця особа є справді тим, за кого вона себе видає. Як значення x використовується результат розв'язування будь-якої NP-складної задачі, наприклад, знаходження гамільтонового шляху графа. Доказ із нерозголошенням знання гамільтонового циклу у графі вперше запропонував М. Блюм (M. Blum) у 1986 р.

Нехай граф складається з n вершин, пронумерованих числами 1, 2,..., n, і у ньому є гамільтонів цикл. Тоді методом перебору всіх перестановок у симетричній групі Q_n можна знайти гамільтонів цикл. Оскільки $|Q_n| = n!$, то такий метод повного перебору варіантів практично неможливо реалізувати за прийнятний час. Відомо, що задача знаходження гамільтонового циклу в графі є NP-повною.

Розглянемо протокол, в якому абонент A доводитиме абоненту B, що він знає гамільтонів цикл у деякому графі G так, щоб абонент B не отримав ніяких знань про цей цикл (доказ із нульовим розголошенням). Нехай абонент A знає гамільтонів цикл у графі G з n вершин, який передав йому довірений центр. Він може це довести абоненту B за допомогою описаного нижче протоколу.

Протокол доказу без розголошення таємниці складається із t раундів, кожен з яких виконує такі кроки:

1) абонент A випадково вибирає перестановку $\tau \in \Theta_n$ і застосовує її до номерів вершин графа G, отримавши при цьому ізоморфний граф $H = \tau(G)$. Знаючи гамільтонів цикл в графі G, абонент A знає гамільтонів цикл і в графі H. Граф H передається верифікатору B;

2) абонент B, отримавши граф H, довільно вибирає $b \in \{0,1\}$ і передає b абоненту A;

3) якщо $b = 0$, то абонент A надає абоненту B перестановку τ (тим самим показуючи, що він знає ізоморфізм графів G і H). Якщо $b = 1$, то абонент A надає верифікатору B гамільтонів цикл графа H (вважається, що з гамільтонового циклу H неможливо обчислити гамільтонів цикл у G);

4) абонент B перевіряє, що в разі $b = 0$ пред'явлена перестановка τ справді переводить граф G в граф H , а в разі $b = 1$ перевіряє гамільтонів цикл графа H .

У кожному раунді абонент B вибирає новий випадковий біт, який невідомий A, тому, щоб A зміг відповісти на обидва питання, потрібно, щоб граф H був справді ізоморфний графу G і абонент A повинен знати гамільтонів цикл у графі H і відповідно в G. Тому, після достатньої кількості раундів, абонент B може бути впевнений у тому, що в A справді є гамільтонів цикл графа G. З іншого боку, A не розкриває ніякої інформації про гамільтонові цикли в G. І навіть більше, B складно буде довести будь-кому ще, що він сам або A знає гамільтонів цикл у G.

Припустимо, що A не знає гамільтонового циклу у графі G і хоче ошукати B. Тоді A необхідний неізоморфний G граф G', в якому він таки знає гамільтонів цикл. У кожному раунді він може передавати абоненту B або граф H', ізоморфний G', або граф H , ізоморфний G. Якщо B попросить довести ізоморфізм і був переданий граф H , то обман не розкриється. Аналогічно, якщо він просить показати гамільтонів цикл і був переданий граф H'. У такому випадку імовірність того, що A таки ошукає B після t раундів, дорівнює 2^{-t}, що є незначним за достатньої кількості раундів.

Огляд методів знаходження гамільтонових циклів графа

Пошук гамільтонового циклу є частковим випадком задачі комівояжера, яка знаходить найкоротший гамільтонів шлях навантаженого графа.

Комбінаторні методи пошуку гамільтонових циклів графа розділяють на ті, що забезпечують точні розв'язки, та евристичні, які дають наближені розв'язки [28, 29].

Методи першої групи основані на повному переборі варіантів або на детермінованих обчисленнях і можуть бути застосовані для задач порівняно невеликої розмірності. Евристичні методи використовують деякі удосконалення, інтуїтивні здогадки для зменшення кількості перебірних варіантів. Частина з них є імовірнісними методами, що покладаються на випадковий вибір варіантів із можливістю відбору та запам'ятовування кращих рішень. Евристичні методи забезпечують наближене до оптимального розв'язування задачі за прийнятний поліноміальний час.

Вперше задачу комівояжера сформулювали як задачу лінійного програмування Део і Хакімі (N. Deo, S.L. Hakimi, 1965).

Нехай $\left[c_{i,j} > 0 \,|\, i, j = 1..n \right]$ – матриця ваг (або відстаней) ребер графа порядку n, $\left[x_{i,j} \,|\, i, j = 1..n \right]$ – матриця переміщень між вершинами графа. Елемент $x_{i,j} = 1$, якщо ребро між вершинами i та j ($i \neq j$), входить у гамільтонів шлях, і $x_{i,j} = 0$ – в іншому випадку. Задачу комівояжера можна сформулювати так:

1) цільова функція, яка мінімізує довжину гамільтонового циклу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min_{x}; \tag{1}$$

2) система обмежень:

$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1,\ 1 \le j \le n$ – у кожну вершину може бути тільки один вхід;

$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1,\ 1 \le i \le n$ – із кожної вершини може бути тільки один вихід;

$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{i,j} \ge 1,\ S \ne \varnothing,\ S \subset \{1,...,n\}$ – вилучення відокремлених циклів, що разом покривають всі вершини графа; повинен бути тільки один (гамільтонів) цикл; для будь-якої підмножини вершин S існує хоча б одна дуга, яка веде в інші вершини графа;

$x_{i,j} \in \{0,1\},\ 1 \le i, j \le n$ – шукана матриця, елементи якої позначають гамільтонів шлях.

Формалізація задачі (1), хоч і дає точний розв'язок методами цілочислового програмування, наприклад, методом гілок та меж, але є громіздкою, містить багато змінних та обмежень, що потребує великої кількості обчислень. Для точного розв'язування задачі комівояжера можна використати інші методи, наприклад, динамічного програмування, множників Лагранжа, модифікований метод гілок та меж (метод Літтла), відсікаючих площин (метод Данцінга–Фалкерсона–Джонсона).

Евристичні методи забезпечують отримання близького до оптимального розв'язку для задач великої розмірності у прийнятних часових межах. До них належать методи найближчого сусіда, жадібний, вставки, локальної оптимізації *k-opt* для покращення початкового розв'язку, Ліна–Кернігана, декомпозиції-зшивання [30], еластичної мережі, штучної нейромережі, генетичний, мурашиний.

Аналогічні точні та наближені методи використовують і для розв'язування задачі пошуку гамільтонових циклів ненавантаженого графа.

До точних належать методи повного перебору, бектрекінгу, алгебраїчний метод, метод перебору Робертса–Флореса, лінійного програмування, цілочислового програмування (Гоморі, метод гілок та меж), динамічного програмування та інші.

Оскільки задача визначення гамільтонових циклів є NP-складною, то метод повного перебору можна використати тільки для графів невеликого порядку.

Для пришвидшення перебору варіантів можна використати метод бектрекінгу (пошук із поверненням), який вилучає із розгляду значну кількість варіантів однією перевіркою, будуючи дерево рішень та здійснюючи його обхід у глибину [31].

Спочатку вибираємо довільну вершину графа, наприклад першу, й одне із інцидентних їй ребер, за яким переходимо у наступну вершину. Пройдені вершини запам'ятовуємо. Припустимо, що вже знайдено k-ту вершину циклу. Якщо k дорівнює кількості вершин графа n та існує ребро, яке з'єднує k-ту вершину із першою, то цикл знайдено. Якщо ж існують ребра, що виходять з k-ї вершини до ще не переглянутих вершин, то вводимо одну з них у розв'язок і продовжуємо з неї пошук. Якщо таких ребер не існує, то повертаємось на один крок назад до $(k-1)$-ї вершини і продовжуємо пошук. Так будуть знайдені всі вершини гамільтонового циклу.

У [32] запропоновано новий метод та відповідний поліноміальний алгоритм розв'язування задачі пошуку гамільтонового циклу графа. На основі заданого графа будують інший граф найкоротших шляхів. Для побудови графа найкоротших шляхів використовують алгоритм Дейкстри. Пошук гамільтонового циклу в графі зводиться до пошуку замкненого шляху у графі найкоротших шляхів. Простір перебору варіантів розв'язків задачі складається із рішень, які будуються з кожної вершини графа в графі найкоротших шляхів.

Алгебраїчний метод основано на багатократному символьному множенні модифікованої матриці суміжностей B порядку n (одиничні елементи матриці суміжностей замінені на літеральні позначення вершин графа) на матрицю сум внутрішніх (без крайніх вершин) добутків позначень вершин ненульових ланцюгів між вершинами графа: $P_{i+1} = B \times P_i$ [11]. Множення проводиться доти, доки не буде обчислена матриця P_{n-1}, яка містить усі гамільтонові ланцюги між усіма парами вершин. Гамільтонові цикли отримують із тих ланцюгів, крайні вершини яких з'єднано дугами. Недоліком такого способу є те, що для великих порядків графа кожен елемент матриці P_i складатиметься із великої кількості складових піделементів, для збереження яких потрібні великі обсяги пам'яті.

На відміну від алгебраїчного методу, який забезпечує отримання усіх можливих гамільтонових циклів графа, метод перебору Робертса–Флореса працює тільки із одним шляхом, подовжуваним доти, доки не буде знайдено гамільтоновий цикл або виявиться, що цей шлях не може привести до гамільтонового циклу [11]. Після цього шлях модифікується деяким систематичним способом і для нього продовжується пошук циклу. Зменшуючи кількість необхідних обчислень, цей метод ефективний для великих графів.

Для практичних застосувань ефективнішими є евристичні методи пошуку гамільтонових циклів, які скорочують повний перебір варіантів. До них належать методи найближчого сусіда, жадібний, імітації відпалу, пошук із заборонами, штучна нейромережа Хопфілда, еволюційний, генетичний, мурашиної колонії, ігровий та інші.

У контексті самоорганізації важливі ті евристичні методи, які мають властивість самонавчання. Серед перерахованих варто відзначити методи нейронних мереж, генетичні, мурашиної колонії та стохастичної гри, які мають поліноміальну складність.

Задачу пошуку гамільтонового циклу можна розв'язати за допомогою нейронної мережі Хопфілда, яка реалізує навчання без вчителя [33]. Для цього умови задачі (1) необхідно перевести в параметри зв'язків між нейронами.

Щоб мережа Хопфілда могла визначити гамільтонів цикл, необхідно накласти такі вимоги:

1) нейромережа повинна складатися із $N = n \times n$ нейронів, які можна розглядати як квадратну матрицю з n рядків і n стовпців, де n – порядок графа;

2) між усіма парами (k,l) нейронів існують зв'язки, яким приписані вагові коефіцієнти $W_{k,l}$;

3) не всі ваги мережі можуть бути від'ємними одночасно;

4) активний нейрон у кожному стовпці задає відповідну вершину графа (або чергове місто маршруту для задачі комівояжера);

5) відповідь мережі повинна містити тільки один активний нейрон у кожному рядку і кожному стовпчику; для цього ваги мережі повинні бути побудовані так, щоб кожен нейрон перешкоджав активації інших нейронів у своєму рядку і в своєму стовпчику;

6) для мінімізації довжини шляху необхідно, щоб нейрон в j-му стовпчику тим активніше перешкоджав активації нейронів у $(j+1)$-му та $(j-1)$-му стовпцях, чим більша відстань між ними (потрібно для розв'язування задачі комівояжера).

Усі ці умови задовольняє така формула обчислення ваги між нейроном, відповідним місту x (рядок) на позиції i (стовпець), та нейроном, відповідним місту y (рядок) на позиції j (стовпець):

$$W_{k,l} = W_{xi,yj} = -A\delta_{xy}(1-\delta_{ij}) - B\delta_{ij}(1-\delta_{xy}) - Cd(x,y)(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}) + D,$$

де $k=(x,i)$, $l=(y,j)$ – координати зв'язків між нейронами матриці; A,B,C,D – деякі константи; $d(x,y)$ – відстань між містами x та y; δ_{xy} – символ Кронекера, що набуває значення 1, якщо $x=y$, і значення 0 в іншому випадку. Як легко зрозуміти, перший член дорівнює $-A$ для всіх зв'язків у тому самому рядку ($x=y$), крім зв'язку нейрона із самим собою (якщо $i=j$). Другий член дорівнює $-B$ для всіх зв'язків у тому ж стовпці ($i=j$), крім зв'язку із самим собою ($x=y$). Третій член пропорційний до відстані між містами x та y, якщо ці міста сусідні в маршруті ($i=j-1$ або $i=j+1$).

Починаючи із початкового випадкового стану, мережа Хопфілда може забезпечити отримання субоптимального розв'язку задачі (для задачі комівояжера одержаний цикл може відрізнятися від оптимального). Експеримент можна виконати декілька разів і вибрати найкращий розв'язок.

Евристичні методи на основі генетичних алгоритмів моделюють еволюційний процес природного відбору, спадкування та мутації. Кожний гамільтонів цикл розглядається як хромосома. На початковому етапі є набір таких хромосом (початкова популяція), а на кожному наступному циклі з наявної популяції формується нова за допомогою попарного схрещування та мутацій [28, 34].

Спрощений генетичний алгоритм складається із таких кроків:

1. Створення початкової популяції із N хромосом довжиною $n+1$, де n – порядок графа.

2. Обчислення фітнес-функцій S_i, $i=1..N$ (довжин маршрутів) для усіх особин популяції.

3. Реалізація природного відбору селекцією батьківських хромосом (із найкращим значенням S_i), їх попарне схрещування, випадкова мутація та формування нового покоління хромосом.

4. Якщо знайдено хоча б один гамільтонів шлях, то перейти до кроку 5, інакше – повернутись до кроку 2.

5. Вибрати найкращий знайдений розв'язок задачі (для навантаженого графа у задачі комівояжера).

Генетичний алгоритм в однократному застосуванні дає змогу одержати більше від одного розв'язку і відібрати кращий. Можна здійснити декілька запусків алгоритму та обчислити середнє значення найкращих результатів. Зі зростанням порядку графа імовірність одержання оптимального розв'язку знижується.

Мурашиний алгоритм ґрунтується на поводженні мурашиної колонії та моделює випаровування феромонів. Мурахи знаходять шлях між мурашником і джерелом їжі за запахом феромонів, які вони залишають за собою. Чим більше мурах використають однаковий шлях, тим вища концентрація феромонів на ньому. Така логіка поведінки мурашиної колонії дає змогу скоротити шлях між кінцевими точками маршруту [28, 35].

Для кожної мурахи перехід із пункту i в пункт j визначається його пам'яттю M (списком пунктів, які ще можна відвідати), видимістю $\eta_{i,j}$ між пунктами (наявністю ребра $e_{i,j}$ у графі) та феромонним слідом $\tau_{i,j}$. Вибір наступної вершини графа здійснюється із імовірністю

$$p = \chi(j \in M) \cdot \frac{\eta_{i,j}^{\alpha} \tau_{i,j}^{\beta}}{\sum_{k \in M} \eta_{i,k}^{\alpha} \tau_{i,k}^{\beta}},$$

де $\chi() \in \{0,1\}$ – індикаторна функція події; α, β – вагові параметри.

Для розглянутих нейронного, мурашиного та генетичного алгоритмів проблематично підібрати початкові значення параметрів, які забезпечуватимуть їх збіжність до оптимального розв'язку.

Незважаючи на те, що описані евристичні методи забезпечують пошук наближеного до оптимального гамільтонового циклу, їх методологічне значення полягає у демонстрації різних реалізацій самонавчання активних систем для розв'язування NP-складних задач без необхідності застосування класичних алгоритмів. Такі методи реалізують "м'які" обчислення, які не вимагають традиційного програмування і які легко адаптувати для розв'язування інших задач. Подібні властивості має також стохастичний ігровий метод.

У цій статті запропоновано нове застосування методу стохастичної гри [36] для самоорганізації гамільтонових циклів ненавантаженого графа.

Мета роботи

Метою роботи є розв'язування стохастичної ігрової задачі самоорганізації стратегій для побудови гамільтонового циклу ненавантаженого неорієнтованого графа. Досягнення мети забезпечується вибором адаптивного методу розв'язування стохастичної гри, належним налаштуванням його параметрів, плануванням комп'ютерного експерименту, розробленням програмної моделі стохастичної гри, аналізом отриманих результатів та виробленням рекомендацій щодо їх практичного застосування.

Постановка ігрової задачі пошуку гамільтонових циклів

Нехай неорієнтований граф $G=(V,E)$ задано скінченною множиною вершин V та ребер E. Граф упорядкований, тобто його ребра пронумеровано за зростанням, наприклад, за ходом годинникової стрілки. Вважатимемо, що граф простий (не має петель і кратних ребер) і зв'язний (не містить ізольованих вершин). Крім того, щоб можна було охопити циклом усі вершини, без втрати загальності, вважатимемо, що мінімальний степінь вершин детермінованого графа більший від 1 (граф без листя).

У кожній вершині графа розмістимо ігрового агента A_i, який може вибирати одне із інцидентних вершині $i\in V$ ребер, що належать локальній множині $E_i \subseteq E$. Для цього кожен агент з номером $i\in V$ має $N_i \geq 2$ чистих стратегій $X^i=(x^i[1],x^i[2],...,x^i[N_i])$, де $x^i\in E_i$ є номером ребра, а значення N_i визначається степенем відповідної вершини. Тут і далі верхній індекс не є степенем числа, крім позначень зі знаком мінус.

Варіанти можливого вибору можна задати орієнтованим графом стратегій гравців. Нехай дуги, що виходять із вершини з номером i, позначають стратегії i-го гравця щодо вибору одного із сусідніх гравців, а ті дуги, що входять в i-ту вершину, – залежність виграшів або втрат i-го гравця від стратегій сусідніх гравців. Відповідність заданого неорієнтованого графа та утвореного на його основі орієнтованого графа стратегій показано на рис. 1.

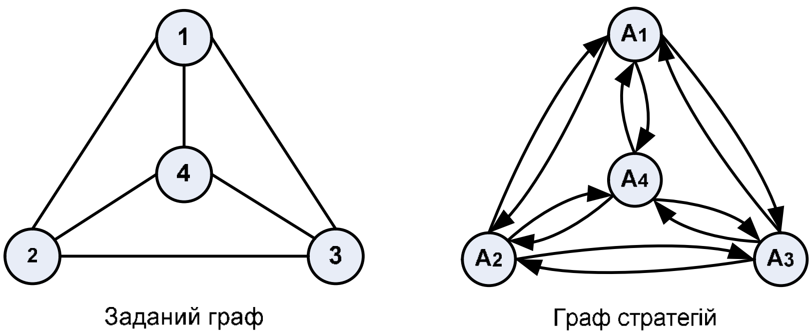


Рис. 1. Відповідність графів

Вибір чистих стратегій гравці здійснюють незалежно і синхронно у дискретні моменти часу $n=1,2,...$. Зроблений вибір оцінюється поточним штрафом ζ_n^i, який формується залежно від того, наскільки дія агента сприяла наближенню до цільового розв'язку задачі.

Для цього кожен ігровий агент $i\in V$ здійснює незалежний вибір однієї із N_i власних чистих стратегій $x_n^i=x^i\in X^i$ згідно із умовними імовірностями

$$p_n^i(j)=P\left\{x_n^i=x^i(j)\middle|x_t^i,\zeta_t^i\ (t=1,2,...,n-1)\right\},\ j=1..N_i,$$

де $\{x_t^i\,|\,t=1,2,...,n-1\}$ – передісторія стратегій, які вибрав гравець з номером i; $\{\zeta_t^i\,|\,t=1,2,...,n-1\}$ – передісторія програшів за це.

Набір імовірностей $p_n^i=(p_n^i(1),p_n^i(2),...,p_n^i(N_i))\ \forall i\in V$ задає вектори змішаних стратегій гравців, які набувають значення $p_n^i\in S^{N_i}$ на N_i-вимірних одиничних симплексах:

$$S^{N_i}=\left\{p\,\middle|\,\sum_{j=1}^{N_i}p(j)=1;\ p(j)\geq 0\ \ (j=1..N_i)\right\}.$$

Для вибору чистих стратегій $\{x_n^i\}$ використовується випадковий механізм, побудований на дискретному динамічному розподілі, який задають векторами змішаних стратегій p_n^i:

$$x_n^i = \left\{ x^i(l) \mid l = \arg\min_l \sum_{k=1}^{l} p_n^i[k] > \omega \;\; (k,l = 1..N_i) \right\}, \tag{2}$$

де $\omega \in [0,1]$ – дійсна випадкова величина із рівномірним розподілом.

Коли усі гравці закінчують вибір чистих стратегій, вони отримують випадкові поточні програші $\zeta_n^i = \zeta_n^i(x_n^{V_i})$, значення яких є функцією комбінованих стратегій сусідніх гравців $x^{V_i} \in X^{V_i} = \prod_{j \in D_i} X^j$ із підмножин $V_i \subseteq V$, $V_i \neq \emptyset$ $\forall i \in V$. Припускають, що поточні програші мають постійне математичне сподівання та обмежений другий момент, які не відомі агентам апріорі.

Залежно від вибраних критеріїв і початкових параметрів ігрового методу в графі можуть виникнути декілька автономних циклів або один глобальний цикл.

Для створення автономних неперетинних циклів графа має виконуватися умова, що вибирати ребро у напрямку i-го агента $\forall i \in V$ може лише один його сусідній агент із множини V_i.

Нехай $k_n^i = \sum_{j \in V_i} \chi(x_n^j \to x_n^i)$ – поточна кількість сусідніх агентів, стратегії яких спрямовані у вершину графа, де перебуває i-й агент (у напрямку i-го агента). Неоднорідність спрямування стратегій у межах локальної підмножини V_i враховується різницевим штрафом:

$$\xi_n^i[1] = C_i^{-1} \sum_{j \in V_i} |k_n^i - k_n^j|, \tag{3}$$

де $\xi_n^i[1] \in R_+^1$ – дійсне число; $C_i = |V_i|$ – кількість агентів локальної підмножини V_i.

Цей критерій забезпечує можливість утворення циклів переміщення агентів на графі.

Для формування гамільтонового циклу кожен агент повинен вибирати таку стратегію (інцидентне його вершині ребро), щоб максимізувати довжину локального шляху, який виходить із контрольованої агентом вершини графа. Нехай r_n^i – множина (послідовність) вершин, що визначає такий шлях із кореневою вершиною з номером i, утворений у поточний момент часу n стратегіями (напрямками переміщень) гравців. Рекурентна процедура визначення поточного шляху, який розпочинається у вершині з номером i, матиме вигляд:

$$r_n^i(t) = r_n^i(t-1) \bigcup_{m=i}^{\{m\} \cap r_n^i(t-1) \neq \emptyset} \left\{ m := u_n^m \right\}, \;\; \forall i \in V, \tag{4}$$

де $r_n^i(0) = \emptyset$.

Позначення операції об’єднання множин у (4) необхідно читати так: ця операція виконується багатократно, починаючи зі значення $m = i$ доти, доки у ході формування шляху r_n^i повторно з’явиться елемент $m \in r_n^i(t-1)$. Для зв’язного графа зі степенями вершин, більшими від 1, ця умова виконується завжди – якщо прямувати за стратегіями гравців від i-ї вершини $\forall i \in V$, відбудеться входження у локальний цикл або у глобальний гамільтоновий цикл. Мінімальний локальний цикл охоплює дві зв’язані ребром вершини графа й утворюється протилежними стратегіями двох сусідніх гравців. Максимальний цикл охоплює усі вершини графа і є одним із гамільтонових циклів.

Відхилення довжини локального шляху від максимально можливої враховують штрафом:

$$\xi_n^i[2] = C^{-1} \left| S(r_n^i) - C \right|, \tag{5}$$

де $\xi_n^i[2] \in R_+^1$ – дійсне число; $C = |V|$ – кількість ігрових агентів; $S(r_n^i) = |r_n^i|$ – довжина локального шляху (кількість вершин графа на шляху до входження у цикл), що розпочинається у вершині i $(0 \le S(r_n^i) \le C)$.

Цей критерій забезпечує наближення довжини шляху r_n^i, що виходить з вершини i, до кількості вершин V графа G (до довжини гамільтонового циклу).

Штрафи (3) та (5) можна використовувати кожен окремо або комплексно. Комплексні поточні програші гравців обчислюють після завершення вибору варіантів переміщення $u_n^i \ \forall i \in V$:

$$\zeta_n^i = \lambda \xi_n^i[1] + (1-\lambda)\xi_n^i[2], \tag{6}$$

де $\lambda \in [0,1]$ – ваговий коефіцієнт, який визначає частку штрафних критеріїв у формуванні програшів агентів.

Завдяки випадковому вибору чистих стратегій поточні програші $\zeta_n^i \ \forall i \in V$ є випадковими величинами із апріорі невідомими стохастичними характеристиками. Для формулювання критеріїв поведінки гравців використовують усереднені у часі $n = 1, 2, \ldots$ середні програші:

$$Z_n^i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \zeta_t^i \quad \forall i \in V. \tag{7}$$

Стратегії гравців повинні бути спрямовані на мінімізацію власних функцій середніх програшів (7):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} Z_n^i \to \min_{x_n^i} \quad \forall i \in V. \tag{8}$$

Стохастична гра пошуку гамільтонового циклу полягає у тому, що кожен гравець $i \in V$ повинен навчитися вибирати чисті стратегії $\{x_n^i\}$ (2) у моменти часу $n = 1, 2, \ldots$ на основі спостереження локально обумовлених поточних програшів $\{\zeta_n^i\}$ (6) так, щоб забезпечити виконання системи критеріїв (8).

Спосіб формування послідовності стратегій $\{x_n^i\} \ \forall i \in V$ $(n = 1, 2, \ldots)$ стохастичної гри визначатиме виконання однієї з умов колективної оптимальності, наприклад, Неша, Парето або іншої [37].

Процес навчання стохастичної гри, який приводить до самоорганізації стратегій переміщення ігрових агентів, оцінюється такими характеристиками:

1) системною функцією середніх програшів, яка є усередненням індивідуальних функцій середніх програшів гравців (7):

$$Z_n = C^{-1}\sum_{i \in V} Z_n^i; \tag{9}$$

2) коефіцієнтом координації стратегій, який є відносною кількістю скоординованих стратегій гравців:

$$K_n = (nC)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sum_{i \in V} \chi\left(|\zeta^i| \le \delta\right), \tag{10}$$

де $\chi(\textit{умова}) \in \{0,1\}$ – індикаторна функція події: якщо вказана у дужках умова виконується, то $\chi() = 1$, інакше – $\chi() = 0$; $0 < \delta << 1$ – мале додатне дійсне число.

На самоорганізацію гамільтонового циклу вказуватиме зменшення функції системних програшів $Z_n \ge 0$ та зростання коефіцієнта координації стратегій агентів $K_n \in [0,1]$.

Метод розв'язування стохастичної гри

Формування послідовностей $\{x_n^i\}$ із потрібними властивостями виконаємо за допомогою рекурентного методу зміни векторів змішаних стратегій [38]:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i - \gamma_n R(p_n^i, x_n^i, \zeta_n^i)\right\}, \tag{11}$$

де $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$ – проєктор на одиничний ε-симплекс $S_\varepsilon^{N_i} \subset S^{N_i}$; γ_n – монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює величину кроку методу; R – крок методу; ε_n – монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює швидкість розширення ε-симплексу.

Зміну елементів вектора змішаних стратегій виконуватимемо так, що у разі вибору стратегії $x_n^i(j)$ елемент $p_n^i(j)$ зменшується пропорційно до значення поточного програшу ξ_n^i. Інші елементи вектора змішаних стратегій не змінюються або зростають пропорційно ξ_n^i. Після перерахунку векторів змішаних стратегій відбувається їх нормування методом проєкції на одиничний ε-симплекс. У результаті меншим значенням програшу відповідатимуть менші переміщення векторів змішаних статегій на одиничному ε-симплексі.

Для синтезу рекурентного методу використаємо результати теорії стохастичної апроксимації [38, 39]. Для цього припустимо, що математичні сподівання випадкових програшів $M\{\xi_n^i(x)\} = l^i(x)$ постійні для усіх $x \in X = \bigotimes_{i \in V} X^i$. Тоді функція середніх втрат матричної гри обчислюється так:

$$L^i(p^{D_i}) = \sum_{x^{V_i} \in X^{D_i}} l^i(x^{V_i}) \prod_{j \in V_i;\, x^j \in x^{V_i}} p^j(x^j) \qquad (12)$$

де $p^{V_i} \in S^{V_i} = \prod_{j \in V_i} S^{N_j}$, $p^i \in S^{N_i}$.

Мета матричної гри полягає у мінімізації функцій середніх втрат за змішаними стратегіями p^i:

$$L^i(p^{V_i}) \to \min_{p^i}.$$

Нехай математичне сподівання вектора руху методу (11) є градієнтом функції середніх втрат (12):

$$M\{R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i)\} = \nabla_{p^i} L^i(p^{V_i}).$$

Враховуючи, що

$$\nabla_{p^i} L^i = M\left\{ \frac{\xi_n^i}{e^{\mathrm{T}}(x_n^i) p_n^i} e(x_n^i) \Big| p_n^i = p^i \right\},$$

де $e(x_n^i)$ – одиничний вектор – індикатор вибору чистої стратегії $x_n^i \in X^i$, на основі стохастичної апроксимації отримаємо градієнтний метод розв'язування ігрової задачі:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{ p_n^i - \gamma_n \frac{\xi_n^i e(x_n^i)}{e^{\mathrm{T}}(x_n^i) p_n^i} \right\}. \qquad (13)$$

Параметр γ_n зменшує крок методу в часі для досягнення оптимальних колективних розв'язків гри: $\left\| p_n^i - p^{i*} \right\| \to 0$, а параметр ε_n розширює ε-симплекс: $S_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \to S^{N_i}$.

Значення цих параметрів можна обчислити так:

$$\gamma_n = \gamma n^{-\alpha}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon n^{-\beta}, \qquad (14)$$

де $\gamma > 0$; $\alpha \in (0,1]$; $\varepsilon > 0$; $\beta > 0$.

Збіжність стратегій стохастичної гри до колективно оптимальних значень p^{i*} визначається співвідношеннями параметрів γ_n та ε_n (14), які повинні відповідати фундаментальним умовам стохастичної апроксимації [38, 39].

Як показано у [40], для забезпечення середньоквадратичної збіжності ігрового методу (13) за Нешем у знакододатному середовищі повинні виконуватись такі відношення:

$$0 < \beta < \alpha \le 1. \qquad (15)$$

Теоретичний порядок асимптотичної швидкості збіжності методу (13) дорівнює $n^{-\theta}$, де $\theta = \min\{1 + \beta - \alpha, \alpha - \beta\}$ – параметр порядку. Максимальне значення параметра $\theta = 1/2$ досягається для $\alpha - \beta = 1/2$. Оскільки теоретичний порядок швидкості збіжності отримано на основі верхніх асимптотичних оцінок, то відкритим є питання щодо їх точності й оптимальні значення параметрів необхідно уточнити у ході комп'ютерного експерименту.

Стохастична гра розпочинається із ненавчених змішаних стратегій агентів: $p_0^i = (1/N_i,...,1/N_i)$ $\forall i \in V$. З часом $n = 1, 2,...$ змішані стратегії динамічно перебудовуються згідно з (13) для адаптивного вибору чистих стратегій.

Один крок повторювальної стохастичної гри полягає у тому, що у момент часу n кожен гравець $i \in V$ вибирає чисту стратегію u_n^i (2) і до моменту часу $n+1$ отримує поточний програш ζ_n^i (6), який використовують для обчислення нової змішаної стратегії p_{n+1}^i (13).

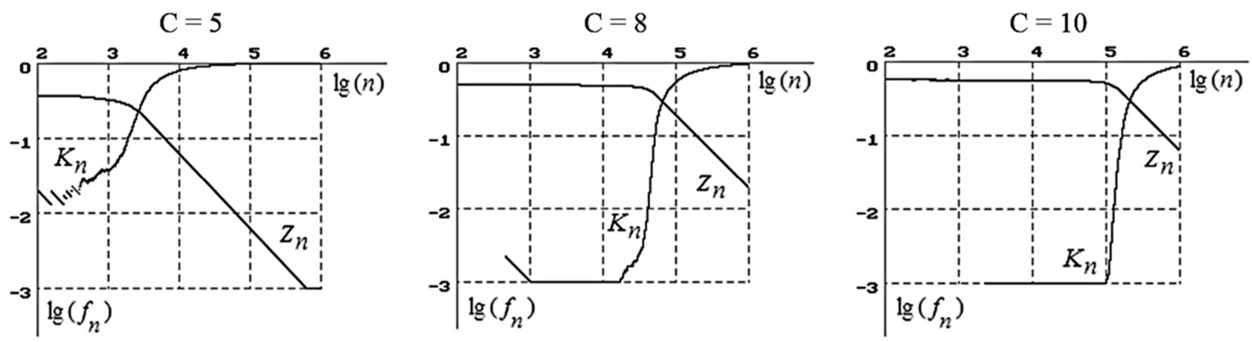
Стохастична гра агентів реалізує адаптивне навчання методом проб і помилок, який для пошуку потрібного розв'язку потребує значної кількості випробувань. Процес навчання можна істотно прискорити застосуванням комп'ютерної реалізації стохастичної гри із відповідним налаштуванням її параметрів.

Результати комп'ютерного експерименту

Спочатку розглянемо неорієнтований повнозв'язний граф $G = (V, E)$ без петель. У програмі граф зручно задати або матрицею суміжностей, або матрицею інциденцій. У кожній вершині графа розмістимо по одному агенту. Загалом граф контролюватимуть $C = |V|$ агентів. У повторювальній стохастичній грі кожен із агентів може вибирати одне із інцидентних ребер графа. Пов'язаний стратегіями сукупний вибір декількох агентів утворює локальний шлях. Завдання гри – адаптивне злиття локальних шляхів агентів у один глобальний гамільтоновий цикл.

Для розв'язування стохастичної гри використаємо стохастичний ігровий метод (13) з такими параметрами: $\lambda = 0.5$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.999 / N_i$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.25$. Вказані параметри задовольняють умови збіжності (15). Крім того, досліджуваний граф повинен мати гамільтоновий цикл.

Кількість вершин графа та степені його вершин істотно впливатимуть на порядок швидкості збіжності ігрового методу. Функції середніх програшів гравців ζ_n (9) та коефіцієнта координації стратегій K_n (10) характеризують хід стохастичної гри переміщення агентів. Графіки цих функцій для різних значень порядку $C = |V|$ (кількості вершин) повнозв'язного графа зображено на рис. 2 у логарифмічному масштабі. Зображення обмежено координатами прямокутної області виведення графіків.



a *b* *c*

Рис. 2. Показники самоорганізації стохастичної гри для різних значень порядку повного графа

Спадання функції середніх програшів ζ_n свідчить про виконання цільових умов (6) збіжності стохастичної гри. Наближення значення коефіцієнта координації K_n до 1 (тобто до логарифмічного нуля) вказує на самоорганізацію стратегій гравців. Для заданих параметрів ігрового методу збільшення порядку C повнозв'язного графа призводить до значного зростання кількості кроків навчання стохастичноїх гри. Так, для $C = 5$ стрімке зростання коефіцієнта координації починається близько $n = 10^3$ кроків навчання стохастичної гри, для $C = 8$ – трохи більше ніж $n = 10^4$ кроків, а для $C = 10$ для цього потрібно близько $n = 10^5$ кроків.

Крім порядку гамільтонового графа, час збіжності стохастичної гри визначатиметься також його зв'язністю та параметрами ігрового методу. Зменшення зв'язності графа прискорює самоорганізацію циклів.

Залежно від вибраних критеріїв і початкових параметрів ігрового методу, в графі можуть виникнути декілька автономних циклів або один глобальний цикл.

Якщо параметр l комплексного штрафу (6) набуває близькі до 1 значення, то переважний вплив на хід гри справлятиме штрафний критерій (3), який мінімізує вибір кожної вершини графа сусідніми гравцями. Застосування цього критерію може привести до формування у графі декількох відокремлених (автономних) циклів, як показано на рис. 3. Для заданих вище значень параметрів отримаємо розв'язки стохастичної гри у чистих стратегіях. Стохастична гра забезпечує багатоваріантність розв'язків задачі побудови циклів графа.

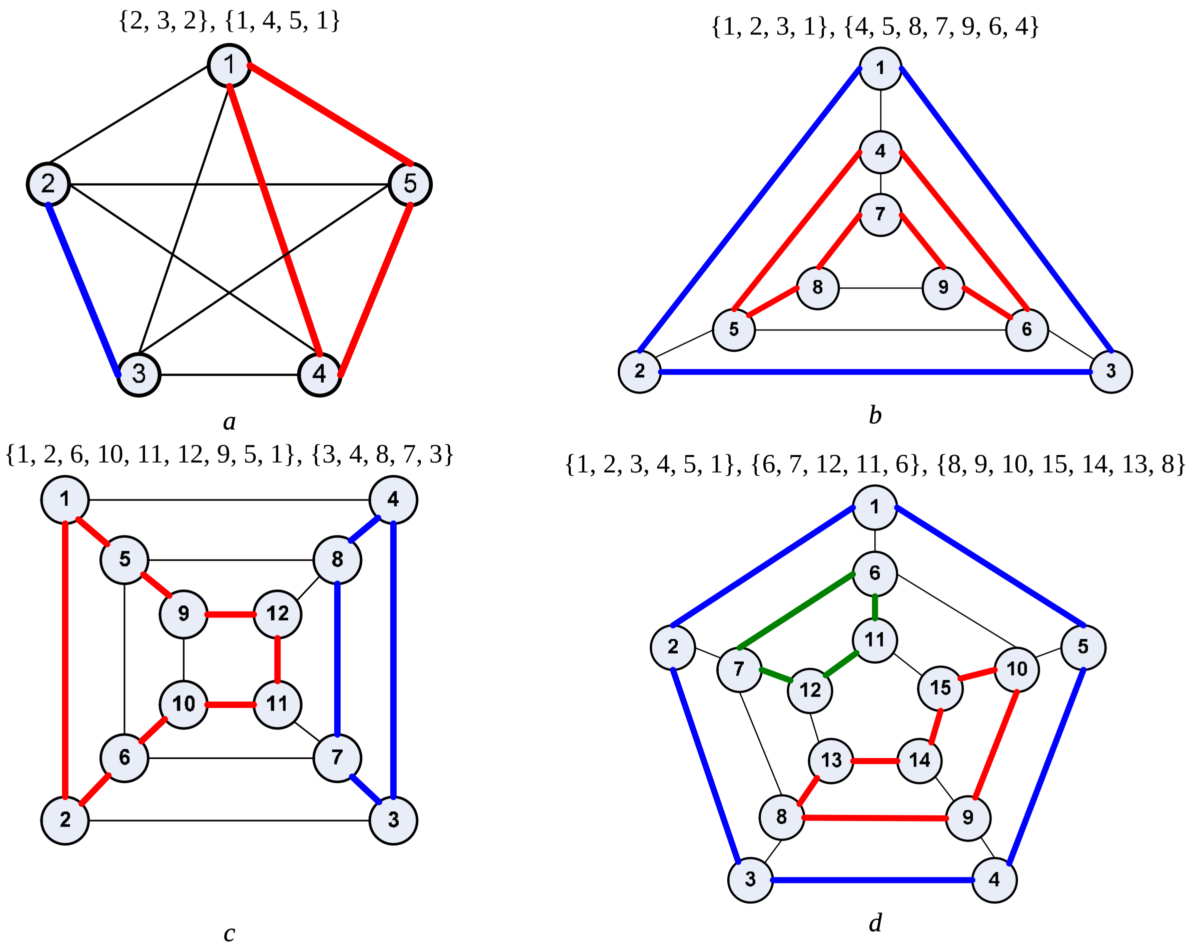


Рис. 3. Самоорганізовані відокремлені цикли графів

На рис. 3, *a* показано два можливі варіанти самоорганізованих відокремлених циклів для повнозв'язного графа. Ребро (2, 3) є виродженим варіантом циклу (мінімальним циклом), коли агент 2 вибрав вершину 3, а агент 3 – вершину 2. На рис. 3, *b*–*d* зображено варіанти відокремлених циклів для неповнозв'язних графів різної структури.

Для визначення гамільтонового циклу необхідно параметру l задати близьке до 0 значення. Тоді переважно на хід гри впливатиме штрафний критерій (5), який максимізує довжини локальних шляхів і призводить до їх асимптотичного у часі злиття в один глобальний, гамільтонів цикл.

Варіанти гамільтонових циклів як результат самоорганізації стохастичної гри зображено на рис. 4 для різних графів. Ігрова задача має багатоваріантний розв’язок у чистих стратегіях.

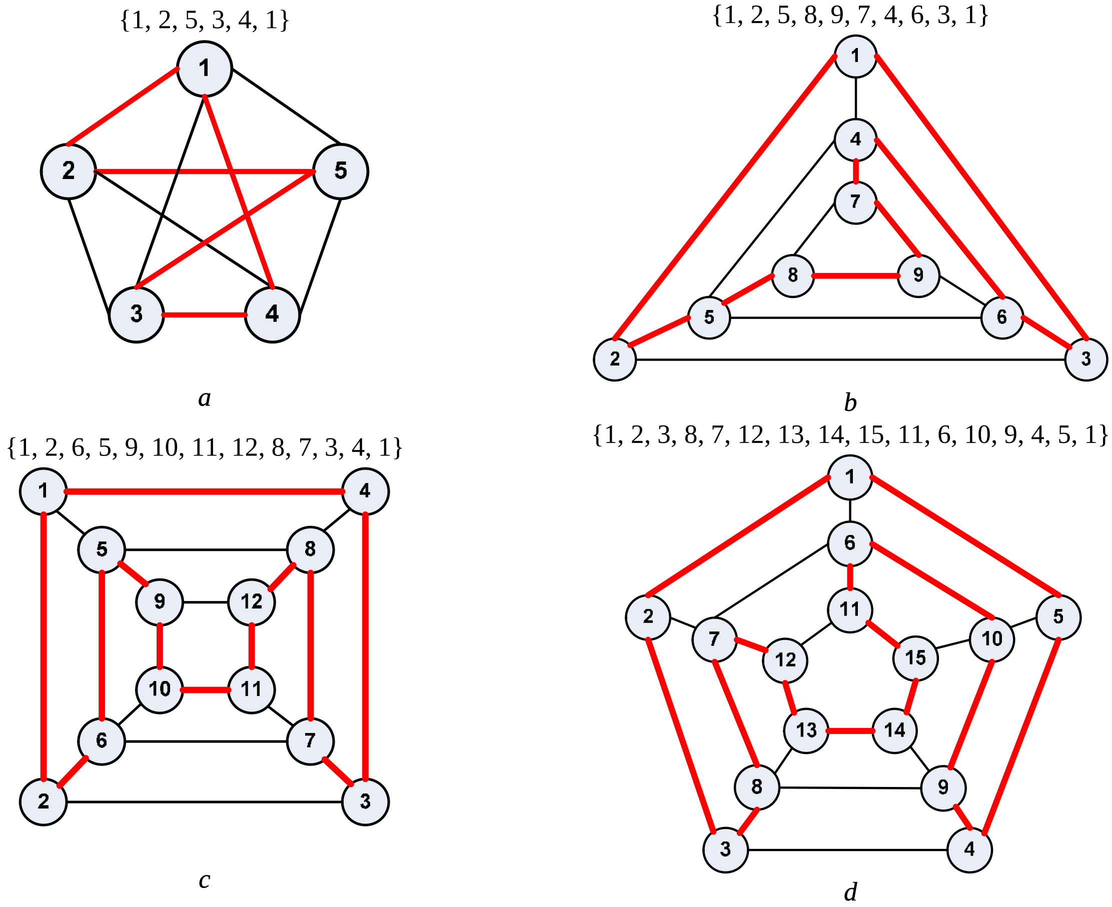


Рис. 4. Самоорганізовані гамільтонові цикли графів

З отриманих результатів видно, що проста взаємодія агентів у межах локальних підмножин у ході навчання стохастичної гри призводить до складної, скоординованої поведінки системи, результатом чого є самоорганізовані патерни у вигляді декількох автономних або одного гамільтонового циклу графа. Під час навчання стохастична гра переходить від початкового хаотичного вибору стратегій агентів до їх цілеспрямованого вибору у вигляді циклів.

Ускладнимо задачу, розширивши її на випадкові графи. Застосуємо ігровий метод (13) для знаходження гамільтонового циклу випадкового графа. Для цього припишемо кожній вершині (або ігровим агентам) імовірності відмов q^i. Відновлювальна відмова вершини призводить до тимчасової втрати усіх її інцидентних ребер. Відповідний такій вершині агент пропускає поточний хід стохастичної гри, а сусідні гравці не враховують його стратегію вибору (оскільки вона відсутня) для обчислення власних поточних програшів.

Штраф (3) обчислюється тільки для тих гравців (або вершин графа) та сусідніх з ними, які не відмовили щодо поточного кроку гри. Для визначення довжини локального шляху у виразі (5), крім умови входження у цикл, додатково враховується умова досягнення гравця, який відмовив і першим трапився на шляху.

Декілька реалізацій стратегій гравців для випадкового повнозв’язного графа зображено на рис. 5. Крім відмов вершин, аналогічно можна ввести відмови ребер графа. У разі відмов допускається тимчасове порушення зв’язності графа. Штрихові лінії зі стрілками позначають стратегії, які можуть вибрати учасники гри, формуючи шлях у напрямку до гравців, що відмовили. Використовуються як обмежувальна умова для обчислення поточних штрафів (5).

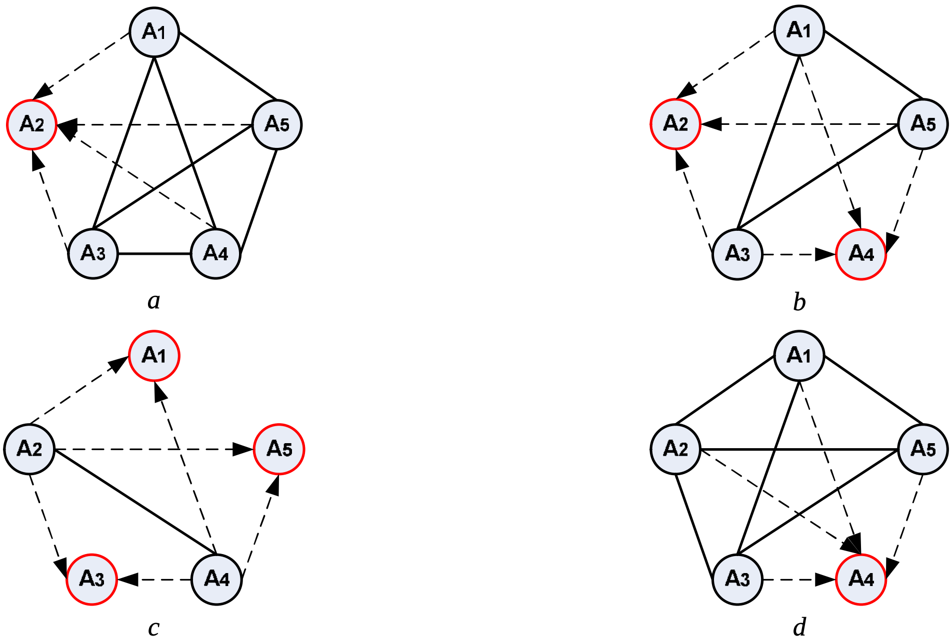


Рис. 5. Реалізації випадкового графа стратегій гравців

На рис. 6 наведено графіки коефіцієнта K_n координації стратегій гравців у ході ігрової самоорганізації гамільтонових циклів випадкового графа, що є стохастичною реалізацією повнозв'язного графа з $|V|=5$ вершинами. Ваговий коефіцієнт критеріїв (3) та (5) у згортці (6) дорівнює $\lambda = 0.5$. Імовірності відмов $q^i = q \;\; \forall i \in V$ задано однаковими для усіх вершин графа. Графіки отримано для таких значень імовірностей відмов $q \in \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$.

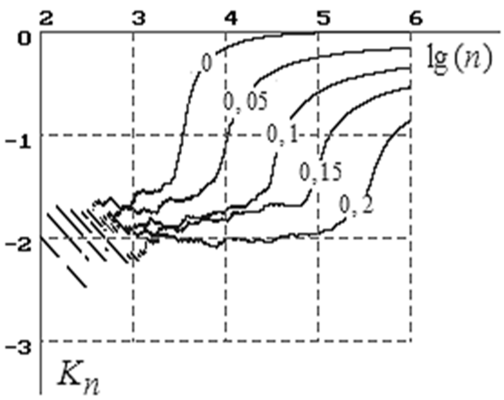


Рис. 6. Залежність коефіцієнта координації від імовірності відмов вершин випадкового графа

Як видно на рис. 6, зростання імовірностей відмов призводить до збільшення кількості пошукових кроків, необхідних для самоорганізації гамільтонового циклу. Це пов'язано із тим, що ігровий метод повинен додатково адаптуватися до випадкових реалізацій заданого графа.

Для виокремлення гамільтонового циклу випадкового графа для кожної вершини визначають заокруглене до цілого значення умовне математичне сподівання номера ребра, яке вибрав відповідний агент у поточний момент часу:

$$\bar{x}_n^i = \mathrm{int}\left(\sum_{i=1}^{N_i} p_n^i x_n^i \,\middle|\, x_t^i, \zeta_t^i \; (t = 1, 2, \ldots, n-1) \right).$$

У ході адаптивної гри при n ® ¥ граничні значення математичних сподівань номерів ребер прямують до одного із детермінованих гамільтонових циклів графа, наприклад, зображеного на рис. 4, *а*.

Стохастичний ігровий метод за ефективністю не може змагатися із відомими методами побудови гамільтонових циклів детермінованих графів. У нього інші переваги і призначення – він може знаходити гамільтонові цикли випадкових графів в умовах невизначеності (імовірності відмов вершин графа не відомі апріорі). З іншого боку, метод стохастичної гри є доброю ілюстрацією самоорганізації гамільтонового циклу на основі збирання та опрацювання локальних даних без обміну інформацією між усіма гравцями. Розв'язок стохастичної гри проявляється у вигляді глобального патерна самоорганізації стратегій гравців, яким є один із гамільтонових циклів графа. Повільна (степенева) збіжність гри пояснюється її стохастичною природою та відсутністю у гравців інформації про повну структуру графа або його випадкових реалізацій. Стохастична гра імітує еволюційний процес самоорганізації гамільтонового циклу за рахунок самонавчання ігрових агентів.

Отже, самоорганізація розглянутої стохастичної гри полягає в утворенні патернів стратегій ігрових агентів у вигляді гамільтонових циклів, що виникають у детермінованому або випадковому графі у ході навчання рекурентного методу (13) на основі локальної взаємодії між агентами, що приводить до глобальної координації усієї розподіленої системи.

Висновки

1. Розв'язано складну задачу самоорганізації гамільтонових циклів неорієнтованого графа на основі моделі стохастичної гри.
2. Глобальні гамільтонові цикли зароджуються у результаті цілеспрямованого локально обумовленого вибору безконфліктних стратегій у ході адаптивного навчання стохастичної гри.
3. Самоорганізація гамільтонових циклів графа можлива у разі дотримання обмежень на параметри ігрового методу, які отримують із загальних умов стохастичної апроксимації.
4. Розглянутий ігровий метод забезпечує степеневий порядок швидкості збіжності, потребує великої кількості кроків навчання, оскільки працює в умовах неповної апріорної інформації.
5. Зростання порядку графа призводить до розгортання пошукового процесу на більшому проміжку часу і для збіжності методу потребує належного налаштування параметрів стохастичної гри.
6. Метод стохастичної гри як метод випадкових випробувань із адаптивним опрацюванням даних потребує більшої кількості кроків гри, ніж відомі детерміновані методи, однак може працювати з випадковими графами із апріорі невідомими розподілами.
7. Порівняно з детермінованими графами пошук гамільтонових циклів у випадкових графах потребує більшої кількості кроків ігрового методу, оскільки на кожному кроці гри можлива інша реалізація зв'язків між вершинами графа.
8. Стохастичний ігровий метод самоорганізації гамільтонових циклів можна застосувати для побудови криптографічних протоколів обміну ключами, у системах доведення із нерозголошенням знань, для розв'язування розподілених потокових і транспортних задач та колективного прийняття рішень в умовах невизначеності.
9. Перспективним дослідженням у цьому напрямі є ігрове моделювання самоорганізації сенсорних мереж, кільцевої осциляції сигналів у нейронних мережах для застосування результатів у системах розподіленого штучного інтелекту.

Список літератури

1. Gamazine, S., Deneubourg, J.-L., Frank, N. R., Sneyd, J., Theraula, G., Bonabeau, E. (2020). *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton University Press.

2. Sun, Z. (2018). *Cooperative Coordination and Formation Control for Multi-agent Systems*. Springer.

3. Кравець, П. О. (2019). Ігрові стратегії прийняття рішень в ієрархічних системах. I. Математична модель стохастичної гри. *Системні дослідження та інформаційні технології, 3*, 63–75. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.06 .

4. Кравець, П. О. (2019). Ігрові стратегії прийняття рішень в ієрархічних системах. II. Комп'ютерне моделювання стохастичної гри. *Системні дослідження та інформаційні технології, 4*, 105–118. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.4.11.

5. Zhang, W. J. (Editor). (2013). *Self-organization: Theories and Methods*. USA: Nova Science Publishers.

6. Кравець, П. О. (2015). Ігрова модель самоорганізації мультиагентних систем. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія: Інформаційні системи та мережі, 829*, 161–176.

7. Кравець, П. О. (2005). Ігрова самоорганізація системи агентів з індивідуальним оцінюванням стратегій. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія: Комп'ютерні системи та мережі, 546*, 75–85.

8. Schweisguth, F., Corson, F. (2019). Self-Organization in Pattern Formation. Review. *Developmental Cell*, 49 (5), 659–677. DOI: 10.1016/j.devcel.2019.05.019.

9. Кравець, П. О., Юринець, Р. В., Кісь, Я. П. (2020). Патерни самоорганізації стратегій у грі мобільних агентів. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія: Інформаційні системи та мережі, 7*, 24–34. DOI: 10.23939/sisn2020.07.024.

10. Кравець, П. О. (2021). Самоорганізація стратегій у грі переміщення агентів. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія: Інформаційні системи та мережі, 9*, 131–141. DOI: 10.23939.sisn2021.09.131.

11. Christofides, N. (1975). *Graph theory: an algorithmic approach*. New York: Academic Press.

12. Saoub, K. R. (2021). *Graph Theory. An Introduction to Ptoofs, Algorithms, and Applications*. Chapman and Hall/CRC.

13. Garey, M. R., Johnson, D. S., Endre, R. (1976). The Planar Hamiltonian Circuit Problem is NP-Complete. *SIAM Journal on Computing, 5 (4)*, 704–714. DOI: 10.1137/0205049.

14. Alhalabi, W., Kitanneh, O., Alharbi, A., Balfakih, Z., Sarirete, A. (2016). Efficient solution for finding Hamilton cycles in undirected graphs. *SpringerPlus (2016) 5:1192*, 1–14. DOI 10.1186/s40064-016-2746-8.

15. Korte, B., Vygen, J. (eds.). (2008). The Traveling Salesman Problem. *In : Combinatorial Optimization. Algorithm and Combinatorics, 21*, 527–562. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-540-71844-4_21.

16. Абросимов, М. Б. (2019). Сравнение достаточных условий гамильтоновости графа, основанных на степенях вершин. *Прикладная дискретная математика, 45*, 55–63. DOI: 10.17223/20710410/45/6.

17. Waligóra, Ł. (2017). Application of Hamilton's graph theory in new technologies. *World Scientific News, 89*, 71–81.

18. Seo, J. H., Lee, H., Jang, M. S. (2008). Optimal Routing and Hamiltonian Cycle in Petersen-Torus Networks. *Third 2008 Internaional Conference on Convergence and Hybrid Information Technology*, 303–308.

19. Шаріфов, Ф. А., Юн, Г. М., Кандиба, Г. Ю. (2014). Оптимізація маршрутів повітряних суден, що виконують агроавіаційні роботи. *Наукоємні технології, 3 (23)*, 319–325.

20. Литвин, В. В., Угрин, Д. І. (2016). Методика вирішення завдань пошуку оптимальних туристичних маршрутів алгоритмами наслідування мурашиної колонії. *Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ"; зб. наук. пр. Сер.: Інформатика та моделювання. Харків: НТУ "ХПІ", 21 (1193)*, 47–60.

21. Zhang, Q., Cheng, R., Zheng, Z. (2020). Energy-efficient renewable scheme for rechargeable sensor networks. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, 74*, 1–13. DOI: 10.1186/s13638-020-01687-4.

22. Листровой, С. В., Минухин, С. В., Листровая, Е. С. Разработка метода мониторинга распределенной вычислительной системы на основе определения кратчайших путей и кратчайших гамильтоновых циклов в графе. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 6/4 (78)*, 32–45. DOI: 10.15587/1729-4061.2015.56247.

23. Xiong, N., Wu, W., Wu, C. (2017). An improved Routing Optimization Algorithm Based on Travelling Salesman Problem for Social Networks. *Sustainability, 9*, 1–15. DOI: 10.3390/su9060985.

24. Medvedev, P., Pop, M. (2021). What do Eulerian and Hamiltonian cycles have to do genome assembly? *PLoS Computational Biology, 17(5):e1008928*, 1–5. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1008928.

25. Мелкозерова, О. М., Рассомахин, С. Г. (2019). Идентификация отпечатков пальцев на основе гамильтоновых циклов распределения локальных признаков. *Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Серія: "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", 44*, 51–65. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-44-06.

26. Кавун, С. В., Ревак, І. О. (2015). Застосування теорії графів у задачах комунікаційного менеджменту. *Науковий вісник Львівського державного університету внутрішніх справ, 2*, 225–240.

27. Рацеев, С. М., Ростов, М. А. (2019). О протоколах аутентификации с нулевым разглашением знания. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: "Математика. Механика. Информатика", 19 (1)*, 114–121.

28. Гуляницький, Л. Ф., Мулеса, О. Ю. (2016). *Прикладні методи комбінаторної оптимізації:* навч. посіб. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет".

29. Peng, Y., Choi, B., Xu, J. (2021). Graph Learning for Combinatorial Optimization: A Survey of State of the Art. *Data Science and Engineering, 6*, 119–141. DOI: 10.1007/s41019-021-00155-3.

30. Кутельмах, Р. К., Угриновський, Б. В. (2017). Дослідження ефективності декомпозиційного алгоритму спільних ребер для розв'язування задачі комівояжера великих розмірностей. *Молодий вчений, 12 (52)*, 1–5.

31. Sleegers, J., Berg, D. (2021). Backtracking (the) Algorithms on the Hamiltonian Cycle Problem. *arXiv:2107.00314v1 [cs.DS] 1 Jul 2021*, 1–13. Access mode: https://arxiv.org/pdf/2107.00314v1.pdf.

32. Прокопенков, В. Ф. (2020). Новый метод поиска гамильтонова цикла на графе. *Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ". Серія: Стратегічне управління, управління портфелями, програмами та проектами, 2*, 43–49. DOI: 10.20998/2413-3000.2020.2.6.

33. Tambouratzis, T. (2000). Solving the Hamiltonian cycle problem via an artificial neural network. *Information Processing Letters 75 (6)*, 237–242. DOI: 10.1016/S0020-0190(00)00116-2.

34. Ponce-de-Leon, E., Ochoa, A., Santana, R. (2020). A genetic Algorithm for a Hamiltonian Path Problem. *In book: Industrial and Engineering Application of Artificial Intelligence and Expert Systems*, 13–19.

35. Голембо, В. А., Муляревич, О. В. (2011). Модифікація методу мурашиної колонії для розв'язання задачі комівояжера колективом автономних агентів. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія: Комп'ютерні системи та мережі, 717*, 24–30.

36. Chen, B.-S. (2020). *Stochastic Game Strategies and their Applications*. CRC Press.

37. Ungureanu, V. (2018). *Pareto-Nash-Stackelberg Game and Control Theory: Intelligent Paradigms and Applications.* Springer.

38. Назин, А. В., Позняк, А. С. (1986). *Адаптивный выбор вариантов: Рекуррентные алгоритмы*. Москва: Наука.

39. Kushner, H. J., Yin, G. G. (2013). *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*. Springer.

40. Кравець П. О. (2001). Збіжність ігрового градієнтного методу у знакододатних середовищах. *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія: Комп'ютерні системи та мережі, 438*, 83–89.

References

1. Gamazine, S., Deneubourg, J.-L., Frank, N. R., Sneyd, J., Theraula, G., Bonabeau, E. (2020). *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton University Press.

2. Sun, Z. (2018). *Cooperative Coordination and Formation Control for Multi-agent Systems*. Springer.

3. Kravets, P. (2019). Game strategies for decision making in hierarchical systems. I. Mathematical model of stochastic game (in Ukrainian). *System Research and Information Technologies, 3*, 63–75. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.06.

4. Kravets, P. (2019). Game strategies for decision making in hierarchical systems. II. Computer simulation of stochastic game (in Ukrainian). *System Research and Information Technologies, 4*, 105–118. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.4.11.

5. Zhang, W. J. (Editor). (2013). *Self-organization: Theories and Methods*. USA: Nova Science Publishers.

6. Kravets, P. (2015). Game model of self-organizing of multiagent systems (in Ukrainian). *Bulletin of Lviv Polytechnic National University. Series: Information systems and networks, 829*, 161–176.

7. Kravets, P. (2005). Game self-organization of agents system with individual estimation of strategies (in Ukrainian). *Bulletin of Lviv Polytechnic National University. Series: Computer systems and networks, 546*, 75–85.

8. Schweisguth, F., Corson, F. (2019). Self-Organization in Pattern Formation. Review. *Developmental Cell,* 49 (5), 659–677. DOI: 10.1016/j.devcel.2019.05.019.

9. Kravets, P., Jurinets R., Kis, Y. (2020). Patterns of self-organizing strategies in the game of mobile agents (in Ukrainian). *Bulletin of Lviv Polytechnic National University. Series: Information systems and networks, Issue 7*, 24–34. DOI: 10.23939/sisn2020.07.024.

10. Kravets, P. (2021). Self-organizing strategies in game of agent movement (in Ukrainian). *Bulletin of Lviv Polytechnic National University. Series: Information systems and networks, Issue 9*, 131–141. DOI: 10.23939.sisn2021.09.131.

11. Christofides, N. (1975). *Graph theory: an algorithmic approach*. New York: Academic Press.

12. Saoub, K. R. (2021). *Graph Theory. An Introduction to Ptoofs, Algorithms, and Applications.* Chapman and Hall/CRC.

13. Garey, M. R., Johnson, D. S., Endre, R. (1976). The Planar Hamiltonian Circuit Problem is NP-Complete. *SIAM Journal on Computing, 5 (4),* 704–714. DOI: 10.1137/0205049.

14. Alhalabi, W., Kitanneh, O., Alharbi, A., Balfakih, Z., Sarirete, A. (2016). Efficient solution for finding Hamilton cycles in undirected graphs. *SpringerPlus (2016) 5:1192*, 1–14. DOI 10.1186/s40064-016-2746-8.

15. Korte, B., Vygen, J. (eds.). (2008). The Traveling Salesman Problem. *In : Combinatorial Optimization. Algorithm and Combinatorics, 21*, 527–562. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-540-71844-4_21.

16. Abrosimov, M. (2019). Comparison of sufficient degree based conditions for Hamiltonian graph (in Russian). *Prikl. Diskr. Mat., 45,* 55–63. DOI: 10.17223/20710410/45/6.

17. Waligóra, Ł. (2017). Application of Hamilton's graph theory in new technologies. *World Scientific News, 89,* 71–81.

18. Seo, J. H., Lee, H., Jang, M. S. (2008). Optimal Routing and Hamiltonian Cycle in Petersen-Torus Networks. *Third 2008 Internaional Conference on Convergence and Hybrid Information Technjlogy*, 303–308.

19. Sharifov, F., Jun, G., Kandiba, G. (2014). Optimazation of routes of aircraft performing argo-aviation works (in Ukrainian). *Science-intensive technjlogy, 3 (23)*, 319–325.

20. Lytvyn, V., Ugrin, D. (2016). Methods of solving problems of finding optimal tourist routes by ant colony imitation algorithms (in Ukrainian). *Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Collection of scientific works. Series: Computer Science and Modeling. Kharkiv: NTU "Kharkiv Polytechnic Institute", 21 (1193),* 47–60.

21. Zhang, Q., Cheng, R., Zheng, Z. (2020). Energy-efficient renewable scheme for rechargeable sensor networks. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, 74,* 1–13. DOI: 10.1186/s13638-020-01687-4.

22. Listrovoy, S., Minukhin, S., Listrovaya, E. (2015). Monitoring distributed computing systems on the basis of the determined shortest paths and shortest Hamiltonian cycles in a graph (in Russian). *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies 6 (4)*, 32–45. DOI: 10.15587/1729-4061.2015.56247.

23. Xiong, N., Wu, W., Wu, C. (2017). An improved Routing Optimization Algorithm Based on Travelling Salesman Problem for Social Networks. *Sustainability, 9*, 1–15. DOI: 10.3390/su9060985.

24. Medvedev, P., Pop, M. (2021). What do Eulerian and Hamiltonian cycles have to do genome assembly? *PLoS Computational Biology, 17(5):e1008928,* 1–5. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1008928.

25. Melkozerova, O., Rassomakhin, S. (2019). Identification of fingerprints based on Hamiltonian cycle of distribution of local features (in Russian). *Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modelling. Information technology. Automated control systems, 44,* 51–65. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-44-06.

26. Kavun, S., Revak, I. (2015). Application of graph theory in communication management problems (in Ukrainian). *Scientific Bulletin of Lviv State University of Internal Affairs, 2,* 225–240.

27. Ratseev, S., Rostov, M. (2019). Zero-knowledge proof authentication protocols (in Russian). *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 19 (1)*, 114–121.

28. Gulyanytsky, L., Mulesa, O. (2016). *Applied methods of combinatorial optimization: Tutorial* (in Ukrainian). Kyiv: Publishing and printing center " Kyiv University".

29. Peng, Y., Choi, B., Xu, J. (2021). Graph Learning for Combinatorial Optimization: A Survey of State of the Art. *Data Science and Engineering, 6,* 119–141. DOI: 10.1007/s41019-021-00155-3 .

30. Kutelmakh, R., Uhrynovskyi, B. (2017). Investigation of the efficiency of common edges decomposition algorithm for solving large-size traveling salesman problem (in Ukrainian). "*Young Scientist", No. 12 (52)*, 1–5.

31. Sleegers, J., Berg, D. (2021). Backtracking (the) Algorithms on the Hamiltonian Cycle Problem. *arXiv:2107.00314v1 [cs.DS] 1 Jul 2021*, 1–13. Access mode: https://arxiv.org/pdf/2107.00314v1.pdf.

32. Prokopenkov, V. (2020). A new method for finding a Hamiltonian cycle on a graph (in Russian). *Bulletin of the National Thecnical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Strategic management, portfolio management, and projects* (in Russian), *2,* 43 – 49. DOI: 10.20998/2413-3000.2020.2.6.

33. Tambouratzis, T. (2000). Solving the Hamiltonian cycle problem via an artificial neural network. *Information Processing Letters 75 (6)*, 237–242. DOI: 10.1016/S0020-0190(00)00116-2.

34. Ponce-de-Leon, E., Ochoa, A., Santana, R. (2020). A genetic Algorithm for a Hamiltonian Path Problem. *In book: Industrial and Engineering Application of Artificial Intelligence and Expert Systems,* 13–19.

35. Muliarevych, O., Golembo, V. (2011). A modification of the ant colony method for solving the problem og a salesman by a team of autonomous agents (in Ukrainian). *Computer systems and networks: Bulletin of the Lviv Polytechnic National University, 717*, 24–30.

36. Chen, B.-S. (2020). *Stochastic Game Strategies and their Applications*. CRC Press.

37. Ungureanu, V. (2018). *Pareto-Nash-Stackelberg Game and Control Theory: Intelligent Paradigms and Applications.* Springer.

38. Nazin, A. V., Poznyak, A. S. (1986). *Adaptive Choice of Variants: Recurrence Algorithms* (in Russian). Moscow: Science.

39. Kushner, H. J., Yin, G. G. (2013). *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*. Springer.

40. Kravets, P. (2001). Convergence of the game gradient method in sign-positive environments (in Ukrainian). *Bulletin of Lviv Polytechnic National University. Series: Computer systems and networks, 438*, 83–89.

GAME SELF-ORGANIZATION OF HAMILTONIAN CYCLE OF THE GRAPH

Petro Kravets, Volodymyr Pasichnyk, Mykola Prodaniuk

Lviv Polytechnic National University,
E-mail: Petro.O.Kravets@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-8569-423X;
E-mail: Volodymyr.V.Pasichnyk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0002-5231-6395;
E-mail: Mykola.M.Prodaniuk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-9544-3792

This paper proposes a new application of the stochastic game model to solve the problem of self-organization of the Hamiltonian cycle of a graph. To do this, at the vertices of the undirected graph are placed game agents, whose pure strategies are options for choosing one of the incident edges. A random selection of strategies by all agents forms a set of local paths that begin at each vertex of the graph. Current player payments are defined as loss functions that depend on the strategies of neighboring players that control adjacent vertices of the graph. These functions are formed from a penalty for the choice of opposing strategies by neighboring players and a penalty for strategies that have reduced the length of the local path.

Random selection of players' pure strategies is aimed at minimizing their average loss functions. The generation of sequences of pure strategies is performed by a discrete distribution built on the basis of dynamic vectors of mixed strategies. The elements of the vectors of mixed strategies are the probabilities of choosing the appropriate pure strategies that adaptively take into account the values of current losses.

The formation of vectors of mixed strategies is determined by the Markov recurrent method, for the construction of which the gradient method of stochastic approximation is used. During the game, the method increases the value of the probabilities of choosing those pure strategies that lead to a decrease in the functions of average losses. For given methods of forming current payments, the result of the stochastic game is the formation of patterns of self-organization in the form of cyclically oriented strategies of game agents. The conditions of convergence of the recurrent method to collectively optimal solutions are ensured by observance of the fundamental conditions of stochastic approximation.

The game task is extended to random graphs. To do this, the vertices are assigned the probabilities of recovery failures, which cause a change in the structure of the graph at each step of the game. Realizations of a random graph are adaptively taken into account when searching for Hamiltonian cycles. Increasing the probability of failure slows down the convergence of the stochastic game.

Computer simulation of the stochastic game provided patterns of self-organization of agents' strategies in the form of several local cycles or a global Hamiltonian cycle of the graph, depending on the ways of forming the current losses of players. The reliability of experimental studies is confirmed by the repetition of implementations of self-organization patterns for different sequences of random variables.

The results of the study can be used in practice for game-solving NP-complex problems, transport and communication problems, for building authentication protocols in distributed information systems, for collective decision-making in conditions of uncertainty.

Key words: self-organization; behavioral pattern; graph; Hamiltonian cycle; stochastic agent game; Markov recurrent method.