COMPUTER DESIGN SYSTEMS. THEORY AND PRACTICE

Vol. 3, No. 1, 2021

https://doi.org/10.23939/cds2021.01.001

УДК 004.42:681.324

Я. Соколовський[1], М. Левкович[1], Я. Каспришин[2]

[1]Національний університет «Львівська політехніка»,

[2] Національний Лісотехнічний Університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Досліджено процеси деформування у середовищах з фрактальною структурою. На сьогодні дослідження, які присвячені питанням побудови математичних методів та моделей взаємозв'язаних деформаційно-релаксаційних та тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою знаходяться на початковому етапі. Існує ряд невирішених задач, зокрема до кінця нерозв'язаною залишається задача коректної та фізично-осмисленої постановки початкових і граничних умов для нелокальних математичних моделей нерівноважних процесів у середовищах з фрактальною структурою.

Для розроблення адекватних математичних моделей процесів тепломасоперенесення та в'язкопружного деформування у середовищах з фрактальною структурою, для яких характерні ефекти пам'яті, самоорганізації та просторової нелокальності, детермінованого хаосу та мінливості реологічних властивостей матеріалу, необхідно застосовувати нетрадиційні підходи, зокрема використовувати математичний апарат дробових інтегро-диференціальних операторів. Наявність у диференціальних рівняннях дробової похідної за часом характеризує ефекти пам'яті (еридитарності) або немарковість процесів моделювання. Реалізація математичних моделей може проводитися як аналітичними так і чисельними методами. Зокрема, у цій роботі отримано інтегральний вигляд дробово-диференціальних реологічних моделей на підставі використання властивостей нецілочисельного оператора інтегро-диференціювання та методу перетворення Лапласа.

Отримані аналітичні розв'язки математичних моделей деформування у в'язкопружних фрактальних середовищах дали можливість отримати термодинамічні функції, ядра повзучості та релаксації фрактального типу. Розроблене програмне забезпечення для дослідження впливу параметрів дробового диференціювання на реологічні властивості в'язкопружних середовищ.

Проведені дослідження дають можливість підвищити ефективність математичного моделювання процесів в'язко-пружного деформування матеріалу з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації шляхом зменшення залишкових напружень у матеріалі та визначення адекватного напружено-деформаційного стану. Окрім цього наведені результати можуть бути використані у задачах параметричної ідентифікації математичних моделей в'язкопружних середовищах з фрактальною структурою.

Ключові слова: ефект «пам'яті», самоорганізація, деформація, напруження, перетворення Лапласа, дробовий порядок, фрактальна структура.

Постановка проблеми

На сьогодні існує чимало складних систем, моделювання яких вимагає застосування нетрадиційного підходу. Одним із дієвих підходів є застосування дробового інтегро-диференціювання для дослідження та математичного моделювання таких систем. Апарат дробових інтегро-диференціальних операторів дозволяє досліджувати ефекти «пам'яті», самоорганізації, просторової нелокальності, детермінований хаос, складну природу просторових кореляцій.

Слід зауважити, що досить не значна кількість праць присвячена питанням розроблення алгоритмічного та програмного забезпечення для дослідження процесів деформування та неізотермічного вологоперенесення, враховуючи властивості еридитарності та самоорганізації матеріалів, що дає змогу оцінити залишкові та пружні значення напруження під час проведення технологічних процесів. У цій статті розглядаються математичні моделі лінійної в'язкопружності, які базуються на введені дробового диференціювання та отримані основні термодинамічні функції реологічних моделей.

Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об'єктом дослідження є процеси деформування у середовищах з фрактальною структурою.

Предметом дослідження є методи аналізу та математичні моделі в'язко-пружних процесів з урахуванням структурної неоднорідності та ефектів пам'яті складних матеріалів, зокрема капілярно-пористих матеріалів під час сушіння.

Формулювання мети та завдань статті

Мета дослідження полягає у побудові та дослідженні математичних моделей деформаційно-релаксаційних процесів капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їхньої фрактальної структури.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження: побудувати математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів на підставі дробового інтегро-диференціального апарату; отримати аналітичні розв'язки математичних моделей в'язко-пружної деформації з урахуванням фрактальної структури матеріалу; на підставі отриманого інтегрального представлення реологічних моделей визначити ядра повзучості та релаксації, термодинамічні характеристики; встановити закономірності процесів деформування матеріалу враховуючи ефекти «пам'яті» та самоорганізації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз наукових джерел свідчить про те, що визначення похідних дробового порядку базується в основному на двох підходах. Перший базується на узагальненні відомої формули Коші, яка дозволяє звести багатократний інтеграл цілого порядку до однократного [1, 2] та ін.. Другий підхід розвинутий у працях [3] і узагальнений у [3, 4] щодо визначення дробової похідної через границю скінченно-різницевого відношення. Також відомі ряд узагальнень та модифікацій таких підходів [5,6]. Властивості дробового інтегро-диференціювання у рамках цих підходів досліджені та описані у [7– 9]. Основною відмінністю дробових похідних від цілочисельних є їх нелокальність, тобто залежність результатів диференціювання від значень функцій у всіх точках деякого відрізка або числової прямої, а не від значень функцій у точках із малого околу даної точки – як у випадку звичайного диференціювання. Також відомі дослідження щодо узагальнення дробових операторів диференціювання, зокрема у [10, 11] дробовий порядок описується функцією часу, а в [12] випадковою величиною.

Характерною особливістю дробових операторів диференціювання та інтегрування є відсутність явної фізичної та геометричної інтерпретації таких операцій. Існують декілька підходів до вирішення даної проблеми, які умовно можна поділити на три напрямки: ймовірнісний, геометричний та фізичний [9, 13]. Автори останніх двох підходів з використанням класичної фрактальної геометрії будують аналогію у відношенні до операцій диференціювання цілого порядку. Зокрема, робиться спроба обґрунтування змісту дробових похідних з використанням зв'язку між дробовими операторами і фракталами у термінах операцій, що задаються на фрактальних багатообразах. Ймовірнісний підхід базується на аналізі статистичних розподілів «некласичної» поведінки. Наявність різних підходів до визначення дробових похідних породжують неоднозначність щодо коректності та фізичної осмисленості постановки початкових та граничних умов залежно від типу дробової похідної.

Останніми роками спостерігається значна зацікавленість щодо використання дробових диференційних рівнянь для моделювання різних процесів. Дослідженню динаміки та автохвильових розв'язків бістабільних систем реакції – дифузії з часовими дробовими похідними присвячені праці

[14, 15] . Показано, що застосування дробових диференційних операторів дозволяють описати нові властивості таких систем порівняно з системами, у яких використовуються похідні цілого порядку. Побудовам фундаментальних розв’язків параболічних рівнянь з дробовою похідною за часом з різними граничними умовами присвячені праці [16-18]. Наведені розв'язки рівнянь дифузії та термопружності з дробовою похідною за часом. Використання методів скінченних різниць для розв’язання двовимірних задач теплопровідності з похідними дробового порядку за часом і просторових координатах наведено у [19]. У працях [19, 20] застосовано явні та неявні схеми методу скінченних різниць для дослідження рівнянь тепломасоперенесення та в’язкопружного деформування з похідними дробового порядку за часом.

Окрім цього, використання диференціальних рівнянь дробового порядку для побудови математичних моделей в’язкопружного деформування дозволяють більш адекватно виходячи з фізичних міркувань узагальнювати експериментальні дані для ідентифікації параметрів моделей.

Дробово-диференціальний підхід у математичних моделях в’язкопружності дозволяє враховувати ефекти пам’яті. Відомо [3], що врахування ефекту пам’яті для зміни деякої фізичної величини $F(t)$ залежно від іншої $f(t)$ визначається залежністю

$$F(t)=\int_0^t K(t-t')\,f(t')\,dt', \tag{1}$$

де K – функція пам’яті, t, t' – час.

Для моделювання систем у випадку відсутності ефекту пам’яті (марківські процеси) функція $F(t)$ має вигляд $K(t-t')=\eta\delta(t-t')$, де $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака, $\eta>0$ – деяка константа. У випадку «повної» пам’яті маємо співвідношення $K(t-t')=t^{-1}h(t-t')$, де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда. Проміжний часовий етап розвитку та функціонування систем між двома граничними станами (відсутність пам’яті – наявність «повної» пам’яті), як показано в [3], характеризуються множиною міри Хаусдорфа–Безиковича, а зв’язок між величинами $F(t)$ і $f(t)$ описується дробовим інтегралом

$$F(t)=\Gamma^{-1}(\alpha)\int_0^t (t-t')^{\alpha-1} f(t')dt', \tag{2}$$

де $\Gamma(\alpha)$ – Гамма–функція, α – фрактальна розмірність системи.

Зміна поведінки таких систем з частковою пам’яттю, зокрема пов’язаних з в’язкопружним деформуванням, дисипацією енергії, описується дробовими похідними

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) \sim \frac{\partial^{\alpha}}{t_0 \partial \bar{t}^{\alpha}} f(\bar{t}) \sim \Gamma^{-1}(1-\alpha)\frac{d}{t_0 d\bar{t}}\int_0^{\bar{t}} \frac{f(t')}{(\xi-t')^{\alpha}}\,dt', \tag{3}$$

де $\bar{t}=t_0$ – безрозмірний час, t_0 – характерний час даного процесу. Видно, що шукана функція у визначенні дробової похідної знаходиться під інтегралом за часом, тобто конкретним значенням α враховуються ефект пам’яті, зокрема у наступні моменти часу.

Для моделювання самоподібної неоднорідності відповідно просторова похідна має аналогічний дробовий порядок $t \to l_0$, $\bar{t} \to \xi$, $\xi = x/l_0$, де l_0 – характерний просторовий масштаб.

Для математичного моделювання деформаційно-релаксаційних процесів використовують структурні реологічні моделі. Ними користуються для визначення механічних властивостей полімерів, внутрішнього тертя в твердих тілах та інших властивостей реальних тіл. До традиційних реологічних моделей слід віднести моделі Максвелла, Фойгта, Кельвіна, Джеффріса тощо, які описують властивості суцільних середовищ. У більшості випадків для опису моделей допускається, що механічні властивості досліджуваного середовища можна з достатньою точністю описати на основі трьох основних властивостей: пружних, пластичних та в’язкопружних.

Використовуючи можливі комбінації таких моделей, можна отримати різні схеми в’язкопружного деформування, що описуються різними типами диференціальних рівнянь, які містять звичайні похідні. В свою чергу ці рівняння дозволяють отримати функції вільної енергії, зміни ентропії та розсіювання енергії для кожної найпростішої моделі. Враховуючи вищенаведені міркування, можна вважати, що для математичного моделювання реологічних властивостей в’язкопружних середовищ доцільне використовування інтегродиференціальних операторів дробового порядку. Зазначимо, що дробово-диференціальний підхід для моделювання реологічної поведінки матеріалів пов’язаний з роботами [21, 22] та працями інших авторів.

Виклад основного матеріалу

Методи досліджень

Для дослідження та побудови математичних моделей в’язко-пружної деформації матеріалу враховуючи властивості еридитарності та самоорганізації було використано наступні методи:

– методи механіки спадкових середовищ;

– дробовий інтегро-диференціальний апарат;

– метод перетворення Лапласа.

Результати досліджень

Математичне моделювання дробово-диференціальних моделей в’язко-пружної деформації

Математичні моделі деформування у в’язкопружних фрактальних середовищах описуються відповідними рівняннями дробово-диференціального типу:

для моделі Максвелла

$$\sigma(t) + \tau^{\alpha} D_t^{\alpha} \sigma(t) = E \tau^{\beta} D_t^{\beta} \varepsilon(t), \qquad 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{4}$$

для моделі Кельвіна

$$E_1 \tau^{\alpha} D_t^{\alpha} \sigma(t) + (E_1 + E_2) \sigma(t) = E_1 E_2 (\varepsilon(t) + \tau^{\beta} D_t^{\beta} \varepsilon(t)), \qquad 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{5}$$

де t, τ – час, E – модуль пружності для моделей Максвелла та Фойгта, E_1 – модуль пружності елемента Фойгта для моделі Кельвіна, E_2 – модуль пружності для моделі Кельвіна, $\sigma(t)$ – напруження, $\varepsilon(t)$ – деформація, D_t^{α}, D_t^{β} – дробові похідні по часу з порядком відповідно α, β.

Дробова похідна порядку α від функції $f(t)$ визначається формулою [1]:

$$D_t^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{\alpha-n+1}} dt', \qquad 0 \le n-1 < \alpha < n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Аналітичний розв’язок представлених моделей

Знайдемо розв’язки рівнянь відносно напруження $\sigma(t)$ використовуючи метод перетворення Лапласа. Запишемо загальне рівняння, що описує моделі Максвелла та Кельвіна:

$$D_t^{\alpha}\sigma(t)+a_{M,K}\sigma(t)=h_{M,K}(t), \tag{7}$$

де $a_M=\dfrac{1}{\tau^{\alpha}}$, $a_K=\dfrac{E_1+E_2}{E_1\tau^{\alpha}}$, $h_M(t)=E\tau^{\beta-\alpha}D_t^{\beta}\varepsilon(t)$, $h_K(t)=\dfrac{E_2}{\tau^{\alpha}}(\varepsilon(t)+\tau^{\beta}D_t^{\beta}\varepsilon(t))$, a_M, a_K – деякі коефіцієнти для моделей Максвелла і Кельвіна, $h_M(t), h_K(t)$ – функції від часу для моделей Максвелла і Кельвіна відповідно.

Алгебраїчне рівняння для трансформанти матиме вигляд:

$$\lambda^{\alpha}\hat{\sigma}(\lambda)+a_{M,K}\hat{\sigma}(\lambda)=\hat{h}_{M,K}(\lambda)+c_{M,K}, \tag{8}$$

де $\hat{h}_M=E\tau^{\beta-\alpha}\lambda^{\beta}\hat{\varepsilon}(\lambda)$ – лапласовий образ перетворення функції $h_M(t)$ для моделі Максвелла, $\hat{h}_K(\lambda)=\dfrac{E_2}{\tau^{\alpha}}(\hat{\varepsilon}(\lambda)+(\tau\lambda)^{\beta}D_t^{\beta}\hat{\varepsilon}(\lambda))$ – лапласовий образ перетворення функції $h_K(t)$ для моделі Кельвіна, $c_M=\sigma^{(\alpha-1)}(0+)-E\tau^{\beta-\alpha}\varepsilon^{(\beta-1)}(0+)$, $c_K=\sigma^{(\alpha-1)}(0+)-E_2\tau^{\beta-\alpha}\varepsilon^{(\beta-1)}(0+)$ – деякі коефіцієнти для моделі Максвелла і Кельвіна відповідно; для дробового показника α використано $f^{(\alpha-1)}(0+)=\lim_{x\downarrow 0}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^x\dfrac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}}d\xi.$ [13], що

З рівняння (8) отримаємо:

$$\hat{\sigma}(\lambda)=\frac{\hat{h}_{M,K}(\lambda)}{\lambda^{\alpha}+a_{M,K}}+\frac{c_{M,K}}{\lambda^{\alpha}+a_{M,K}}. \tag{9}$$

Для здійснення оберненого перетворення Лапласа зручно подати вираз $1/\lambda^{\alpha}+a_{M,K}$ у вигляді:

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha}+a_{M,K}}=\lambda^{-\alpha}\frac{1}{1+a_{M,K}\lambda^{-\alpha}}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-a_{M,K}\right)^j\lambda^{-\alpha j-\alpha}. \tag{10}$$

Тоді

$$L^{-1}\{\frac{1}{\lambda^{\alpha}+a_{M,K}}\}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-a_{M,K}\right)^j L^{-1}\{\lambda^{-\alpha j-\alpha}\}(t), \tag{11}$$

де L^{-1} – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Використовуючи [13] співвідношення $L^{-1}\{\lambda^{-\gamma}\}(x)=\dfrac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},$ для нашого випадку отримаємо:

$$L^{-1}\{\frac{1}{\lambda^{\alpha}+a_{M,K}}\}(t)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-a_{M,K}t^{\alpha}\right)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}. \tag{12}$$

Для подальших перетворень скористаємось функцією Міттаг-Леффлера [1] та перепишемо (10) у вигляді:

$$L^{-1}\{\frac{1}{\lambda^{\alpha}+a_{M,K}}\}(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-a_{M,K}t^{\alpha}\right) \quad (13)$$

Використовуючи теорему про згортку двох функцій [13] та підставляючи відповідні значення $a_{M,K}$ та $h_{M,K}(t)$, отримаємо розв'язок рівнянь (4) та (5) відносно напруження $\sigma(t)$:

$$\sigma_M(t)=c_M t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right)+E\tau^{\beta-\alpha}\int_0^t (t-z)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{(t-z)^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right)D_z^{\beta}\varepsilon(z)dz, \quad (14)$$

$$\sigma_K(t)=c_K t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{(E_1+E_2)t^{\alpha}}{E_1\tau^{\alpha}}\right)+\frac{E_2}{\tau^{\alpha}}\int_0^t (t-z)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{(E_1+E_2)(t-z)^{\alpha}}{E_1\tau^{\alpha}}\right)(\varepsilon(z)+\tau^{\beta}D_z^{\beta}\varepsilon(z))dz, \quad (15)$$

де $0<\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1.$

Дробово-диференціальні ядра повзучості та релаксації. Термодинамічні функції стану реологічних моделей з урахуванням фрактально структури середовища

Із отриманих виразів для напруження $\sigma(t)$ та деформації $\varepsilon(t)$, можемо визначити для кожної з моделей ядра повзучості $\Pi(t-z)$ та релаксації $R(t-z)$, які входять в інтегральні рівняння моделей.

Для моделей Максвелла та Кельвіна ядра повзучості та релаксації мають наступний вигляд:

$$\Pi_M(t-z)=\frac{1}{E\tau^{\beta}}(\frac{\tau^{\alpha}(t-z)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}+\frac{(t-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}), \quad (16)$$

$$R_M(t-z)=E\tau^{\beta-\alpha}(t-z)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{(t-z)^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right), \quad (17)$$

$$\Pi_K(t-z)=(t-z)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-\frac{(t-z)^{\beta}}{\tau^{\beta}}\right), \quad (18)$$

$$R_K(t-z)=E_2\tau^{-\alpha}(t-z)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{(E_1+E_2)(t-z)^{\alpha}}{E_1\tau^{\alpha}}\right). \quad (19)$$

Не менш важливим для дослідження в'язкопружних середовищ в умовах взаємодії з процесами теплоперенесення є термодинамічні функції. Лише для трьох класичних моделей відомі у явному вигляді термодинамічні параметри стану [23]. Для визначення термодинамічних функцій дробово-диференціальних моделей Максвелла та Кельвіна як і у випадку звичайних моделей енергію u, ентропію S та вільну енергію Ψ можна розглядати як функції температури ϑ та пружної деформації ε_1, а функцію розсіювання енергії W^* як функцію в'язкої деформації ε_2.

Таким чином, для дробово-диференціальних моделей Максвелла та Кельвіна отримано наступні термодинамічні функції:

$$\Psi_M = -\frac{c_\rho}{2T_0}\vartheta^2 + \frac{E}{2}\frac{1}{(1+\omega^\alpha D_t^{-\alpha})^2}\left(\omega^{\alpha-\beta}D_t^{\beta-\alpha}\varepsilon^T(t) + \alpha^*\vartheta\frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}\right)^2, \tag{20}$$

$$S_M = \frac{c_\rho}{T_0}\vartheta + \alpha^* E\frac{1}{(1+\omega^\alpha D_t^{-\alpha})}\left(\omega^{\alpha-\beta}D_t^{\beta-\alpha}\varepsilon^T(t) + \alpha^*\vartheta\frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}\right), \tag{21}$$

$$W^*{}_M = \frac{Ea_T}{\omega}\left(D_t\left(\frac{1}{\left(1+\omega^\alpha D_t^{-\alpha}\right)}\left(\varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha}\varepsilon^T(t) - \omega^{\alpha-\beta}D_t^{\beta-\alpha}\varepsilon^T(t) - \alpha^*\vartheta\frac{(\omega t)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}\right)\right)\right)^2, \tag{22}$$

$$\Psi_K = -\frac{c_\rho}{2T_0}\vartheta^2 + \frac{E_2}{2}\left(\frac{1}{A}\left(\omega^{\alpha-\beta}D_t^{\beta-\alpha}\varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha}\varepsilon^T(t) + \alpha^*\vartheta B\right) + C\right)^2, \tag{23}$$

$$S_K = \frac{c_\rho}{T_0}\vartheta + \alpha^* E_2\frac{1}{A}\left(\omega^{\alpha-\beta}D_t^{\beta-\alpha}\varepsilon^T(t) + \omega^\alpha D_t^{-\alpha}\varepsilon^T(t) + \alpha^*\vartheta B\right) + C, \tag{24}$$

$$W^*{}_K = \frac{E_2 a_T}{\omega}\left(D_t\varepsilon(t)\right)^2. \tag{25}$$

На підставі нецілочисельного інтегро-диференціального апарату отримано аналітичні співвідношення у інтегральній формі для визначення деформацій та напружень дробово-диференціальних реологічних моделей, які дозволяють встановити динаміку напружено-деформаційного стану матеріалу з урахуванням еридитарності та самоорганізації, отримано термодинамічні функції, ядра релаксації та повзучості дробово-диференціальних моделей.

Результати чисельного моделювання та встановлення закономірностей

Проведено чисельний експеримент визначення залежності напруження $\sigma(t)$ від часу t для реологічних моделей Максвелла та Кельвіна. Для цього, вибрано взірець матеріалу, модуль пружності якого E, ($\mathrm{E} = 14300\text{МП}a$) (рис. 1). Фрактальні параметри α та β фіксовані наступним чином: дробовий параметр α ближче до 1 (нехай α прийме значення 0,9), при цьому фрактальний параметр β змінюватиметься із кроком $\Delta\beta = 0{,}2$, $\beta = 0{,}3 + \Delta\beta$, $\left(0 \le \beta \le 1\right)$. Фрактальний параметр β зафіксуємо ближче до 0 (нехай β прийме значення 0,1), тоді α змінюватимемо ($\alpha = 0{,}4;0{,}6;0{,}8$). Проаналізувавши отримані результати можна зауважити, що для моделей при різних дробових інтегро-диференціальних значеннях параметрів функції напруження зростають. Таким чином для моделей Кельвіна та Максвелла можна спостерігати, що для фіксованогопараметру β та змінному α значення напруження капілярно-пористих матеріалів під час проведення експерименту збільшується із зменшенням параметру α, проте при фіксованому α та змінному β навпаки – значення напруження збільшується із збільшенням змінного фрактального

параметру β . Із отриманих результатів можна зробити відповідні висновки та рекомендації щодо обрання моделі та відповідних дробово-диференціальних показників для кращого опису відповідного деформаційно-релаксаційного процесу.

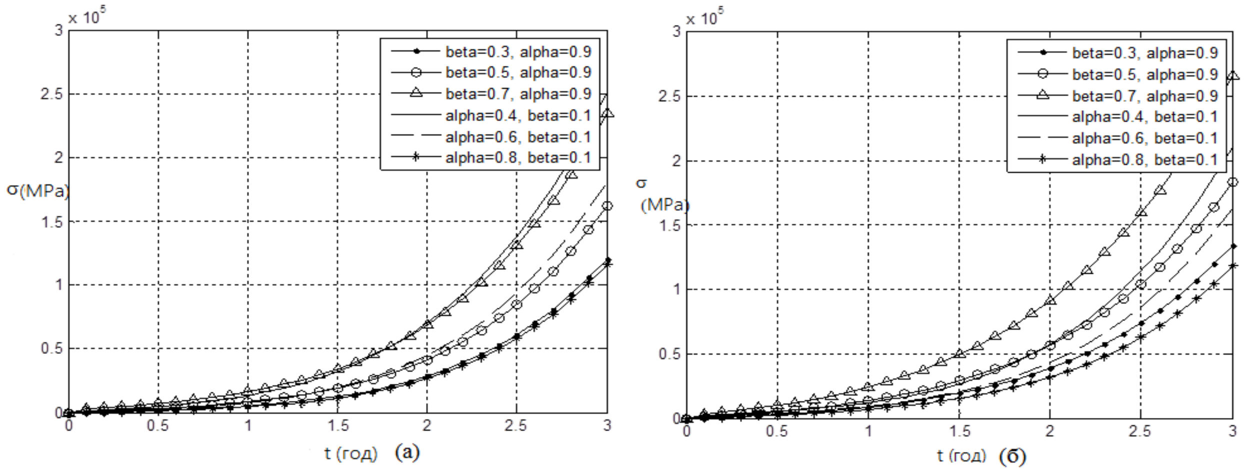

Рис. 1. – Залежність напруження відносно часу

а – модель Максвелла при різних фрактальних параметрах; б – модель Кельвіна при різних фрактальних параметрах

На рис. 2 зображено ентропію для дробово-диференціальних моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта (модель Кельвіна без пружного елементу). Найбільшого значення при заданих фрактальних параметрів досягає модель Кельвіна. Проміжне значення приймає ентропія побудована для моделі Фойгта та найменше значення ентропії отримуємо для моделі Максвелла. Отже, на відміну від цілочисельних похідних, дробово-диференціальний підхід дозволяє отримати термодинамічні функції реологічних моделей Максвелла, Кельвіна та Фойгта, які дають можливість врахувати ередитарність, самоорганізацію та детермінований хаус середовища.

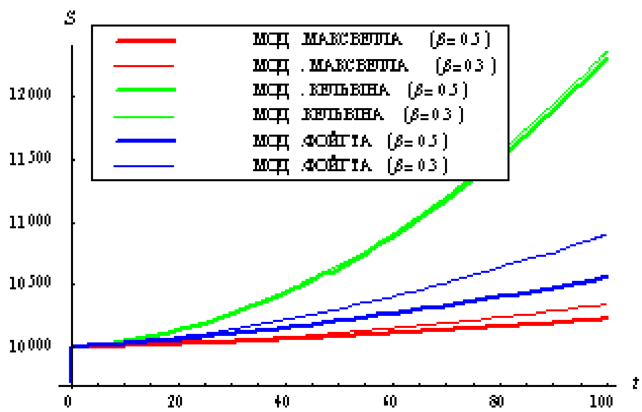

Рис. 2. – Ентропія реологічних моделей з урахуванням фрактального середовища

Сильні сторони результатів даних досліджень полягають у тому, що отримані у інтегральній формі реологічні моделі дають можливість визначити ядра повзучості та релаксації, термодинамічні характеристики, що дають можливість оцінити пружні та залишкові значення напруження матеріалу у певному технологічному процесі. Математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів, які описуються цілочисельними похідними не враховують ефектів «пам'яті», сомоорганізації, просторової нелокальності.

Враховуючи різні інтерпретації дробово-диференціальних операторів, які можуть вживатися у різних сенсах (Рімана-Ліувілля, Капуто, Грюнвальда-Летнікова, Вейля, Маршо та ін.) виникає проблема адекватного вибору дробово-диференціального оператора для постановки задачі та її обґрунтування. Також, аналітичні методи реалізації є трудомісткими. Саме тому простішими та ефективнішими у застосуванні вважаються чисельні методи.

Висновки

1. Досліджено математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів у середовищах з фрактальною структурою. Зокрема, реологічні дробово-диференціальні реологічні моделі Максвелла та Кельвіна, які характеризуються з'єднанням (послідовним чи паралельним) пружного та в'язкого елемента.

2. Побудовано математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів у фрактальних середовищах з використанням апарату дробового інтегро-диференціювання.

3. На підставі використання аналітичного методу перетворення Лапласа та ряду властивостей дробової похідної Рімана-Ліувілля отримано інтегральне представлення реологічних моделей фрактального типу.

4. Отримані формули для опису ядер повзучості та релаксації, які входять в інтегральні співвідношення моделей дробово-диференціального типу. Також наведені вирази для визначення основних термодинамічних функцій таких моделей.

5. Враховуючи результати чисельного моделювання встановлено вплив фрактального параметра на реологічні властивості в'язко-пружного середовища.

6. Оскільки застосування дробових диференційних операторів дозволяють описати нові властивості складних систем порівняно з системами, у яких використовуються похідні цілого порядку, з'являється можливість провести дослідження таких середовищ, яким характерні ефекти «пам'яті», мінливості реологічних властивостей матеріалу тощо. Такий ряд досліджень може бути корисним для покращення якості та організації проведення багатьох технологічних процесів.

Список використаних літературних джерел

1. Самко, С. Г., Килбас, А.А., Маричев, О.И. (1987). Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 688.

2. Cottrill-Shepherd, K., Naber, M. (2001). Fractional differential forms. Journal of Mathematical Physics. Vol.42. No.5. 2203-2212.

3. Бутковский, А. Г., Постнов, С. С., Постнова, Е. А. (2013). Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. Автоматика и телемеханика. N 4., 3-29.

4. Post, E. U. Generalized Differentiation (1930). Trans. of Amer. Math Soc. V. 32. № 4., 723-781.

5. Zavada, P. (1998). Operator of fractional derivative in the complex plane. Communications in Mathematical Physics.V.192, 261-285.

6. Chen, Y., Yan Zhang (2003). Applications of Fractional Exterior Differential in The Dimension space. Appl. Math. Mech. 2003. V. 24. N 3, 216-260.

7. West, B.J., Bologna, M., Grigolini, P. (2003). The Physics of Fractal Operators, Springer-Verlag,.New York, 354.

8. Machado, J. Tenreiro, Kiryakova, V., Mainardi, F. (2011).Recent history of fractional calculus. Commun Nonlinear Science and Numer Simulat, V. 16, 1140-1153.

9. Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 340.

10. Lorenzo, C. F., Hartley, T. T. (2002). Variable Order Distributed Order fractional Operators. Nonlin. Dyn. V.29, 57-98.

Valerio, D., da Costa, J. S. (2011). Variable-Order Fractional Derivatives and their Numerica Aproximations. Signal Proc. V.91, 470-483.

11. Sun, H., Chen, Y., Chen, W., (2009) Time Fractional Differential Equation Model with Randow Derivative Order. Proc. ASME int. Design Engin. Technical Conf. Computers and Inform. in. Engin. Conf. DETC/CIE, Paper If DETC 2009-87483 (6 pages).

12. Учайкин, В. В. (2008). Метод дробных производных. Ульяновск: Издательство «Артишок», 512.

13. Datsko, B.Y., Gafiychuk, V.V. (2012) Different types of instabilities and complex dynamics in reaction-diffusion systems with fractional derivatives. Computational and Nonlinear Dynamics. DOI No: CND-09-1119.

14. Gafiychuk, V., Datsko, B. (2010). Mathematical modeling of different types of instabilities in time fractional reaction-diffusion systems. Computers and Mathematics with Applications, 59, 1101-1107.

15. Povstenko, Y. (2013). Fundamental solutions to time-fractional heat conduction equations in two joint half-lines. Cent. Eur. J. Fhys. 11(10), 1284-1294.

16. Povstenko, Y., (2012). Neumanuboundary-value problems for a time-fractional diffusion - walue equation in half-plane. Computers Mathematics with Applications, Vol.64, 11, 3183-3192.

17. Povstenko, Y. (2013). Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Inclusion. Entropy. Vol.15, 4122 – 4133.

18. Sokolovskyy, Ya., Shymanskyi, V., Levkovych, M. (2016). Mathematical modeling of non-isotermal moisture transfer and visco-elastic deformation in the materials with fractal structure. Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2016' : proc. of the 11th Intern. Sci. and Techn. Conf., 6-10 Sept. 2016. Lviv, 91-95.

19. Sokolovskyy, I., Levkovych, M., Mokrytska, O. (2018). Numerical modeling and analysis of physical properties in biomaterials with fractal structure. Informatics & Data-Driven Medicine. Vol. 2255., 180-192.

20. Oldham, K.B., Spanier, J. (1974). The Fractional Calculus. New York-London: Academic Press.

21. Победря, Б. Е. (2000). Модели механики сплошной среды. Изв. РАН МТТ. № 3, 47-59.

[1]Ya. Sokolovskyy, [1]M. Levkovych, [2]Ya. Kaspryshyn
[1] Lviv Polytechnic National University,
[2] National Forestry University

RESEARCH AND MATHEMATICAL MODELING OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL RHEOLOGICAL MODELS

Deformation processes in media with fractal structure have been studied. At present, research on the construction of mathematical methods and models of interconnected deformation-relaxation and heat-mass transfer processes in environments with a fractal structure is at an early stage. There are a number of unsolved problems, in particular, the problem of correct and physically meaningful setting of initial and boundary conditions for nonlocal mathematical models of nonequilibrium processes in environments with fractal structure remains unsolved.

To develop adequate mathematical models of heat and mass transfer and viscoelastic deformation in environments with fractal structure, which are characterized by the effects of memory, self-organization and spatial nonlocality, deterministic chaos and variability of rheological properties of the material, it is necessary to use non-traditional approaches. -differential operators. The presence of a fractional derivative in differential equations over time characterizes the effects of memory (eridity) or non-marking of modeling processes. The implementation of mathematical models can be carried out by both analytical and numerical methods. In particular, in this paper the integral form of fractional-differential rheological models is obtained on the basis of using the properties of the non-integer integral-differentiation operator and the Laplace transform method.

The obtained analytical solutions of mathematical models of deformation in viscoelastic fractal media made it possible to obtain thermodynamic functions, creep nuclei and fractal-type relaxation. Developed software to study the effect of fractional differentiation parameters on the rheological properties of viscoelastic media.

Key words: memory effect, self-organization, deformation, stress, Laplace transform, fractional order, fractal structure.